Una guía práctica para comprender e implementar estrategias de control industrial

Control automático de procesos. Teoría y Práctica es una referencia indispensable en la ingeniería de procesos. Esta nueva edición presenta cambios sustanciales con respecto a la edición anterior, como la reorganización de los contenidos y la eliminación de material absoleto, y temas nuevos, como la simulación dinámica, pero conserva su énfasis original en la teoría de control y su aplicación práctica en la industria. Por esta razón, uno de los cambios más importantes es la actualización de ejemplos y problemas, así como de los estudios de caso.

El diseño de un sistema de control implica identificar los objetivos de control, la selección de parámetros de medición y operación del proceso, así como la determinación de los lazos y la identificación de los algoritmos que brinden el control apropiado.

CON ESTE LIBRO, EL ESTUDIANTE PODRÁ:

- Desarrollar modelos matemáticos de procesos dinámicos para el análisis, diseño y operación de sistemas de control.
- Entender cómo funcionan los componentes básicos de los sistemas de control.
- Diseñar y sintonizar controladores por retroalimentación.
- Aplicar diversas técnicas para mejorar el control por retroalimentación, entre las que se incluyen el control en cascadas, control de relación, control *override*, control selectivo, control *feedforward*, control multivariable e interacción entre lazos de control.
- Dominar los fundamentos de la simulación dinámica de los sistemas de control utilizando MATLAB[MR] y Simulink[MR].

ÁREA: INGENIERÍA QUÍMICA
ISBN 978-607-05-0721-2
9 786070 507212

GRUPO NORIEGA EDITORES
limusa@noriegaeditores.com
www.noriega.com.mx
noriegaeditores @noriegaeditores

WILEY

SMITH • CORRIPIO

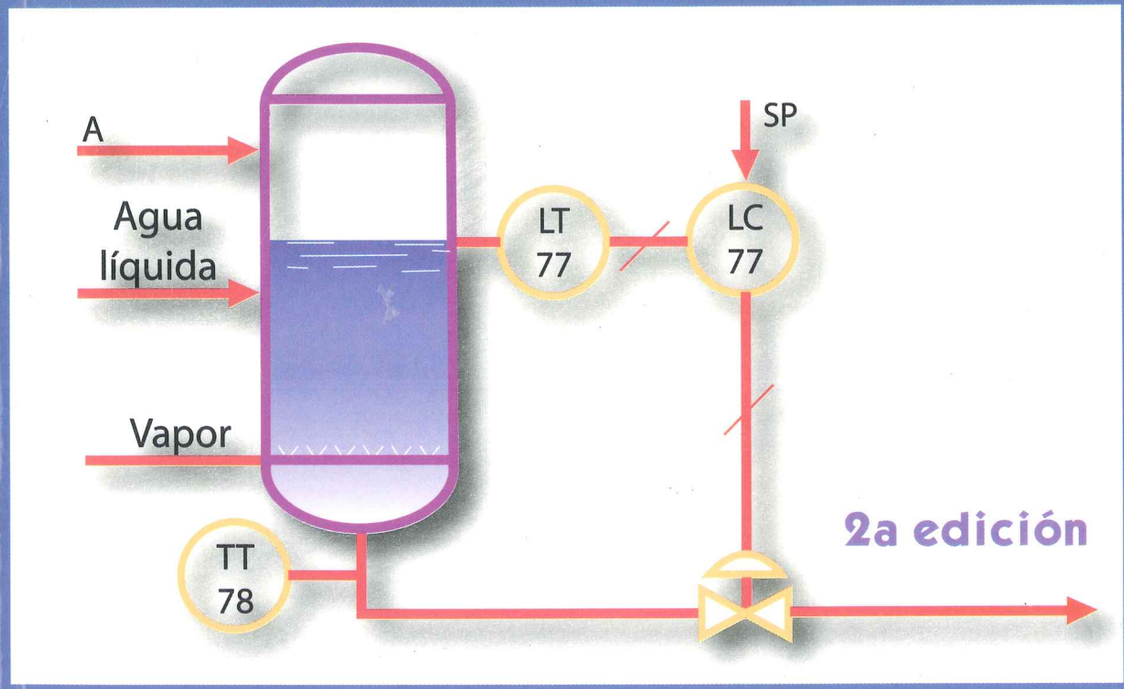
CONTROL AUTOMÁTICO DE PROCESOS Teoría y Práctica

LIMUSA

SMITH • CORRIPIO

CONTROL AUTOMÁTICO DE PROCESOS

Teoría y Práctica



2a edición

LIMUSA WILEY

Control automático de procesos
Teoría y práctica

Segunda edición en español

Carlos A. Smith, Ph.D., P.E.

Departamento de Ingeniería Química.
University of South Florida.

Armando B. Corripio, Ph.D., P.E.

Departamento de Ingeniería Química "Gordon A. and Mary Cain".
Louisiana State University

LIMUSA WILEY

Smith, Carlos A.
Control automático de procesos : Teoría y práctica /
Carlos A. Smith, Armando B. Corripio. -- 2a. ed. –
México : Limusa Wiley, 2014
xx; 766 pp.: il.; 23 x 17 cm.
ISBN: 978-607-05-0721-2
Rústica

1. Control de procesos químicos -- Automatización
I. Corripio, Armando B., cout.

Dewey: 660.281'5 I 22 / S6421c LC: TP155.75

VERSIÓN AUTORIZADA EN ESPAÑOL DE LA EDICIÓN EN INGLÉS, PUBLICADA CON EL TÍTULO:

PRINCIPLES AND PRACTICE OF AUTOMATIC PROCESS CONTROL
©JOHN WILEY & SONS, INC.

COLABORACIÓN EN LA TRADUCCIÓN:

MARCO E. SANJUÁN
INGENIERO MECÁNICO POR LA UNIVERSIDAD DEL NORTE, BARRANQUILLA, COLOMBIA.
MAESTRÍA Y PH. D. EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA POR LA UNIVERSITY OF SOUTH FLORIDA, TAMPA, FLORIDA.
PROFESOR Y DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA, UNVERSIDAD DEL NORTE, BARRANQUILA, COLOMBIA.

ALESSANDRO ANZALONE
INGENIERO QUÍMICO POR LA UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL POLITÉCNICA "ANTONIO JOSÉ DE SUCRE", BARQUISIMERO, VENEZUELA.
MAESTRÍA POR EL POLYTECHNIC INSTITUTE OF NEW YORK UNIVERSITY.
PH. D. EN INGENIERÍA QUÍMICA POR LA UNIVERSITY OF SOUTH FLORIDA, TAMPA, FLORIDA.
PROFESOR Y DIRECTOR DE INGENIERÍA QUÍMICA, DIRECTOR DE LA OFICINA DE INVESTIGACIÓN DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE PUERTO RICO, SAN JUAN PUERTO RICO.

DISEÑO DE PORTADA: FERNANDO RODRÍGUEZ SÁNCHEZ
DISEÑO DE INTERIORES: SERVICIOS CORPORATIVOS LIMUS, S.A. DE C.V.

LA PRESENTACIÓN Y DISPOSICIÓN EN CONJUNTO DE

CONTROL AUTOMÁTICO DE PROCESOS.
TEORÍA Y PRÁCTICA

SON PROPIEDAD DEL EDITOR. NINGUNA PARTE DE ESTA OBRA PUEDE SER REPRODUCIDA O TRANSMITIDA, MEDIANTE NINGÚN SISTEMA O MÉTODO, ELECTRÓNICO O MECÁNICO (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO, LA GRABACIÓN O CUALQUIER SISTEMA DE RECUPERACIÓN Y ALMACENAMIENTO DE INFORMACIÓN), SIN CONSENTIMIENTO POR ESCRITO DEL EDITOR.

DERECHOS RESERVADOS:

© 2014, EDITORIAL LIMUSA, S.A. DE C.V.
GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C.P. 06040
(55) 51 30 07 00
01 (800) 706 91 00
(55) 51 12 29 03
limusa@noriegaeditores.com
www.noriega.com.mx

CANIEM Núm. 121

SEGUNDA EDICIÓN EN ESPAÑOL

HECHO EN MÉXICO

ISBN: 978-607-05-0721-2

Este libro está dedicado con todo nuestro amor a Dios, nuestro Señor, que con sus bendiciones diarias lo ha hecho posible.

A los Smith:
Para la "nueva generación": Sophia Cristina y Steven Christopher Livingston; Carlos Alejandro y Nicolás Santos Smith.

Para la "vieja generación": Tim y Cristina Livingston; Carlos y Jennifer Smith.

Para la "generación más vieja": René y Terina Smith y familia, quienes siempre están dispuestos a ayudar.

y,

Para la "generación más querida": Mimi, con mi amor eterno y agradecimiento por ser lo mejor que me ha sucedido en la vida.

Para la nueva generación de los Corripio:
Nicholas, Robert, Garrett, David y Roman.

A la memoria de nuestro mentor, Charles E. Jones, Jr.

Y a nuestra querida patria, Cuba.

Prefacio

Esta nueva edición presenta algunos cambios, como la reorganización de material, nuevo material añadido y la eliminación de algunas partes. Sin embargo, el objetivo del libro continúa siendo el mismo: presentar los fundamentos de la teoría de control y la práctica del control automático de procesos.

CON ESTE LIBRO LOS ESTUDIANTES PODRÁN:

- Desarrollar modelos matemáticos de procesos dinámicos para el análisis, diseño y operación de sistemas de control.
- Entender cómo funcionan los componentes básicos de los sistemas de control.
- Diseñar y sintonizar controladores por retroalimentación.
- Aplicar diversas técnicas para mejorar el control por retroalimentación, entre las que se incluyen control en cascada, control de relación, control *override*, control selectivo, control *feedforward*, control multivariable e interacción entre lazos de control.
- Dominar los fundamentos de la simulación dinámica de los sistemas de control utilizando MATLAB^{MR} y Simulink^{MR}.

NUEVO EN ESTA EDICIÓN

- Se ha ampliado la exposición sobre el desarrollo de balances dinámicos (capítulo 3). Presentamos y explicamos cómo desarrollar modelos dinámicos para sistemas físicos relacionándolos con los balances de estado estacionario, que conocen bien los estudiantes. Esta presentación ayuda a familiarizar a los estudiantes con las ecuaciones diferenciales y aumenta su confianza.
- Se pone un mayor énfasis en la seguridad y la calidad del producto en los ejemplos y problemas, especialmente en los capítulos 9, 10 y 11 y en el apéndice E sobre estudios de casos operativos.
- En todo el libro se han integrado problemas y ejemplos de modelaje y simulación por computadora. Para una fácil identificación, los problemas que requieren simulación se identifican con el icono de una computadora.
- El capítulo 13 presenta la simulación dinámica, los principios de la simulación de procesos y los componentes de control y de instrumentación. La mayoría de los problemas al final de este capítulo proporcionan soluciones de simulación alternativas a los problemas identificados con el icono de una computadora a lo largo del libro.
- En el sitio del libro en la Red, el estudiante tiene a su disposición ejercicios de sintonización muy realistas (apéndice D).
- Una presentación sobre el diseño de los sistemas de control a nivel de planta (*plantwide control*) así como las instrucciones para su implementación con dos estudios de caso nuevos (capítulo 12 y apéndice B).
- Dos estudios de caso nuevos sobre diseño (apéndice B).

- Estudios de casos operativos (apéndice E).
- Una exposición más extensa sobre los sistemas de control distribuidos (DCS, por sus siglas en inglés) en el capítulo 10.
- El empleo de los símbolos recomendados por la Instrumentation, Systems and Automation Society (ISA) para diagramas conceptuales, los cuales eliminan la necesidad de diferenciar entre la instrumentación neumática, eléctrica o digital de los diversos esquemas de control.
- Se ha eliminado en esta edición el material sobre control de computadora (capítulos 14 y 15) que incluye la transformada *z*, controladores discretos y la estabilidad de los sistemas de control por muestreo porque se considera que son conceptos para un nivel superior.

Los cambios que hemos hecho en esta edición están más orientados a la práctica e implementación de estrategias de control en la gran mayoría de las industrias.

PRÁCTICAS PARA LA SINTONIZACIÓN DE CONTROLADORES

El apéndice D describe algunos procesos para practicar la sintonización de controladores por retroalimentación, controladores en cascada, controladores feedforward, y el apareamiento y sintonización de controladores en sistemas de control multivariable. Estas prácticas han sido utilizadas por los autores en cursos universitarios y en cursos especiales para ingenieros en la industria durante muchos años; las prácticas (Control Tuning Labs) están disponibles en el sitio del libro en la Red.

SIMULACIONES DINÁMICAS

La simulación dinámica de procesos es una técnica muy útil y realista para estudiar el comportamiento y desempeño de los sistemas de control de procesos. Muchos problemas en el libro están marcados con el icono de una computadora que indica que pueden resolverse por medio de la simulación.

En el capítulo 13 se explica cómo desarrollar simulaciones dinámicas con base en la técnica de modelaje dinámico desarrollada en los capítulos 3 y 4, y en los modelos de instrumentación desarrollados en el capítulo 5.

Se presentan dos métodos:

- Simulaciones de sistemas lineales utilizando la representación de funciones de transferencia.
- Simulación de sistemas de control utilizando modelos basados en principios físicos.

Los ejemplos que se presentan utilizan el programa Simulink^{MR} que forma parte de MATLAB^{MR} porque es uno de los programas de simulación en bloque más poderosos, comúnmente disponible para estudiantes e ingenieros. Todas las simulaciones en el libro, así como otras en las que hemos utilizado VisSim^{MR}, están disponibles en el sitio del libro en la Internet.

ORGANIZACIÓN DEL CONTENIDO

El capítulo 1 explica cómo surge la necesidad del control automático de procesos, así como las definiciones de algunos términos usados en el campo y los conceptos de control por retroalimentación y control feedforward, sus ventajas y desventajas.

El capítulo 2 presenta las herramientas matemáticas usadas en el análisis y diseño de los sistemas de control de procesos, la transformada de Laplace y la linealización. Se hace énfasis en la determinación de las características cuantitativas de la respuesta de los procesos –tiempo de asentamiento, frecuencia de oscilación y razón de amortiguamiento– en vez de en la determinación exacta de la respuesta analítica. Este enfoque permite al estudiante analizar la respuesta de los sistemas dinámicos sin tener que llevar a cabo la tediosa evaluación de los coeficientes mediante la expansión en fracciones parciales. El capítulo también presenta las respuestas de los sistemas de primer orden, segundo orden y de orden superior.

Los capítulos 3 y 4 presentan el área general de la dinámica de procesos. La práctica del control automático de procesos requiere, antes que nada, una comprensión cabal del comportamiento dinámico y de estado estacionario de los procesos; *éste es el primer objetivo de estos capítulos.* El desarrollo de los modelos matemáticos dinámicos de procesos –modelaje— es una herramienta importante para el análisis, diseño y operación de los sistemas de control; *el modelaje es el segundo objetivo de los capítulos 3 y 4.* Se ha añadido a este capítulo una sección donde se demuestra a los estudiantes que el desarrollo de los modelos dinámicos o de estado no estacionario se basa en los balances de estado estacionario que ya han aprendido anteriormente en el curso de su formación como ingenieros. El desarrollo de estos modelos requiere el uso de todos los aspectos de la ingeniería de procesos.

El capítulo 5 hace una breve presentación sobre sensores, transmisores y válvulas de control, y una presentación muy detallada sobre los controladores por retroalimentación. Este capítulo se debe estudiar en conjunto con el apéndice C, donde se presentan los principios de operación de los sensores, transmisores y válvulas de control más comunes.

Los capítulos 6 y 7 presentan el diseño y la sintonización de los controladores por retroalimentación. El capítulo 6 también hace un análisis de la estabilidad de los lazos de control por retroalimentación. Recalcamos el método de sustitución directa para determinar la ganancia última y el periodo último del lazo. Manteniendo el mismo espíritu del capítulo 2, los ejemplos y problemas están relacionados con la determinación de las características de la respuesta del lazo, y no con la respuesta analítica exacta. En varios ejemplos y problemas se emplea la simulación.

El capítulo 8 hace una breve introducción a la técnica del lugar de las raíces y una presentación detallada de la técnica de respuesta de frecuencia así como su uso para el análisis y estudio de la estabilidad en los sistemas de control.

Los capítulos 9 a 12 examinan a detalle varias técnicas de control que complementan y optimizan el control por retroalimentación. El capítulo 9 ofrece una descripción detallada del control en cascada, la cual incluye consideraciones de estabilidad, la sintonización del controlador maestro y consideraciones para su implementación efectiva y exitosa. Esta técnica de control se utiliza muy a menudo como parte de otras estrategias.

El capítulo 10 presenta las estrategias de control de relación, control *override* (o sobremando) y control selectivo; todas estas estrategias se presentan utilizando ejemplos industriales.

Este capítulo establece con claridad que el control override y el control selectivo se utilizan comúnmente como estrategias de protección para mantener las variables del proceso dentro de los límites *para garantizar la seguridad del personal y del equipo, así como la calidad del producto.* También se presenta un ejemplo de control de relación para demostrar los aspectos de la seguridad de un proceso de combustión. Todos los ejemplos al final del capítulo son resultado de nuestra experiencia en la industria. También se presentan en este capítulo los sistemas de control distribuidos (DCS, por sus siglas en inglés) y las diferentes maneras de programarlos o configurarlos.

El capítulo 11 presenta un análisis completo del control feedforward. Contiene una explicación detallada de los controladores feedforward lineales y no lineales. Incluye muchos ejemplos de procesos industriales donde esta estrategia ha sido exitosa.

El capítulo 12 presenta los temas de control multivariable y la interacción del lazo de control. La presentación sobre el cálculo de la matriz de ganancias relativas (RGM, por sus siglas en inglés) y el diseño de desacopladores es igual a la exposición presentada en la edición anterior. La sección 12-6 es nueva y plantea la necesidad del *control a nivel de planta*; aquí se describen algunos lineamientos cuyo objetivo es reducir la tarea del diseño de sistemas de control a nivel de planta. En al apéndice B se describen algunos procesos más para llevar a la práctica estos lineamientos en el diseño de sistemas de control de un proceso completo.

El capítulo 13 presenta los fundamentos de la simulación dinámica de los sistemas de control de procesos utilizando MATLAB. Se presentan dos métodos diferentes: la simulación de las funciones de transferencia lineales de procesos y controladores, y la simulación más básica de los modelos matemáticos de procesos en el dominio del tiempo. Este último método enfatiza la importancia de usar las condiciones iniciales correctas para que la respuesta de proceso comience en estado estacionario. Muchos profesores de control automático de procesos utilizan el curso como un oportunidad para enseñar a los estudiantes las elegantes e interesantes manipulaciones algebraicas que el uso de la transformada de Laplace nos ofrece, pero muchos otros prefieren concentrarse en los aspectos, igualmente interesantes, del análisis y diseño de los sistemas de control, evitando el álgebra. Probablemente los profesores del segundo grupo prefieran presentar primero el capítulo 13 y utilizar luego la simulación en vez del álgebra para estudiar la respuesta de los procesos de los capítulos 3 y 4, y de los sistemas de control de los capítulos 7, 10, 11 y 12. Para facilitar este enfoque, los ejemplos y problemas en el capítulo 13 tienen como base la simulación de procesos en los ejemplos y problemas de todo el libro. Todas estas simulaciones están disponibles en el sitio del libro en la Red.

Al igual que en la edición anterior, el apéndice A presenta los símbolos y nomenclatura que se utilizan comúnmente en la instrumentación y en los diagramas de control. En este libro empleamos los símbolos recomendados por la Instrumentation Society of America (ISA) para los diagramas conceptuales, evitando de esta manera diferenciar entre las aplicaciones de sistemas neumáticos, eléctricos y basados en computadora de los diferentes esquemas de control. Por lo tanto, todas las señales relacionadas con la instrumentación se expresan en porcentaje del rango en vez de en mA o psig.

El apéndice B continúa con el tema del *control a nivel de planta* que se aborda en la sección 12-6. El apéndice comienza con un ejemplo donde se detalla la puesta en práctica de los

criterios que se describen en la sección 12-6; enseguida se exponen varios estudios de caso para practicar el diseño de sistemas de control para procesos completos.

El apéndice D así como el sitio del libro en la Red presentan diversos procesos para practicar las técnicas descritas en los capítulos 7, 9, 11 y 12; es decir, ejemplos para sintonizar controladores por retroalimentación, controladores en cascada, controladores feedforward y las técnicas de control multivariable. Estas prácticas, desarrolladas con LabVIEW^{MR}, están disponibles en el sitio del libro en la Red.

El apéndice E presenta cinco casos que integran el material presentado en los capítulos 5, 6 y 7. Estos casos están escritos para reflejar una situación industrial a la que pudiera enfrentarse un joven ingeniero.

RECURSOS DISPONIBLES PARA EL ESTUDIANTE

Los estudiantes que adquieran este libro tienen a su disposición los siguientes recursos en la dirección www.noriegadigital.com.

- **Simulaciones:** simulaciones de los ejemplos en el libro y otras utilizando VisSim^{MR}.
- **Prácticas para la sintonización de controladores (*Control Tuning Labs*):** los autores han desarrollado varios procesos (descritos en el apéndice D) para practicar la sintonización de controladores por retroalimentación, controladores en cascada, controladores feedforward, y el apareamiento y la sintonización de controladores en un sistema multivariable. Estas prácticas han sido utilizadas por los autores durante muchos años en cursos universitarios y de capacitación para ingenieros en la industria. Fueron desarrolladas utilizando LabVIEW^{MR}, un producto de National Instruments^{MR}.

El sitio del libro en la Red ofrece un LabVIEW Player^{MR} gratuitamente para que los estudiantes puedan visualizar las prácticas.

RECURSOS DISPONIBLES PARA LOS PROFESORES

Todas las simulaciones del libro, los ejemplos y soluciones de los problemas, al igual que las simulaciones que utilizan VisSim^{MR} están disponibles en el sitio del libro en la Red.

Asimismo, los profesores que adopten este libro para sus cursos tienen a su disposición:

- **Manual de soluciones**
- **Galería de imágenes con las figuras del texto**
- **Ilustraciones del texto en formato PowerPoint**
- **Prácticas para la sintonización de controladores (*Control Tuning Labs*)**

Estos recursos están protegidos. Visite el sitio del libro en la Red para registrarse y obtener un *password* para acceder a estos recursos.

AGRADECIMIENTOS

Al escribir esta edición tuvimos mucha suerte de contar con la ayuda y el estímulo de muchas personas maravillosas.

CAS agradece profundamente su amistad al Dr. Marco E. Sanjuan, de la Universidad del Norte, en Barranquilla, Colombia. El Dr. Sanjuan es autor del apéndice E y coautor, con el Dr. Daniel Palomares, Q.E.P.D., del apéndice D. El Dr. Sanjuan llegó a la University of South Florida como un estudiante de doctorado; durante su paso por esta institución fue un modelo para todos los estudiantes, incluso para su tutor, quien hoy en día es su amigo y alumno.

CAS también agradece a Renee Dockendorf su ayuda en el desarrollo de los nuevos estudios de caso, así como al Dr. Russ Smith, de la Dow Chemical Company, por sus comentarios y aportación en varios capítulos y apéndices.

ABC nunca olvidará la ayuda y el estímulo de sus alumnos, en especial de Olufemi Adebiyi y Craig Plaisance. Mientras trabajaba en un proyecto para un curso, Craig desarrolló la simulación simple del módulo proporcional-derivativo que se muestra en la sección 13-4, y al hacer esto enseñó a su profesor.

Asimismo, los autores estamos profundamente agradecidos con el Dr. Marco E. Sanjuan y el Dr. Alessandro Anzalone por su esfuerzo y dedicación para llevar a cabo la traducción al español de este libro.

También agradecemos a las siguientes personas por sus comentarios y estímulo durante la preparación del manuscrito para esta nueva edición.

D. John Griffith, Jr., McNeese State University
Ted Huddleston, University of South Alabama
Franklin G. King, North Carolina A&T State University
Michael V. Minnick, West Virginia University Institute of Technology
James M. Munro, South Dakota School of Mines and Technology
Laurent Simon, New Jersey Institute of Technology
Massoud Soroush, Drexel University
Marvin Stone, Oklahoma State University
Don H. Weinkauf, New Mexico Institute of Mining and Technology
Richard L. Zollars, Washington State University

En el prefacio de la edición anterior escribimos, "*Ser el instrumento para la preparación y el desarrollo de las mentes jóvenes en verdad es una labor muy gratificante*". Seguimos convencidos de ello y nos sentimos bendecidos por estar en posibilidad de seguir haciéndolo. Ésta sigue siendo la meta de esta nueva edición.

Carlos A. Smith, Ph.D., P.E.
Tampa, Florida

Armando B. Corripio, Ph.D., P.E
Baton Rouge, Louisiana.

Contenido

1. Introducción 1

1-1 Un sistema de control de procesos 1
1-2 Términos importantes y objetivo del control automático de procesos 4
1-3 Control regulatorio y servocontrol 5
1-4 Señales de transmisión, sistemas de control y otros términos 5
1-5 Estrategias de control 6
1-5.1 Control por retroalimentación 6
1-5.2 Control feedforward 8
1-6 Bases necesarias para el control de procesos 10
1-7 Resumen 11
Problemas 11

2 Matemáticas necesarias para el análisis de sistemas de control 13

2-1 La transformada de Laplace 14
2-1.1 Definición de la transformada de Laplace 14
2-1.2 Propiedades de la transformada de Laplace 17
2-2 Solución de ecuaciones diferenciales mediante la transformada de Laplace 23
2-2.1 Procedimiento de solución por la transformada de Laplace 23
2-2.2 Inversión mediante expansión en fracciones parciales 25
2-2.3 Tiempo muerto 30
2-3 Caracterización de la respuesta del proceso 33
2-3.1 Variables de desviación 33
2-3.2 Respuesta de la salida 35
2-3.3 Estabilidad 43
2-4 Respuesta de sistemas de primer orden 43
2-4.1 Respuesta escalón 45
2-4.2 Respuesta rampa 46
2-4.3 Respuesta sinusoidal 47
2-4.4 Respuesta con retardo 49
2-4.5 Respuesta de una unidad de adelanto/atraso 50
2-5 Respuesta de sistemas de segundo orden 52
2-5.1 Respuestas sobreamortiguadas 55
2-5.2 Respuestas subamortiguadas 58
2-5.3 Respuestas de orden superior 62
2-6 Linealización 64
2-6.1 Linealización de funciones de una variable 66
2-6.2 Linealización de funciones de dos o más variables 68

2-6.3 Linealización de ecuaciones diferenciales 70
Resumen 73
Problemas 74

3. Sistemas dinámicos de primer orden 81

3-1 Procesos y la importancia de sus características 81
3-2 Modelaje matemático de procesos 84
3-3 Ejemplo de un proceso térmico 88
3-4 Tiempo muerto 99
3-5 Funciones de transferencia y diagramas de bloques 102
3-5.1 Funciones de transferencia 102
3-5.2 Diagramas de bloques 104
3-6 Ejemplo de un proceso de gas 112
3-7 Reactores químicos 118
3-7.1 Notas introductorias 118
3-7.2 Ejemplo de un reactor químico 120
3-8 Efectos de las no linealidades en los procesos 124
3-9 Comentarios adicionales 127
3-10 Resumen 130
Problemas 131

4. Sistemas dinámicos de orden superior 149

4-1 Sistemas no interactivos 149
4-1.1 Proceso de nivel no interactivo 149
4-1.2 Tanques térmicos en serie 157
4-2 Sistemas interactivos 160
4-2.1 Proceso de nivel interactivo 161
4-2.2 Tanques térmicos con reciclado 167
4-2.3 Reacción química no isotérmica 170
4-3 Respuesta de los sistemas de orden superior 183
4-4 Otros tipos de respuestas de procesos 186
4-4.1 Procesos integrantes: proceso de nivel 186
4-4.2 Proceso inestable de lazo abierto: reactor químico 191
4-4.3 Procesos de respuesta inversa: reactor químico 198
4-5 Resumen 200
4-6 Repaso de los capítulos 3 y 4 201
Problemas 202

5. Componentes básicos de los sistemas de control 215

5-1 Sensores y transmisores 215
5-2 Válvulas de control 218

5-2.1 El actuador de la válvula de control 218
5-2.2 Capacidad y dimensionamiento de la válvula de control 221
5-2.3 Características de la válvula de control 228
5-2.4 Ganancia y función de transferencia de la válvula de control 235
5-2.5 Resumen de la válvula de control 240
5-3 Controladores por retroalimentación 240
5-3.1 Acción del controlador 241
5-3.2 Tipos de controladores por retroalimentación 242
5-3.3 Modificaciones al controlador PID y comentarios adicionales 256
5-3.4 Saturación de la integral y su prevención 260
5-3.5 Resumen de los controladores por retroalimentación 263
5-4 Resumen 263
Problemas 264

6. Diseño de sistemas de control de procesos de lazo simple 273

6-1 El lazo de control por retroalimentación 273
6-1.1 Función de transferencia de lazo cerrado 276
6-1.2 Ecuación característica del lazo 284
6-1.3 Respuesta de lazo cerrado de estado estacionario 291
6-2 Estabilidad del lazo de control 295
6-2.1 Criterio de estabilidad 295
6-2.2 Método de sustitución directa 297
6-2.3 Efecto de los parámetros del lazo sobre la ganancia última y el periodo último 301
6-2.4 Efecto del tiempo muerto 304
6-2.5 Resumen de los ejemplos 305
6-3 Resumen 306
Problemas 306

7. Sintonización de los controladores por retroalimentación 321

7-1 Respuesta con razón de asentamiento de un cuarto por el método de la ganancia última 322
7-2 Caracterización de procesos de lazo abierto 328
7-2.1 Prueba escalón de un proceso 330
7-2.2 Sintonización para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto 339
7-2.3 Sintonización para criterios de la integral mínima del error 342
7-2.4 Sintonización de controladores por muestreo de datos 349
7-2.5 Resumen de sintonización de controladores 350
7-3 Sintonización de controladores para procesos integrantes 351
7-3.1 Modelo de un sistema de control de nivel de líquido 351
7-3.2 Controlador de nivel proporcional 354

7-3.3 Control de nivel promedio 357
7-3.4 Resumen de sintonización de procesos integrantes 359
7-4 Síntesis de controladores por retroalimentación 360
7-4.1 Desarrollo de la fórmula de síntesis del controlador 360
7-4.2 Especificación de la respuesta de lazo cerrado 361
7-4.3 Modos del controlador y parámetros de sintonización 362
7-4.4 Resumen de resultados de la síntesis del controlador 367
7-4.5 Reglas de sintonización por control de modelo interno (IMC) 370
7-5 Sugerencias para sintonizar controladores por retroalimentación 372
7-5.1 Estimación de los tiempos integral y derivativo 373
7-5.2 Ajuste de la ganancia proporcional 375
7-6 Resumen 376
Problemas 377

8. Técnicas del lugar de la raíces y de la respuesta de frecuencia 393

8-1 Algunas definiciones 393
8-2 Análisis de sistemas de control por retroalimentación mediante el lugar de las raíces 395
8-3 Graficación de diagramas del lugar de las raíces 399
8-4 Análisis de sistemas de control usando respuesta de frecuencia 401
8-4.1 Gráficas de Bode 411
8-4.2 Criterio de estabilidad usando la respuesta de frecuencia 421
8-5 Resumen 431
Problemas 431

9. Control en cascada 437

9-1 Ejemplo de un proceso 438
9-2 Consideraciones de estabilidad 441
9-3 Implementación y sintonización de controladores 443
9-3.1 Sistemas en cascada de dos niveles 444
9-3.2 Sistemas en cascada de tres niveles 447
9-4 Otros ejemplos de procesos 448
9-5 Comentarios finales 450
9-6 Resumen 452
Problemas 452

10. Control de relación, control override y control selectivo 459

10-1 Señales, software y algoritmos de cálculo 459
10-1.1 Señales 460
10-1.2 Programación 461
10-1.3 Algoritmos para calcular escalamientos 466

10-2 Control de relación 467
10-3 Control override o de restricción 476
10-4 Control selectivo 481
10-5 Diseño de sistemas de control 485
10-6 Resumen 500
Problemas 501

11. Control feedforward 521

11-1 El concepto de feedforward 521
11-2 Diseño de controladores feedforward lineales usando diagramas de bloques 524
11-3 El elemento de adelanto-atraso 534
11-4 Regresando al ejemplo anterior 537
11-5 Diseño de controladores feedforward no lineales a partir de principios básicos de procesos 542
11-6 Algunos comentarios finales y resumen del diseño de los controladores feedforward 546
11-7 Otros tres ejemplos 549
11-8 Resumen 558
Problemas 559

12. Control de procesos multivariable 569

12-1 Interacción del lazo 569
12-2 Apareamiento de las variables controlada y manipulada 575
12-2.1 Cálculo de las ganancias relativas para un sistema 2×2 579
12-2.2 Cálculo de las ganancias relativas para un sistema $n \times n$ 586
12.3 Desacoplamiento de lazos interactivos 590
12-3.1 Diseño de desacopladores a partir de diagramas de bloques 590
12-3.2 Diseño de desacopladores para sistemas $n \times n$ 599
12-3.3 Diseño de desacopladores a partir de principios básicos 603
12-4 Control multivariable contra optimización 606
12-5 Análisis dinámico de sistemas multivariables 607
12-5.1 Análisis dinámico de un sistema 2×2 607
12-5.2 Sintonización de controladores para sistemas interactivos 611
12-6 Diseño de sistemas de control a nivel de planta 613
12-7 Resumen 620
Problemas 621

13. Simulación dinámica de sistemas de control 627

13-1 Usos y herramientas de la simulación dinámica 628
13-1.1 Usos de la simulación dinámica 628
13-1.2 Herramientas para la simulación dinámica 628

13-2 Simulación de funciones de transferencia lineales 630
13-3 Simulación de procesos 634
13-4 Simulación de la instrumentación de control 642
13-4.1 Simulación de válvulas de control 643
13-4.2 Simulación de controladores por retroalimentación 646
13-4.3 Simulación de sensores-transmisores 651
13-4.4 Simulación de compensación dinámica utilizando adelanto-atraso 653
13-5 Otros aspectos sobre simulación 660
13-6 Resumen 670
Problemas 670

A. Símbolos y nomenclatura empleados para la instrumentación 681

B. Diseño: estudio de casos 689

Caso 1. Proceso de síntesis de metanol 696
Caso 2. Proceso de hidrocarburo 698
Caso 3. Proceso de ácidos grasos 699
Caso 4. Sistemas de control en el proceso de refinación del azúcar 701
Caso 5. Proceso del ácido sulfúrico 702
Caso 6. Sistema de control para una planta de granulación de nitrato de amonio 704
Caso 7. Sistema de control para la deshidratación de gas natural 705

C. Sensores, transmisores y válvulas de control 707

C-1 Sensores de presión 707
C-2 Sensores de flujo 708
C-3 Sensores de nivel 712
C-4 Sensores de temperatura 714
C-5 Sensores de composición 717
C-6 Transmisores 717
C-6.1 Transmisores neumáticos 717
C-6.2 Transmisores electrónicos 719
C-7 Tipos de válvulas de control 720
C-7.1 Vástago recíproco 720
C-7.2 Vástago rotatorio 724
C-8 Actuadores de la válvula de control 724
C-8.1 Actuadores de diafragma con operación neumática 724
C-8.2 Actuadores de pistón 724
C-8.3 Actuadores electrohidráulicos y electromecánicos 725
C-8.4 Actuadores manuales con volante 725

C-9 Accesorios de la válvula de control 726
C-9.1 Posicionadores 726
C-9.2 Multiplicadores 727
C-9.3 Interruptores de límite 727
C-10 Válvulas de control: consideraciones adicionales 727
C-10.1 Correcciones de viscosidad 728
C-10.2 Vaporización instantánea y cavitación 728
C-11 Resumen 732

D. Sintonización: estudios de caso 735

Proceso 1. Regenerador–control por retroalimentación 736
Proceso 2. Regenerador–control en cascada 737
Proceso 3. Proceso de secado de papel 738
Proceso 4. Absorbedor de HCl 740
Proceso 5. Proceso de mezclado 743
Proceso 6. Proceso del reactor 744
Proceso 7. Proceso de destilación 744

E. Estudio de casos operativos 747

Estudio de caso operativo 1: Absorbedor de HCl 747
Estudio de caso operativo 2: Unidad de tratamiento de aguas 750
Estudio de caso operativo 3: Regenerador catalítico 752
Estudio de caso operativo 4: Costillitas 754
Estudio de caso operativo 5: Unidad de secado de papel 756

Índice 759

Capítulo 1

Introducción

El propósito de este capítulo es mostrar al lector la necesidad del control automático de procesos y motivarlo a estudiar este tema. El control automático de procesos se ocupa de mantener en un valor de operación deseado las variables del proceso tales como temperaturas, presiones, flujos, compuestos y similares. Como se verá, los procesos son dinámicos por naturaleza. Siempre ocurren cambios, y si no se responde a ellos con las acciones pertinentes, las variables importantes de proceso —las relacionadas con la seguridad, la calidad del producto y los índices de producción— no cumplirán con las condiciones deseadas.

En este capítulo también se presentan dos sistemas de control, se examinan algunos de sus componentes y se definen algunos términos utilizados en el campo del control de procesos. Finalmente, se exponen las bases necesarias para el estudio del control de procesos.

Al escribir este libro hemos sido conscientes constantemente que para ser exitoso, el ingeniero debe ser capaz de aplicar los principios que aprendió. Por consiguiente, el libro aborda los principios que soportan la práctica exitosa del control automático de procesos. El libro incluye numerosos casos reales tomados de nuestros años de experiencia industrial como ingenieros de planta o consultores. Es nuestro sincero deseo despertar en el lector el interés por estudiar el control automático de procesos. Es un área de la ingeniería de procesos muy dinámica, llena de retos y recompensas.

1-1 UN SISTEMA DE CONTROL DE PROCESOS

Para ilustrar el control de procesos se considera un intercambiador de calor en el que se calienta una corriente mediante la condensación de vapor, como se ilustra en la figura 1-1.1. El propósito de esta unidad es calentar el fluido del proceso desde una temperatura de entrada $T_i(t)$ hasta una cierta temperatura de salida deseada $T(t)$. La energía ganada por el fluido del proceso es suministrada por el calor latente de la condensación del vapor.

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

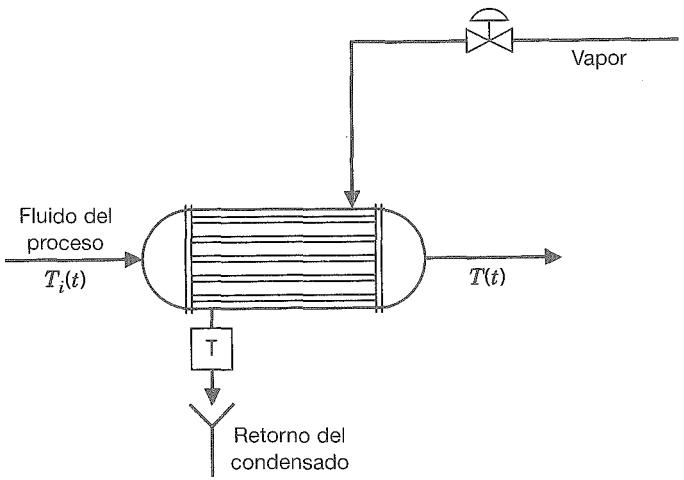


Figura 1-1.1 Intercambiador de calor.

En este proceso hay muchas variables que pueden cambiar, haciendo que la temperatura de salida se desvíe del valor deseado. Si esto ocurre, se debe tomar alguna acción para corregir la desviación. El objetivo es mantener la temperatura de salida del proceso en el valor deseado.

Una manera de lograr este objetivo es medir primero la temperatura $T(t)$, compararla con el valor deseado y, con base en esta comparación, decidir qué hacer para corregir cualquier desviación. La válvula de vapor puede manipularse para corregir cualquier desviación. Es decir, si la temperatura está por encima del valor deseado, la válvula puede cerrarse un poco para reducir el flujo de vapor (energía) que llega al intercambiador de calor. Si la temperatura se encuentra por debajo del valor deseado, la válvula se debe abrir más para incrementar el flujo de vapor al intercambiador. Todo esto puede llevarlo a cabo el operador manualmente, y como el procedimiento es bastante simple, no debería presentar problemas. Sin embargo, hay varios problemas con este *control manual*. Primero, la tarea requiere que el operador esté observando constantemente la temperatura para tomar la acción correctiva cuando se desvíe del valor deseado. Segundo, diferentes operadores tomarían diferentes decisiones sobre cómo mover la válvula de vapor, ocasionando una operación poco consistente. Tercero, debido a que en la mayoría de las plantas de proceso hay cientos de variables que deben mantenerse en algún valor deseado, este procedimiento de corrección requeriría una gran cantidad de operadores. En consecuencia, resultaría conveniente lograr este control automáticamente. Es decir, sería conveniente contar con sistemas que controlen las variables sin requerir la intervención del operador. Esto es lo que se entiende por *control automático de procesos*.

Para lograr el control automático de procesos se requiere del diseño e implementación de un *sistema de control*. La figura 1-1.2 muestra un posible sistema de control y sus componentes básicos. (El apéndice A presenta los símbolos e identificaciones para los diferentes dispositivos.) Lo primero que se debe hacer es medir la temperatura de salida de la corriente del proceso. Esto se logra con un *sensor* (termopar, dispositivo de resistencia térmica, termómetro de inmersión, termistor o similares). Por lo general, este sensor está conectado físicamente a un *transmisor*, el cual toma la salida del sensor y la convierte en una señal con la suficiente intensidad para

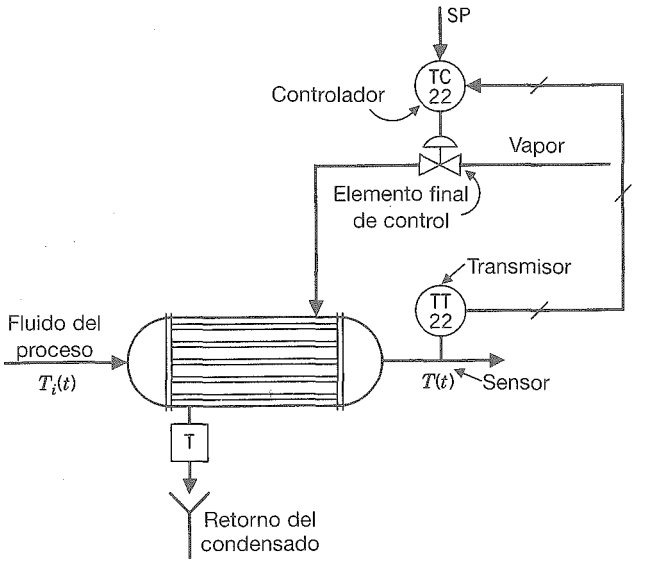


Figura 1-1.2 Lazo de control del intercambiador de calor.

transmitirla al *controlador*. Entonces el controlador recibe la señal, la cual está relacionada con la temperatura, y la compara con el valor deseado. Dependiendo del resultado de esta comparación, el controlador decide qué hacer para mantener la temperatura en el valor deseado. Con base en esta decisión, el controlador envía una señal al *elemento final de control*, el cual a su vez manipula el flujo de vapor. Este tipo de estrategia de control se conoce como *control por retroalimentación.*

En el párrafo anterior se presentan los tres componentes básicos de todo sistema de control. Éstos son:

1. ***Sensor-transmisor.*** También llamados con frecuencia los elementos primario y secundario.
2. ***Controlador.*** El "cerebro" del sistema de control.
3. ***Elemento final de control.*** Por lo general una válvula de control, pero no siempre. Otros elementos finales de control comunes son bombas de velocidad variable, bandas transportadoras, motores eléctricos y calentadores eléctricos.

La importancia de estos componentes radica en que realizan las tres operaciones básicas que *deben* estar presentes en *todo* sistema de control. Estas operaciones son:

1. ***Medición (M).*** La medición de la variable por controlar se realiza, en general, con la combinación de un sensor y un transmisor. En algunos sistemas la señal del sensor se puede alimentar directamente al controlador y no se necesita un transmisor.
2. ***Decisión (D).*** Con base en la medición, el controlador decide qué hacer para mantener la variable en el valor deseado.

3. *Acción (A).* Como resultado de la decisión del controlador, el sistema debe entonces realizar una acción. Esta acción por lo general la realiza el elemento final de control.

Estas tres operaciones, M, D y A, están siempre presentes en cualquier tipo de sistema de control y es *imperativo* que estén en un lazo. Es decir, la decisión se toma con base en la medición y la acción se implementa con base en la decisión. *La acción ejecutada debe afectar la medición, de otra manera hay una falla importante en el diseño y no se logrará el control.* Cuando la acción tomada no afecta la medición, se dice que existe una condición de lazo abierto y no se logrará el control. La toma de decisiones en algunos sistemas es bastante simple, mientras que en otros es más compleja. Varios de estos sistemas se examinarán en este libro.

1-2 TÉRMINOS IMPORTANTES Y OBJETIVO DEL CONTROL AUTOMÁTICO DE PROCESOS

En este momento se hace necesario definir algunos términos utilizados en el campo del control automático de procesos. La *variable controlada* es la variable que debe mantenerse, o controlarse, en un valor deseado. En nuestro ejemplo del intercambiador de calor, la temperatura de salida del proceso, $T(t)$, es la variable controlada. Algunas veces se utiliza el término *variable del proceso* para referirse a la variable controlada. La *referencia* o *set point* (SP) es el valor deseado de la variable controlada. Por tanto, la tarea de un sistema de control es mantener la variable controlada en su referencia o set point. La *variable manipulada* es la variable utilizada para mantener la variable controlada en su referencia o set point. En el ejemplo, la posición de la válvula de vapor es la variable manipulada. Finalmente, cualquier variable que haga que la variable controlada se desvíe de su referencia se conoce como *perturbación*. En la mayoría de los procesos hay un número importante de perturbaciones. En el intercambiador de calor mostrado en la figura 1-1.2 son perturbaciones posibles: la temperatura de entrada al proceso, $T_i(t)$, el flujo del proceso, $f(t)$, el contenido de energía en el vapor, las condiciones ambientales, la composición del fluido del proceso, la contaminación, etcétera. Es importante entender que siempre ocurren perturbaciones en los procesos. El estado estacionario no es lo más frecuente y las condiciones transitorias son muy comunes. Es a causa de estas perturbaciones que se requiere el control automático de procesos. Si no hubiera perturbaciones, las condiciones de diseño prevalecerían y no habría necesidad de "monitorear" continuamente el proceso.

Los siguientes términos también son importantes. *Control manual* es la condición en la que el controlador está desconectado del proceso. Es decir, el controlador no está tomando la decisión de cómo mantener la variable controlada en la referencia. Depende del operador manipular la señal que llega al elemento final de control para mantener la variable controlada en la referencia. *Control de lazo cerrado* es la condición en que el controlador está conectado al proceso y compara la referencia con la variable controlada a fin de determinar y tomar la acción correctiva pertinente.

Ahora que se han definido estos términos, es posible expresar formalmente el objetivo del control automático de procesos: *el objetivo de un sistema de control automático de procesos es ajustar la variable manipulada para mantener la variable controlada en su referencia a pesar de las perturbaciones.*

El control es importante por muchas razones. Las que siguen no son las únicas, pero sentimos que son las más importantes. Estas razones se basan en nuestra experiencia en la industria y nos gustaría difundirlas. El control es importante para:

1. Prevenir accidentes entre el personal de planta, proteger el medio ambiente previniendo emisiones y minimizando desperdicios, y prevenir daños en el equipo de proceso. La *SEGURIDAD* debe estar siempre en nuestra mente, es la consideración más importante.
2. Mantener la calidad del producto (composición, pureza, color, etc.) de manera continua y con costo mínimo.
3. Mantener el índice de producción de la planta en un costo mínimo.

Por lo tanto, los procesos se automatizan para proveer un ambiente seguro y a la vez mantener la calidad deseada del producto, un alto volumen de producción y una demanda reducida de mano de obra.

1-3 CONTROL REGULATORIO Y SERVOCONTROL

En algunos procesos la variable controlada se desvía de la referencia debido a perturbaciones. *Control regulatorio* se refiere a los sistemas diseñados para compensar estas perturbaciones. En otros casos, la perturbación más importante es la propia referencia. Es decir, la referencia puede cambiarse en función del tiempo (un caso típico lo constituyen los reactores por lotes, donde la temperatura debe seguir un perfil deseado), y por lo tanto, la variable controlada debe seguir a la referencia. *Servocontrol* se refiere a los sistemas de control diseñados con este propósito.

El control regulatorio es mucho más común que el servocontrol en los procesos industriales. Sin embargo, se utiliza el mismo enfoque básico al diseñarlos. Por lo tanto, los principios aprendidos en este libro se aplican a ambos casos.

1-4 SEÑALES DE TRANSMISIÓN, SISTEMAS DE CONTROL Y OTROS TÉRMINOS

Existen tres tipos principales de señales en uso en los procesos industriales. La *señal neumática,* o presión de aire, varía normalmente entre 3 y 15 psig. La representación usual para las señales neumáticas en diagramas de instrumentos y tubería (P&ID) es —//——//——//—. La *señal eléctrica* varía normalmente entre 4 y 20 mA. Con menos frecuencia se utilizan señales de 10 a 50 mA, de 1 a 5 V, o de 0 a 10 V. La representación usual para esta señal en P&ID es una serie de líneas discontinuas — — — — — — — — . El tercer tipo de señal es la *señal digital,* o *discreta* (ceros y unos); una representación común es O—O—O—. En este libro las señales se indican con —//— (como se muestra en la figura 1-1.2), que es la representación propuesta por la Instrumentation Society of America (ISA) cuando se muestra un concepto de control sin prestar atención al equipo específico utilizado. Se le recomienda al lector que revise el apéndice A, donde se presentan diferentes símbolos y nomenclatura. La mayoría de las veces se hará referencia a las señales en porcentaje, de 0% a 100%, por oposición a psig o mA. Es decir, 0-100% es equivalente a 3-15 psig o 4-20 mA.

Advertir que las señales son utilizadas por dispositivos —transmisores, controladores, elementos finales de control y similares— para comunicarse, ayuda en el entendimiento de los sistemas de control. Es decir, las señales se utilizan para *transmitir información.* La señal del transmisor al controlador se utiliza para que el transmisor le informe al controlador el valor de la variable controlada. La señal no es la medición en unidades de ingeniería sino una señal en mA, psig, volts o en cualquier otra unidad que sea proporcional a la medición. La relación con la medición depende de la calibración del sensor-transmisor. El controlador utiliza su señal de salida para decirle al elemento final de control qué hacer: cuánto abrir si es una válvula, qué tan rápido funcionar si es una bomba de velocidad variable, etcétera. Por tanto, cada señal está relacionada con una cantidad física que tiene sentido desde un punto de vista de ingeniería. La señal del transmisor de temperatura de la figura 1-1.2 se relaciona con la temperatura de salida y la señal del controlador se relaciona con la posición de la válvula de vapor.

Con frecuencia es necesario cambiar un tipo de señal por otro. Esto se hace por medio de un *transductor* o *convertidor*. Por ejemplo, puede existir la necesidad de cambiar de una señal eléctrica en mA a una señal neumática en psig. Esto se lleva a cabo mediante el uso de un transductor I/P de corriente (I) a neumática (P) que se muestra gráficamente en la figura 1-4.1. La señal de entrada puede ser de 4 a 20 mA y la de salida de 3 a 15 psig. Un convertidor analógico-digital (A/D) cambia de una señal en mA o volts a una señal digital. Existen muchos otros tipos de transductores: digital-analógico (D/A), neumático a corriente (P/I), voltaje a neumático (E/P), neumático a voltaje (P/E), etcétera.

El término *analógico* se refiere al controlador, o cualquier otro instrumento, que es neumático o eléctrico. Sin embargo, la mayoría de los controladores *se basan en computadora* o *son digitales.* Decir que "se basan en computadora" no necesariamente se alude a una computadora mainframe sino a cualquier plataforma con al menos un microprocesador. De hecho, la mayoría de los controladores se basan en microprocesadores. En el capítulo 5 se presentan diferentes tipos de controladores y se definen algunos términos relacionados con controladores y sistemas de control.

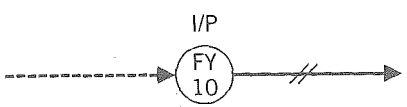


Figura 1-4.1 Transductor I/P.

1-5 ESTRATEGIAS DE CONTROL

1-5.1 Control por retroalimentación

El esquema de control mostrado en la figura 1-1.2 se conoce como *control por retroalimentación* o *lazo de control por retroalimentación.* Es necesario entender los principios operativos del control por retroalimentación para reconocer sus ventajas y desventajas; el lazo de control del intercambiador de calor de la figura 1-1.2 se presenta para ayudar a dicho entendimiento.

Si la temperatura de entrada al proceso disminuye creando una perturbación, su efecto se debe propagar a través del intercambiador de calor antes de que la temperatura de salida baje. Una vez que esta temperatura cambia, la señal del transmisor al controlador también cambia. Es entonces cuando el controlador detecta que ha ocurrido una desviación de la referencia y que debe compensar la perturbación manipulando la válvula de vapor. El controlador envía entonces señales a la válvula para que incremente su apertura, incrementando así el flujo de vapor. La figura 1-5.1 muestra gráficamente el efecto de la perturbación y de la acción del controlador.

Es útil notar que primero la temperatura de salida baja debido a la caída en la temperatura de entrada, pero después aumenta incluso por encima de la referencia y continúa oscilando alrededor de la referencia hasta que la temperatura finalmente se estabiliza. Esta respuesta oscilatoria es típica del control por retroalimentación, y muestra que es en esencia una operación de prueba y error. Es decir, cuando el controlador "nota" que la temperatura de salida se ha reducido por debajo de la referencia, envía una señal a la válvula para que se abra, pero la apertura es más de lo necesario. Por consiguiente, la temperatura de salida se incrementa por encima de la referencia. Al detectar esto, el controlador le indica a la válvula que de nuevo se cierre un poco para reducir la temperatura. Esta operación de prueba y error continúa hasta que la temperatura alcanza y permanece en la referencia.

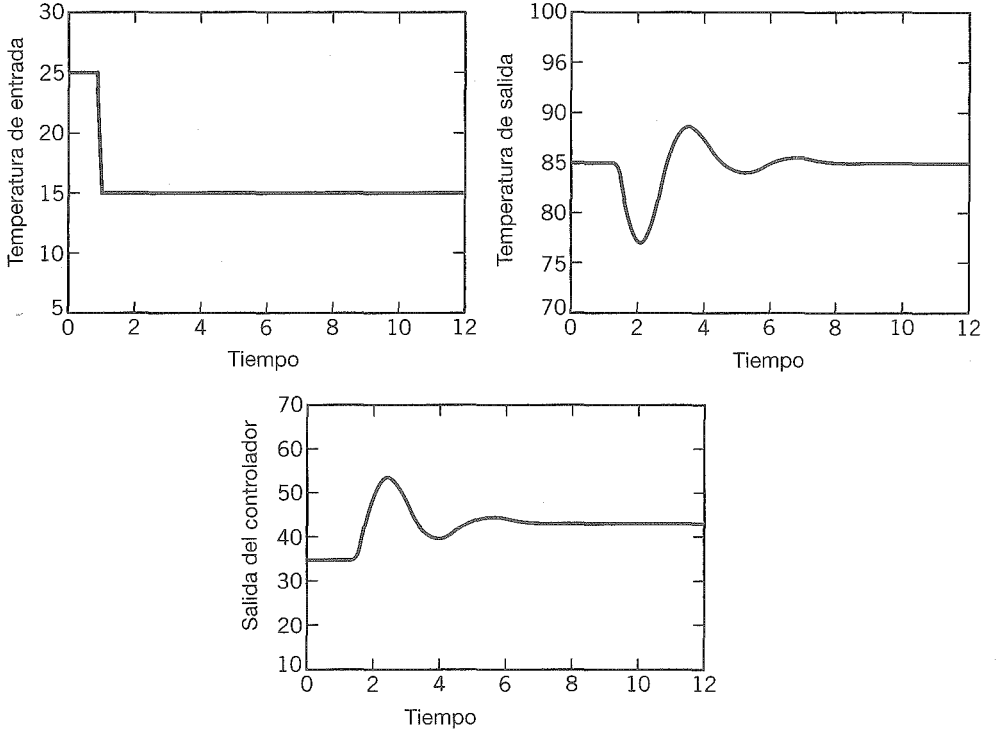


Figura 1-5.1 Respuesta del control por retroalimentación.

La *ventaja* del control por retroalimentación es que es una técnica muy simple que compensa por todas las perturbaciones. Cualquier perturbación afecta la variable controlada, y una vez que esta variable se desvía de la referencia, el controlador cambia su salida para regresar la temperatura a su referencia. El lazo de control por retroalimentación no sabe, ni le interesa, cuál perturbación entra en el proceso. Tan sólo trata de mantener la variable controlada en su referencia y al hacerlo compensa todas las perturbaciones. El controlador por retroalimentación opera con un conocimiento mínimo del proceso. De hecho, la única información que necesita es la dirección en que debe moverse. Cuánto debe moverse se ajusta normalmente por prueba y error. La *desventaja* del control por retroalimentación es que sólo puede compensar una perturbación cuando la variable controlada se ha desviado de la referencia. Esto es, la perturbación se debe propagar a través de todo el proceso antes de que el esquema de control por retroalimentación pueda iniciar una acción para compensarla.

El trabajo del ingeniero consiste en diseñar un esquema de control que mantenga la variable controlada en su referencia. Una vez que esto se ha logrado, el ingeniero debe ajustar, o sintonizar, el controlador para que minimice la operación de prueba y error requerida para el control. La mayoría de los controladores tiene hasta tres términos (también conocidos como parámetros) que se utilizan para sintonizarlos. Para hacer un trabajo creíble, el ingeniero debe primero conocer las características del proceso a controlar. Una vez que se conocen estas características, se puede proceder al diseño del sistema de control y a la sintonización del controlador. Las características del proceso se explican en los capítulos 3 y 4. El capítulo 5 presenta el significado de los parámetros de sintonización, y el capítulo 7 presenta diferentes métodos para sintonizar controladores.

1-5.2 Control feedforward

El control por retroalimentación es la estrategia más común en procesos industriales. Su simplicidad es la causa de su popularidad. En algunos procesos, sin embargo, el control por retroalimentación no proporciona la función de control que se requiere. Para estos procesos se han diseñado otros tipos de control. En los capítulos 9, 10, 11 y 12 se presentan otras estrategias de control que han demostrado ser útiles. Una de ellas es el *control feedforward* (también conocido como control por acción precalculada). El objetivo del control feedforward es medir las perturbaciones y compensarlas *antes* de que la variable controlada se desvíe de la referencia. Si se aplica correctamente, la desviación de la variable controlada será mínima.

Un ejemplo concreto de control feedforward es el intercambiador de calor de la figura 1-1.2. Supóngase que las perturbaciones "más importantes" son la temperatura de entrada, $T_i(t)$, y el flujo del proceso, $f(t)$. Para implementar el control feedforward primero se deben medir estas dos perturbaciones y después debe tomarse una decisión acerca de cómo manipular la válvula de vapor para compensarlas. En la figura 1-5.2 se presenta esta estrategia de control. El controlador feedforward toma la decisión de cómo manipular la válvula de vapor para mantener la variable controlada en su referencia con base en la temperatura de entrada y el flujo del proceso.

En la sección 1-2 se señaló que existen varios tipos de perturbaciones. El sistema de control feedforward que se muestra en la figura 1-5.2 sólo compensa dos de ellas. Si cualquier otra perturbación entra al proceso, esta estrategia no compensará su efecto y el resultado será una desviación permanente de la variable controlada respecto a la referencia. Para evitar esta des-

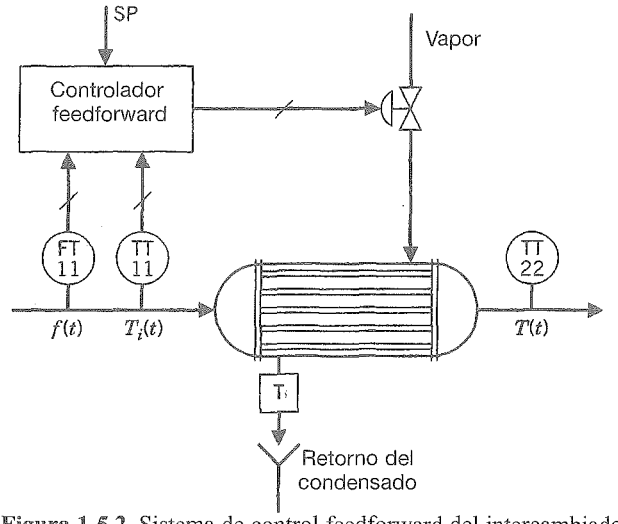


Figura 1-5.2 Sistema de control feedforward del intercambiador de calor.

viación, es necesario agregar una compensación por retroalimentación al control feedforward, como se muestra en la figura 1-5.3. El control feedforward ahora compensa las perturbaciones "más importantes", mientras que el control por retroalimentación compensa las otras perturbaciones. En el capítulo 11 se presenta el desarrollo del controlador feedforward. Se utilizan casos de la industria reales para estudiar en detalle esta importante estrategia de control.

Es importante hacer notar que las tres operaciones básicas, M, D, A, continúan presentes en esta estrategia de control más "avanzada". La medición se hace con sensores y transmisores. La decisión la toman tanto el controlador feedforward como el controlador por retroalimentación. La acción la realiza la válvula de vapor.

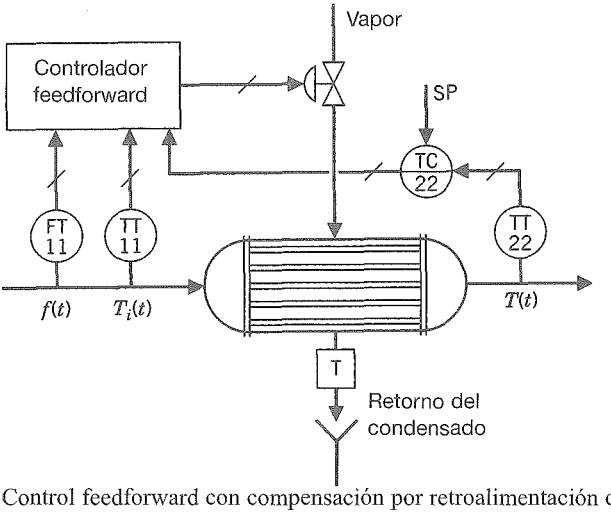


Figura 1-5.3 Control feedforward con compensación por retroalimentación del intercambiador de calor.

En general, las estrategias de control avanzadas son más costosas que el control por retroalimentación en cuanto a equipo, poder de cómputo y mano de obra necesaria para diseñarlas, implementarlas y mantenerlas. Por lo tanto, los costos deben justificarse (seguridad y economía) antes de implementarlas. El mejor procedimiento es diseñar e implementar primero una estrategia de control sencilla, teniendo en mente que si no resulta satisfactoria entonces se justifica una estrategia más avanzada. Es importante, sin embargo, tener presente que estas estrategias avanzadas aún requerirán compensación por retroalimentación.

1-6 BASES NECESARIAS PARA EL CONTROL DE PROCESOS

Para tener éxito en la práctica del control automático de procesos, *el ingeniero debe entender primero los principios de la ingeniería de procesos.* Por consiguiente, en este libro se supone que el lector está familiarizado con los principios básicos de termodinámica, flujo de fluidos, transferencia de calor, procesos de separación, procesos de reacción, etcétera.

Para el estudio del control de procesos también es fundamental entender el comportamiento dinámico de los procesos. Desafortunadamente, la abrumadora mayoría de los planes de estudio de ingeniería química anteriores a este curso ha enfatizado el supuesto del estado estacionario. Por lo tanto, los estudiantes cuentan con una comprensión satisfactoria del comportamiento en estado estacionario de los procesos, pero no del comportamiento dinámico. Aunque analicemos y diseñemos procesos suponiendo un estado estacionario, los procesos rara vez operan bajo esta condición.

Aunque nos gustaría que los procesos operaran por sí mismos en el estado estacionario para el que fueron diseñados, esto no ocurrirá sin nuestra intervención. Es necesario forzar los procesos a alcanzar este estado. Considere de nuevo el intercambiador de calor presentado en la sección 1-1. Este intercambiador de calor se calibró utilizando las ecuaciones de transferencia de calor en estado estacionario que se aprendieron en el curso de transferencia de calor. Si la temperatura de entrada, el flujo de entrada, las propiedades físicas del fluido, las condiciones del vapor y la limpieza del intercambiador permanecieran constantes en las condiciones de diseño, entonces el flujo de vapor calculado es exactamente lo que necesitamos para mantener la temperatura de salida en el valor deseado. Sin embargo, como se señala en la sección 1-2, con frecuencia pueden cambiar la temperatura de entrada, o el flujo de entrada, o las propiedades físicas, o las condiciones del vapor, o las condiciones ambientales, o la limpieza del equipo, y por consiguiente debemos cambiar el flujo de vapor para *forzar* el proceso a regresar al estado estacionario deseado (la temperatura de salida).

Cuánto vapor adicional se necesita y qué tan rápido debe cambiar el flujo de vapor para alcanzar la temperatura deseada depende del proceso. Los balances en estado estacionario nos indican cuánto vapor se necesita. Sin embargo, balances en condición dinámica son los que se necesitan para decidir qué tan rápido debe cambiar el flujo de vapor. Por consiguiente, es indispensable desarrollar el conjunto de ecuaciones que describa el comportamiento dinámico (dependiente del tiempo o transitorio) del proceso. A esto se le conoce como *modelaje*. Para llevar a cabo el modelaje se necesita el conocimiento de los principios básicos mencionados en los párrafos anteriores y de matemáticas en la forma de ecuaciones diferenciales. En el estudio

del control de procesos es muy socorrido el uso de la transformada de Laplace. Esto simplifica de manera importante el análisis dinámico de procesos y sus sistemas de control. El capítulo 2 de este libro está dedicado al desarrollo y uso de la transformada de Laplace junto con un repaso del álgebra de números complejos.

Otra "herramienta" importante para el estudio y práctica del control de procesos es la simulación por computadora. Muchas de las ecuaciones desarrolladas para describir los procesos son de naturaleza no lineal y, en consecuencia, la forma más exacta de resolverlas es mediante métodos numéricos; lo anterior significa una solución por computadora. A la solución por computadora de los modelos de procesos se le llama *simulación*. En los capítulos 3 y 4 se presenta una introducción al modelaje de algunos procesos, y en el capítulo 13 se trata más a fondo el modelaje y se presenta la simulación.

1-7 RESUMEN

En este capítulo se explicó la necesidad del control automático de procesos. *Los procesos industriales no son estáticos, sino muy dinámicos; cambian de manera continua debido a muchos tipos de perturbaciones.* Es principalmente debido a esta naturaleza dinámica que se necesitan sistemas de control para vigilar continua y automáticamente las variables que deben controlarse.

Los principios operativos de un sistema de control pueden resumirse con las tres iniciales M, D y A. M se refiere a la *medición* de las variables del proceso. D se refiere a la *decisión* que se toma con base en la medición de las variables del proceso. Finalmente, A se refiere a la *acción* que se debe realizar con base en la decisión tomada.

También se describieron los componentes básicos de un sistema de control de procesos: sensor-transmisor, controlador y elemento final de control. Se presentaron los tipos más comunes de señales —neumática, eléctrica y digital— junto con la finalidad de los transductores.

Se explicaron dos estrategias de control: control por retroalimentación y control feedforward (también conocido como control por acción precalculada). Se discutieron brevemente las ventajas y desventajas de ambas estrategias. En los capítulos 6 y 7 se presentarán el diseño y análisis de lazos de control por retroalimentación.

PROBLEMAS

1-1. Para los siguientes sistemas de control automático encontrados en la vida cotidiana, identifique los dispositivos que desempeñan las funciones de medición (M), decisión (D) y acción (A), y clasifique la función de acción como "activada/desactivada" ("On/Off") o "reguladora". Dibuje también un diagrama de instrumentación y proceso utilizando la simbología estándar ISA que se da en el apéndice A y determine si el control es por retroalimentación o del tipo feedforward.

a) Aire acondicionado/calefacción domésticos
b) Horno de cocina

c) Tostador
d) Sistema de aspersión automática contra incendios
e) Piloto automático de automóvil
f) Refrigerador.

1-2. *Diagrama de instrumentación: control automático de temperatura de ducha.* Dibuje el diagrama de instrumentación y proceso de un sistema automático de control para regular la temperatura del agua de una ducha común; es decir, un sistema que haga automáticamente lo que usted hace cuando ajusta la temperatura del agua al tomar una ducha. Utilice los símbolos estándar de instrumentación ISA dados en el apéndice A. Identifique los dispositivos de medición (M), decisión (D) y acción (A) de su sistema de control.

Capítulo 2

Matemáticas necesarias para el análisis de sistemas de control

En este capítulo se presentan dos herramientas matemáticas particularmente útiles para analizar la dinámica de los procesos y diseñar sistemas automáticos de control: la transformada de Laplace y la linealización. Combinadas, estas dos técnicas permiten obtener información sobre la respuesta dinámica de una amplia variedad de procesos e instrumentos. En contraste, la técnica de simulación por computadora permite realizar un análisis preciso y detallado del comportamiento dinámico de sistemas específicos, aunque rara vez permite generalizar los hallazgos a otros procesos.

La transformada de Laplace se utiliza para convertir las ecuaciones diferenciales que representan el comportamiento dinámico de las variables de salida del proceso en ecuaciones algebraicas. De este modo, en las ecuaciones algebraicas resultantes es posible aislar lo que es característico del proceso, la *función de transferencia*, de lo que es característico de las funciones de entrada o funciones de forzamiento. Puesto que las ecuaciones diferenciales que representan la mayoría de los procesos son no lineales, se requiere la linealización para aproximarlas a ecuaciones diferenciales lineales en las que se puede aplicar entonces el método de la transformada de Laplace.

El contenido de este capítulo no es un simple repaso de la transformada de Laplace sino una presentación de esta herramienta y de la manera en que se usa para analizar la dinámica de los procesos y para diseñar sistemas de control. También se presentan en este capítulo las respuestas de las funciones de transferencia de algunos procesos comunes a algunas funciones de entrada comunes. Estas respuestas están relacionadas con los parámetros de la función de transferencia de tal modo que las características importantes de las respuestas pueden inferirse

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

directamente de las funciones de transferencia sin tener que aplicar la transformada inversa cada vez. Los autores estamos convencidos de que el conocimiento de la transformada de Laplace es esencial para entender los fundamentos de la dinámica de los procesos y el diseño de sistemas de control.

2-1 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En esta sección se presenta un repaso de la definición de la transformada de Laplace y sus propiedades.

2-1.1 Definición de la transformada de Laplace

En el análisis de la dinámica de procesos, las variables del proceso y las señales de control son funciones del tiempo, t. La transformada de Laplace de una función del tiempo, $f(t)$, se define con la siguiente fórmula:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \tag{2-1.1}$$

donde:

$F(s)$ = la transformada de Laplace de $f(t)$
s = la variable de la transformada de Laplace, tiempo^{-1}

La transformada de Laplace cambia la función del tiempo, $f(t)$, en una función en la variable de la transformada de Laplace, $F(s)$. Los límites de integración indican que la transformada de Laplace contiene información de la función $f(t)$ sólo para tiempos positivos. Esto es perfectamente aceptable porque en el control de procesos, como en la vida, el pasado no puede cambiarse (tiempo negativo); la acción de control sólo puede afectar al proceso en el futuro. En los siguientes ejemplos se usa la definición de la transformada de Laplace para desarrollar la transformada de algunas funciones de forzamiento comunes.

Ejemplo 2-1.1 Las cuatro señales presentadas en la figura 2-1.1 se aplican comúnmente como entradas de procesos e instrumentos para estudiar su respuesta dinámica. Ahora se usará la definición de la transformada de Laplace para deducir sus transformadas.

a) Función escalón unitario. Éste es un cambio súbito de magnitud unitaria, como se ilustra gráficamente en la figura 2-1.1*a*. Su representación algebraica es

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

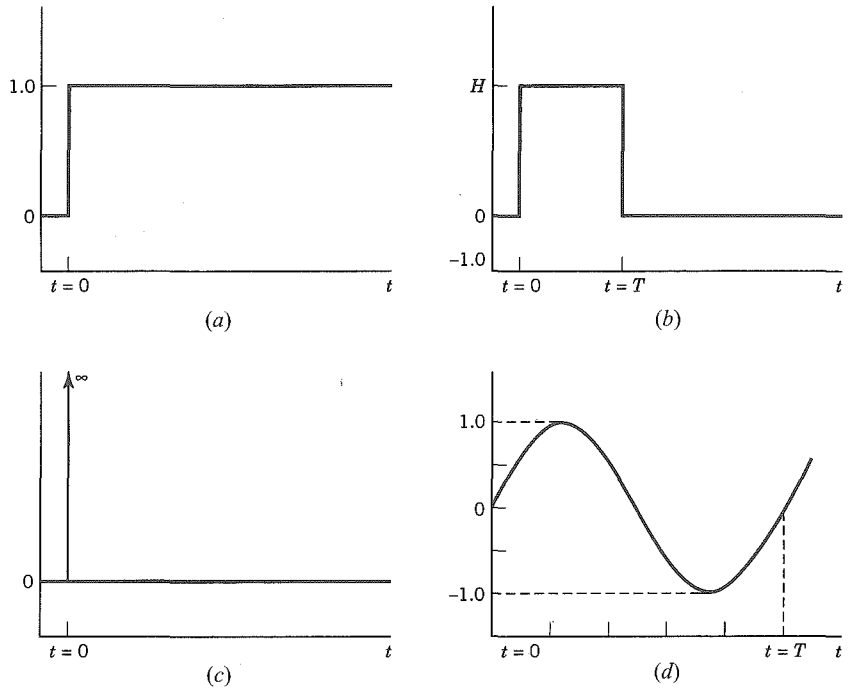


Figura 2-1.1 Señales de entrada comunes en el estudio de respuestas de sistemas de control. (*a*) Función escalón unitario, $u(t)$. (*b*) Pulso. (*c*) Función de impulso unitario, $\delta(t)$. (*d*) Onda sinusoidal, sen ωt ($\omega = 2\pi/T$).

Sustituyendo en la ecuación 2-1.1:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

b) Pulso de magnitud H y duración T. El pulso se muestra gráficamente en la figura 2-1.1*b* y se representa como:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0,\ t \geq T \\ H & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación 2-1.1 se obtiene:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^T He^{-st}\,dt = -\frac{H}{s}e^{-st}\Big|_0^T = -\frac{H}{s}(e^{-sT}-1) = H\frac{1-e^{-sT}}{s}$$

c) Función de impulso unitario. Esta función, también conocida como *función delta Dirac* y representada por el símbolo $\delta(t)$, se grafica en la figura 2-1.1*c*. Es un pulso ideal de duración cero y área unitaria. Toda su área se concentra en el tiempo cero. Como su función es cero en todo momento excepto en cero, y el término e^{-st} en la ecuación 2-1.1 es igual a la unidad en $t = 0$, la transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}\,dt = 1$$

Se debe notar que el resultado de la integración, 1, es el área del impulso. El mismo resultado puede obtenerse sustituyendo $H = 1/T$ en el resultado del inciso b), donde $HT = 1$, y tomando después los límites cuando T tiende a cero.

d) Onda sinusoidal de amplitud unitaria y frecuencia ω. La onda sinusoidal se muestra en la figura 2-1.1*d* y su representación en forma exponencial es

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad de los números imaginarios. Sustituyendo en la ecuación 2-1.1 se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\operatorname{sen}\omega t] &= \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} e^{-st}\,dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_0^\infty [e^{-(s-i\omega)t} - e^{-(s+i\omega)t}]\,dt \\
&= \frac{1}{2i}\left[-\frac{e^{-(s-i\omega)t}}{s-i\omega} + \frac{e^{-(s+i\omega)t}}{s+i\omega}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2i}\left[-\frac{0-1}{s-i\omega} + \frac{0-1}{s+i\omega}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\frac{2i\omega}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

El ejemplo anterior ilustra las manipulaciones algebraicas requeridas para deducir la transformada de Laplace de varias funciones utilizando su definición. La tabla 2-1.1 contiene una breve lista de la transformada de algunas funciones comunes.

Tabla 2-1.1 Transformadas de Laplace de funciones comunes

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
sen ωt	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
cos ωt	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{-at} sen ωt	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
e^{-at} cos ωt	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

2-1.2 Propiedades de la transformada de Laplace

En esta sección se presentan las propiedades de la transformada de Laplace ordenadas por su utilidad para analizar la dinámica de procesos y diseñar sistemas de control. La propiedad de linealidad y los teoremas de diferenciación e integración real son esenciales para transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas. El teorema del valor final es útil para predecir el valor final de estado estacionario de una función del tiempo a partir de su transformada de Laplace. El teorema de traslación real es útil para trabajar con funciones con retraso temporal. Otras propiedades son útiles para deducir la transformada de funciones complejas a partir de funciones más simples, como las que se dan en la tabla 2-1.1.

Linealidad. Es muy importante advertir que la transformada de Laplace es una operación lineal. Esto significa que si a es una constante,

$$\mathcal{L}[af(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] = aF(s) \tag{2-1.2}$$

La propiedad distributiva de la adición también se sigue de la propiedad de la linealidad:

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)]=a\mathcal{L}[f(t)]+b\mathcal{L}[g(t)]=aF(s)+bG(s) \tag{2-1.3}$$

donde a y b son constantes. Es sencillo deducir ambas fórmulas mediante la aplicación de la ecuación 2-1.1, la definición de la transformada de Laplace.

Teorema de diferenciación real. Este teorema, el cual establece una relación entre la transformada de Laplace de una función y sus derivadas, es muy importante para transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas. El teorema establece que

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0) \tag{2-1.4}$$

Demostración. Por la definición de la transformada de Laplace, ecuación 2-1.1,

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned}
u(t)=e^{-st} \quad dv&=\frac{df(t)}{dt}dt\\
du=-se^{-st}dt \quad v&=f(t)\\
\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]&=[f(t)e^{-st}]_0^\infty-\int_0^\infty f(t)(-se^{-st}dt)\\
&=[0-f(0)]+s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\\
&=sF(s)-f(0)
\end{aligned}$$

La extensión a derivadas de orden superior es directa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]&=\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)\right]\\
&=s\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]-\frac{df}{dt}\Big|_{t=0}\\
&=s[sF(s)-f(0)]-\frac{df}{dt}\Big|_{t=0}\\
&=s^2F(s)-sf(0)-\frac{df}{dt}\Big|_{t=0}
\end{aligned}$$

En general,

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\bigg|_{t=0} \tag{2-1.5}$$

En el control de procesos se supone con frecuencia que las condiciones iniciales son estacionarias (las derivadas con respecto al tiempo son cero), y que las variables son desviaciones de las condiciones iniciales (el valor inicial es cero). Para este importante caso, la expresión precedente se reduce a

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) \tag{2-1.6}$$

Esto quiere decir que, para el caso de condiciones iniciales cero en estado estacionario, la transformada de Laplace de la derivada de una función se obtiene simplemente reemplazando la variable s con el operador *"d/dt"*, y $F(s)$ con $f(t)$.

Teorema de integración real. Este teorema establece la relación entre la transformada de Laplace de una función y su integral. El teorema establece que

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s) \tag{2-1.7}$$

La demostración de este teorema se hace integrando por partes la definición de la transformada de Laplace, como en el teorema anterior, y se deja como ejercicio. La transformada de Laplace de la integral *n-ésima* de una función es la transformada de la función dividida entre s^n.

Teorema de traslación real. Este teorema se refiere a la traslación de una función en el eje del tiempo, como se ilustra en la figura 2-1.2. La función trasladada es la función original con retraso en el tiempo. Como se verá en el capítulo 3, los retrasos de tiempo son causados por retrasos de transporte, un fenómeno también conocido como *tiempo muerto*. El teorema establece que

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s) \tag{2-1.8}$$

Como la transformada de Laplace no contiene información acerca de la función original para tiempo negativo, la función retrasada debe ser cero para todos los tiempos menores al tiempo de retraso (véase la figura 2-1.2). Esta condición se satisface si las variables del proceso se expresan como desviaciones de la condición inicial de estado estacionario.

Demostración. Por la definición de la transformada de Laplace, ecuación 2-1.1,

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = \int_0^\infty f(t-t_0)e^{-st_0}\,dt$$

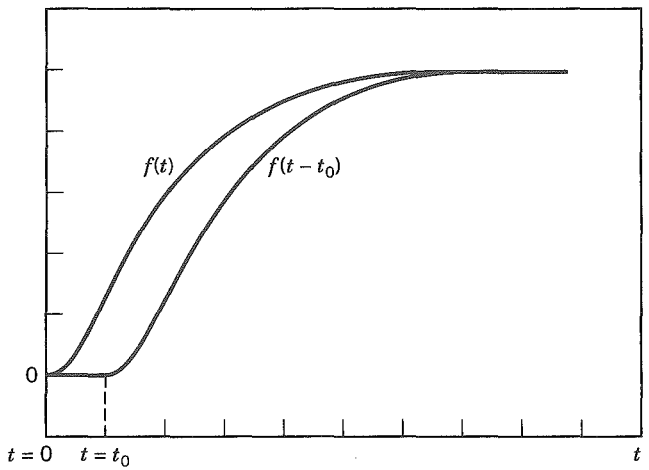


Figura 2-1.2 La función retrasada es cero para todos los tiempos menores que el tiempo de retardo t_0.

Sea $\tau = t - t_0$ (o $t = t_0 + \tau$) y sustituyendo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-t_0)] &= \int_{\tau=-t_0}^{\infty} f(\tau)e^{-s(t_0+\tau)}d(t_0+\tau) \\ &= \int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau)e^{-st_0}e^{-s\tau}d\tau \\ &= e^{-st_0}\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= e^{-st_0}F(s) \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Note que en esta demostración se utilizó el hecho de que $f(\tau) = 0$ para $\tau < 0$ ($t < t_0$).

Teorema del valor final. Este teorema permite calcular el valor final o de estado estacionario de una función a partir de su transformada. También es útil para verificar la validez de la transformada que se deduce. Si el límite de $f(t)$ cuando $t \to \infty$ existe, se puede calcular a partir de la transformada de Laplace como sigue:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{2-1.9}$$

La demostración de este teorema aporta poco para su comprensión.

Las tres últimas propiedades de la transformada de Laplace, las cuales se presentan sin demostración, no se usan con tanta frecuencia como las anteriores en el análisis de la respuesta dinámica de procesos.

Teorema de la diferenciación compleja. Este teorema es útil para evaluar la transformada de funciones que involucran potencias de la variable independiente, t. El teorema establece que

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s) \tag{2-1.10}$$

Teorema de la traslación compleja. Este teorema es útil para evaluar la transformada de funciones que implican funciones exponenciales del tiempo. El teorema establece que

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \tag{2-1.11}$$

Teorema del valor inicial. Este teorema permite calcular el valor inicial de una función a partir de su transformada. Constituiría otra demostración de la validez de las transformadas deducidas si no fuera por el hecho de que, en el análisis de dinámica de procesos, las condiciones iniciales de las variables por lo general son cero. El teorema establece que

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{2-1.12}$$

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de las propiedades de la transformada de Laplace que acaban de presentarse.

Ejemplo 2-1.2 Obtener la transformada de Laplace de la siguiente ecuación diferencial

$$9\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t)$$

con condiciones iniciales cero en estado estacionario, es decir, $y(0) = 0$, y $dy/dt(0) = 0$.

Solución Aplicando la propiedad de linealidad, ecuación 2-1.3, se toma la transformada de Laplace de cada término:

$$9\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] + 6\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] + \mathcal{L}[y(t)] = 2\mathcal{L}[x(t)]$$

Aplicando después el teorema de diferenciación real, ecuación 2-1.6,

$$9s^2Y(s) + 6sY(s) + Y(s) = 2X(s)$$

Finalmente, despejando $Y(s)$, se tiene

$$Y(s) = \frac{2}{9s^2 + 6s + 1}X(s)$$

El ejemplo anterior muestra cómo la transformada de Laplace convierte la ecuación diferencial original en una ecuación algebraica, la cual puede reordenarse para despejar la variable dependiente $Y(s)$. De ahí la gran utilidad de la transformada de Laplace, pues es mucho más sencillo trabajar con ecuaciones algebraicas que con ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 2-1.3 Obtener la transformada de Laplace en la siguiente función:

$$c(t) = u(t-3)[1 - e^{-(t-3)/4}]$$

Nota: el término $u(t-3)$ en esta expresión indica que la función es cero para $t < 3$. Recuérdese, del ejemplo 2-1.1*a*, que $u(t-3)$ es un cambio de cero a uno en $t = 3$, lo cual significa que la expresión entre corchetes está multiplicada por cero hasta que $t = 3$ y que después está multiplicada por la unidad. Por lo tanto, la presencia de la función escalón unitario no altera el resto de la función para $t > 3$.

Solución Sea

$$c(t) = f(t-3) = u(t-3)[1 - e^{-(t-3)/4}]$$

entonces

$$f(t) = u(t)[1 - e^{-t/4}] = u(t) - u(t)e^{-t/4}$$

Aplicar la ecuación 2-1.3, la propiedad de linealidad, y utilizar la tabla 2-1.1, con $a = 1/4$,

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{4}} = \frac{1}{s(4s+1)}$$

A continuación, aplicar el teorema de traslación real, ecuación 2-1.8,

$$C(s) = \mathcal{L}[f(t-3)] = e^{-3s}F(s) = \frac{e^{-3s}}{s(4s+1)}$$

La validez de este resultado se puede verificar con el teorema del valor final, ecuación 2-1.9.

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty} u(t-3)[1 - e^{-(t-3)/4}] = 1$$

$$\lim_{s\to 0} sC(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{e^{-3s}}{s(4s+1)} = 1$$ ¡Compruébelo!

2-2 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En esta sección se presenta el uso de la transformada de Laplace para resolver las ecuaciones diferenciales que representan la dinámica de los procesos y sus sistemas de control. Debido a que el objetivo es encontrar la forma en que las señales de salida responden a las funciones de forzamiento de entrada, asumimos siempre que las condiciones iniciales están en estado estacionario (derivadas con respecto al tiempo cero). También definimos todas las variables como desviaciones de sus valores iniciales. Esto hace que todas las variables de desviación tengan un valor inicial igual a cero.

2-2.1 Procedimiento de solución por la transformada de Laplace

El procedimiento para resolver una ecuación diferencial utilizando la transformada de Laplace consta de tres pasos:

1. Transformar la ecuación diferencial en una ecuación algebraica en función de la variable s de la transformada de Laplace.
2. Despejar la transformada de la variable de salida (o dependiente).
3. Invertir la transformada para obtener la respuesta de la variable de salida en función del tiempo, t.

Considérese la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bx(t) \tag{2-2.1}$$

El problema de resolver esta ecuación se puede enunciar de la siguiente manera: dados los coeficientes constantes a_0, a_1, a_2 y b, las condiciones iniciales $y(0)$ y $dy/dt|_{t=0}$, y la función $x(t)$, encontrar la función $y(t)$ que satisface la ecuación diferencial.

La función $x(t)$ se denomina "función de forzamiento" o variable de entrada, y $y(t)$ es la "variable de salida" o variable dependiente. En los sistemas de control de procesos, una ecuación diferencial como la ecuación 2-1.1 suele representar cómo un proceso o instrumento particular relaciona su señal de salida $y(t)$ con su señal de entrada $x(t)$. El enfoque aplicado aquí es similar al del inventor británico James Watt (1736-1819), quien consideraba las variables del proceso como señales y los procesos como procesadores de señales.

El primer paso para resolver la ecuación diferencial es tomar la transformada de Laplace de la ecuación 2-2.1. Esto se hace aplicando la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace, ecuación 2-1.3, la cual permite tomar la transformada de Laplace de cada término por separado:

$$a_2 \mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] + a_1 \mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] + a_0 \mathcal{L}[y(t)] = b\mathcal{L}[x(t)] \tag{2-2.2}$$

Suponiendo por el momento que las condiciones iniciales no son cero, las transformadas de Laplace indicadas se obtienen utilizando el teorema de diferenciación real, ecuación 2-1.5.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - sy(0) - \frac{dy}{dt}\bigg|_{t=0}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] = sY(s) - y(0)$$

A continuación se sustituyen estos términos en la ecuación 2-2.2 y se reordenan para obtener

$$(a_2s^2 + a_1s + a_0)Y(s) - (a_2s + a_1)y(0) - a_2\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=0} = bX(s)$$

El segundo paso es manipular esta ecuación algebraica para despejar la transformada de la variable de salida, $Y(s)$.

$$Y(s) = \frac{bX(s) + (a_2s + a_1)y(0) + a_2\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0}}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \qquad \textbf{(2-2.3)}$$

Esta ecuación muestra el efecto de la variable de entrada, $X(s)$, y de las condiciones iniciales sobre la variable de salida. Debido a que el objetivo es estudiar cómo responde la variable de salida a la variable de entrada, la presencia de condiciones iniciales complica el análisis. Para evitar esta complicación innecesaria, se supone que las condiciones iniciales están en estado estacionario, $dy/dt|_{t=0} = 0$, y se define la variable de salida como la *desviación* de su valor inicial, forzando así a que $y(0) = 0$. En la siguiente sección se muestra cómo se puede hacer esto sin perder la capacidad de generalización de la solución. Con condiciones iniciales iguales a cero, la ecuación se reduce a

$$Y(s) = \left[\frac{b}{a_2s^2 + a_1s + a_0}\right]X(s) \qquad \textbf{(2-2.4)}$$

La forma de la ecuación 2-2.4 permite descomponer la transformada de la variable de salida en el producto de dos términos: el término entre corchetes, conocido como la *función de transferencia*, y la transformada de la variable de entrada, $X(s)$. La función de transferencia y sus parámetros caracterizan el proceso o dispositivo y determinan cómo responde la variable de salida a los cambios de la variable de entrada. El concepto de función de transferencia se describe con mayor detalle en el capítulo 3.

El tercer y último paso es invertir la transformada de la salida para obtener la función de tiempo $y(t)$, que es la respuesta de la salida. Invertir es la operación opuesta a aplicar la

transformada de Laplace. Antes de poder invertir, debe seleccionarse una función de entrada específica para $x(t)$. Una función común, debido a su simplicidad, es la función escalón unitario, $u(t)$, la cual se introdujo en el ejemplo 2-1.1. A partir de ese ejemplo, o de la tabla 2-1.1, para $x(t) = u(t)$, $X(s) = 1/s$. Sustituyendo en la ecuación 2-2.4 e invirtiendo se obtiene

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}\frac{1}{s}\right] \tag{2-2.5}$$

donde el símbolo $\mathcal{L}^{-1}$ denota la inversa de la transformada de Laplace. La respuesta a una entrada escalón se denomina *respuesta escalón*, para abreviar.

La inversión podría llevarse a cabo fácilmente si la expresión entre corchetes se pudiera encontrar en la tabla 2-1.1 o en una tabla más extensa de transformadas de Laplace. Obviamente, no se encontrarán expresiones complejas en tales tablas. La técnica matemática de expansión en fracciones parciales, la cual se presenta a continuación, está diseñada para expandir la transformada de la salida en una suma de términos más simples. Después se puede hacer la inversión de estos términos más simples por separado buscando las expresiones correspondientes en la tabla 2-1.1.

2-2.2 Inversión mediante expansión en fracciones parciales

El físico británico Oliver Heaviside (1850-1925) desarrolló la técnica matemática de expansión en fracciones parciales como parte de su revolucionario "cálculo operacional". El primer paso para expandir la transformada, ecuación 2-2.5, en una suma de fracciones, es factorizar su denominador, como se muestra a continuación:

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)s = a_2(s - r_1)(s - r_2)s \tag{2-2.6}$$

donde r_1 y r_2 son las raíces del término cuadrático, es decir, los valores de s que satisfacen la ecuación

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Para un polinomio cuadrático o de segundo orden, las raíces se pueden calcular con la fórmula cuadrática convencional:

$$r_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} \tag{2-2.7}$$

Para polinomios de orden superior, se remite al lector a cualquier texto de métodos numéricos donde encontrará métodos para obtener las raíces de un polinomio. La mayoría de las calculadoras electrónicas modernas pueden encontrar las raíces de polinomios de tercer orden y

de orden mayor. Programas de computadora tales como Mathcad[1] y MATLAB[2] cuentan con funciones para hallar las raíces de polinomios de cualquier orden.

Una vez que se ha factorizado el denominador en términos de primer orden, la transformada se expande en fracciones parciales como sigue:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \frac{A_3}{s} \tag{2-2.8}$$

siempre que las raíces r_1, r_2 y $r_3 = 0$ y no sean iguales entre sí. Para este caso de raíces no repetidas, los coeficientes constantes se encuentran con la siguiente fórmula

$$A_k = \lim_{s \to r_k} (s - r_k) Y(s) \tag{2-2.9}$$

Ahora se puede llevar a cabo la inversión de la ecuación 2-2.8 hallando la correspondencia entre cada término y las entradas de la tabla 2-1.1. En este caso, los dos primeros términos corresponden con la función exponencial con $a = -r_k$, mientras que el tercer término concuerda con la función escalón unitario. La función inversa resultante es

$$y(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + A_3 u(t)$$

Raíces repetidas. En el caso de *raíces repetidas*, por ejemplo $r_1 = r_2$, la expansión se lleva a cabo de la siguiente forma:

$$Y(s) = \frac{A_1}{(s - r_1)^2} + \frac{A_2}{s - r_1} + \frac{A_3}{s} \tag{2-2.10}$$

El coeficiente A_3 se calcula como en el procedimiento anterior, pero los coeficientes A_1 y A_2 deben calcularse utilizando las siguientes fórmulas:

$$A_1 = \lim_{s \to r_1} (s - r_1)^2 Y(s)$$

$$A_2 = \lim_{s \to r_1} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} [(s - r_1)^2 Y(s)] \tag{2-2.11}$$

[1] *Mathcad User's Guide,* MathSoft, Inc., 201 Broadway, Cambridge, MA, 02139, 2001.
[2] *MATLAB User's Guide,* The MathWorks, Inc., 24 Prime Park Way, Natick, MA, 01760, 2001.

Nuevamente, la inversión de la ecuación 2-2.10 se lleva a cabo hallando la correspondencia entre sus términos y los de la tabla 2-1.1. El primer término concuerda con la sexta entrada de la tabla para $a = -r_1$, obteniéndose la inversa

$$y(t) = A_1 te^{r_1 t} + A_2 e^{r_1 t} + A_3 u(t)$$

En general, si la raíz r_1 se repite m veces, la expansión se lleva a cabo de la siguiente forma:

$$Y(s) = \frac{A_1}{(s-r_1)^m} + \frac{A_2}{(s-r_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{s-r_1} + \cdots \qquad \textbf{(2-2.12)}$$

Los coeficientes se calculan mediante

$$A_1 = \lim_{s \to r_1} (s-r_1)^m Y(s)$$

$$A_k = \lim_{s \to r_1} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} [(s-r_1)^m Y(s)] \qquad \textbf{(2-2.13)}$$

para $k = 2,\ldots, m$. Por lo tanto, la función inversa es:

$$y(t) = \left[\frac{A_1 t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{A_2 t^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + A_m \right] e^{r_1 t} + \cdots \qquad \textbf{(2-2.14)}$$

El siguiente ejemplo está diseñado para ilustrar numéricamente el procedimiento de expansión en fracciones parciales y el proceso completo de inversión. Se consideran tres casos: raíces reales no repetidas, raíces repetidas y raíces conjugadas complejas.

Ejemplo 2-2.1 Dada la ecuación diferencial cuadrática considerada en la discusión anterior, ecuación 2-2.1, con condiciones iniciales en estado estacionario iguales a cero, se obtendrá la respuesta escalón unitario de la variable de salida $y(t)$ para tres conjuntos diferentes de parámetros.

a) Raíces reales no repetidas. Sean $a_2 = 9$, $a_1 = 10$, $a_0 = 1$ y $b = 2$ en la ecuación 2-2.1. Entonces, la respuesta escalón unitario obtenida con la ecuación 2-2.5 es

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{9s^2 + 6s + 1} \frac{1}{s} \right]$$

Las raíces, obtenidas con la fórmula cuadrática, son $r_1 = -1/9$, $r_2 = -1$. El denominador se factoriza como sigue:

$$Y(s) = \frac{2}{9\left(s+\frac{1}{9}\right)(s+1)}\frac{1}{s}$$
$$= \frac{A_1}{s+\frac{1}{9}} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s}$$

Los coeficientes se calculan utilizando la ecuación 2-2.9:

$$A_1 = \lim_{s\to -1/9} \frac{2}{9(s+1)s} = -2.25$$
$$A_2 = \lim_{s\to -1} \frac{2}{9\left(s+\frac{1}{9}\right)s} = 0.25$$
$$A_3 = \lim_{s\to 0} \frac{2}{9\left(s+\frac{1}{9}\right)(s+1)} = 2$$

Haciendo la inversión por correspondencia con las entradas de la tabla 2-1.1, se obtiene la respuesta escalón:

$$y(t) = -2.25e^{-t/9} + 0.25e^{-t} + 2u(t)$$

b) Raíces repetidas. Sea $a_1 = 6$ y sean los otros parámetros como antes. Las raíces, obtenidas con la fórmula para ecuaciones cuadráticas, son $r_1 = r_2 = -1/3$, y la transformada de Laplace de la respuesta de salida es

$$Y(s) = \frac{2}{9\left(s+\frac{1}{3}\right)^2 s}$$
$$= \frac{A_1}{\left(s+\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{A_2}{s+\frac{1}{3}} + \frac{A_3}{s}$$

Los coeficientes que se obtienen, con la ecuación 2-2.13, son

$$A_1 = \lim_{s\to -1/3} \frac{2}{9s} = -\frac{2}{3}$$

$$A_2 = \lim_{s\to -1/3} \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[\frac{2}{9s}\right] = \lim_{s\to -1/3} -\frac{2}{9s^2} = -2$$

y $A_3 = 2$, como antes. La respuesta escalón se obtiene por correspondencia con las entradas de la tabla 2-1.1.

$$y(t) = \left(-\frac{2}{3}t - 2\right)e^{-t/3} + 2u(t)$$

c) Par de raíces conjugadas complejas. Sea $a_1 = 3$ y sean los otros parámetros como antes. Las raíces, obtenidas con la fórmula para las ecuaciones cuadráticas, son $r_{1,2} = -0.167 \pm i0.289$, donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad de los números imaginarios. La transformada de la salida es

$$Y(s) = \frac{2}{9(s + 0.167 - i0.289)(s + 0.167 + i0.289)s}$$

$$= \frac{A_1}{s + 0.167 - i0.289} + \frac{A_2}{s + 0.167 + i0.289} + \frac{A_3}{s}$$

Una vez más los coeficientes se calculan utilizando la ecuación 2-2.9:

$$A_1 = \lim_{s\to -0.167+i0.289} \frac{2}{9(s + 0.167 + i0.289)s} = -1 + i0.577$$

$$A_2 = \lim_{s\to -0.167-i0.289} \frac{2}{9(s + 0.167 - i0.289)s} = -1 - i0.577$$

y $A_3 = 2$, como antes. La inversa de la respuesta se obtiene nuevamente por correspondencia con las entradas de la tabla 2-1.1. Nótese que el hecho de que los números sean complejos no afecta esta parte del procedimiento.

$$y(t) = (-1 + i0.577)e^{(-0.167+i0.289)t} + (-1 - i0.577)e^{(-0.167-i0.289)t} + 2u(t)$$

Por el ejemplo anterior, resulta evidente que el cálculo de los coeficientes de la expansión en fracciones parciales puede ser difícil, en particular cuando los factores de la transformada son

números complejos. Como se verá en la siguiente sección, las raíces del denominador de la función de transferencia contienen información muy significativa sobre la respuesta. En consecuencia, al analizar la respuesta de un sistema de control de procesos, rara vez es necesario calcular los coeficientes de la expansión en fracciones parciales, lo cual resulta ciertamente afortunado.

2-2.3 Tiempo muerto

El uso de la técnica de expansión en fracciones parciales se restringe a los casos en que la transformada de Laplace se puede expresar como el cociente de dos polinomios. Cuando la respuesta contiene tiempo muerto, por el teorema de traslación real (ecuación 2-1.8), en la transformada aparece una función exponencial de s. Debido a que la función exponencial es trascendental, es necesario modificar de manera apropiada el procedimiento de inversión.

Si el denominador de la transformada contiene una función exponencial de s, no puede factorizarse porque la función exponencial introduce un número infinito de factores. Por otro lado, los términos exponenciales en el numerador sí se pueden manejar, como se verá enseguida.

Considérese el caso en el que hay un solo término exponencial que se puede factorizar como sigue:

$$Y(s) = Y_1(s)e^{-st_0} \tag{2-2.15}$$

El procedimiento correcto es expandir en fracciones parciales la parte de la transformada que no contiene el término exponencial.

$$Y_1(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - r_n} \tag{2-2.16}$$

Entonces se invierte esta expresión.

$$y_1(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \cdots + A_n e^{r_n t} \tag{2-2.17}$$

Ahora se invierte la ecuación 2-2.15 haciendo uso del teorema de traslación real, ecuación 2-1.8,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-st_0} Y_1(s)\right] = y_1(t - t_0) \\ &= A_1 e^{r_1(t-t_0)} + A_2 e^{r_2(t-t_0)} + \cdots + A_n e^{r_n(t-t_0)} \end{aligned} \tag{2-2.18}$$

Es importante notar que el término exponencial debe excluirse del procedimiento de expansión en fracciones parciales. Aunque la inclusión del término exponencial en la expansión en frac-

ciones parciales puede llevar al resultado correcto en algunos casos especiales, hacerlo es básicamente *incorrecto*.

En seguida se considera el caso de retrasos múltiples. Cuando hay más de un término de retraso en el numerador de la transformada, la manipulación algebraica adecuada convertirá la transformada en una suma de términos, cada uno con una sola función exponencial:

$$Y(s) = Y_1(s)e^{-st_{01}} + Y_2(s)e^{-st_{02}} + \cdots \tag{2-2.19}$$

Después se expande cada una de las subtransformadas —$Y_1(s)$, $Y_2(s)$, etc.— en fracciones parciales y se invierten por separado, dejando de lado el término exponencial. Finalmente, se aplica la ecuación 2-2.18 a cada término para producir el resultado:

$$y(t) = y_1(t - t_{01}) + y_2(t - t_{02}) + \cdots \tag{2-2.20}$$

El siguiente ejemplo ilustra este procedimiento.

Ejemplo 2-2.2 Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = f(t)$$

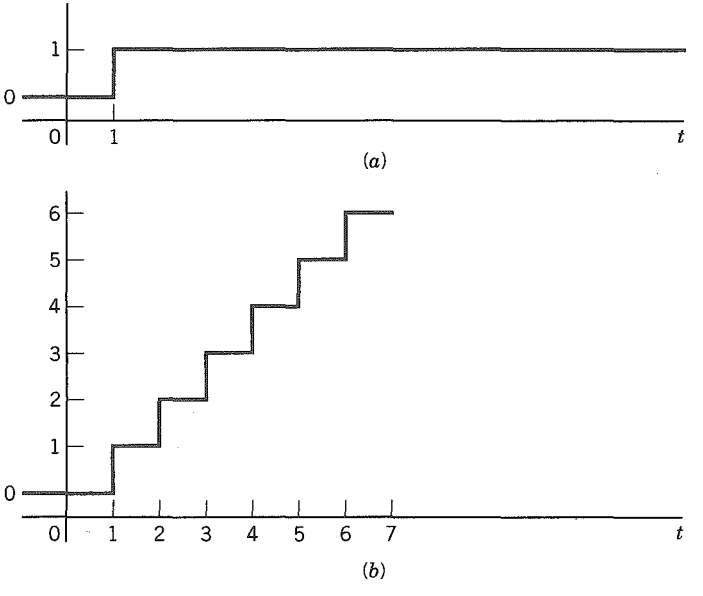


Figura 2-2.1 Funciones de entrada para el ejemplo 2-2.2. (*a*) Escalón unitario retrasado, $u(t - 1)$. (*b*) Escalera de escalones unitarios.

con $c(0) = 0$, encontrar la respuesta de la salida para:

1. El cambio escalón unitario en $t = 1$: $f(t) = u(t - 1)$.
2. Una función secuencial de escalones unitarios que se repiten en cada unidad de tiempo

$$f(t) = u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + \cdots$$

Estas funciones se muestran en la figura 2-2.1.

Solución **a)** Se transforma la ecuación diferencial, se despeja $C(s)$ y se sustituye $F(s) = (1/s)e^{-s}$.

$$C(s) = \frac{1}{s+2}F(s) = \frac{1}{s+2}\frac{1}{s}e^{-s}$$

Se hace $C(s) = C_1(s)e^{-s}$, y luego se invierte $C_1(s)$.

$$C_1(s) = \frac{1}{s+2}\frac{1}{s} = \frac{-0.5}{s+2} + \frac{0.5}{s}$$

Se hace la inversión utilizando la tabla 2-1.1.

$$c_1(t) = -0.5e^{-2t} + 0.5u(t) = 0.5u(t)[1 - e^{-2t}]$$

Aplicando la ecuación 2-2.18:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C_1(s)e^{-s}] = c_1(t-1) = 0.5u(t-1)[1 - e^{-2(t-1)}]$$

Nótese que el escalón unitario $u(t - 1)$ debe multiplicar también al término exponencial para mostrar que $c(t) = 0$ cuando $t < 1$.

b) Para la función escalera,

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s+2}\left(\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{(s+2)s}(e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \cdots) \\ &= C_1(s)e^{-s} + C_1(s)e^{-2s} + C_1(s)e^{-3s} + \cdots \end{aligned}$$

Se observa que $C_1(s)$ es la misma que en el inciso a) y, por lo tanto $c_1(t)$ es el mismo. Aplicando la ecuación 2-2.18 a cada término se obtiene

$$\begin{aligned} c(t) &= c_1(t-1) + c_1(t-2) + c_1(t-3) + \cdots \\ &= 0.5u(t-1)[1-e^{-2(t-1)}] + 0.5u(t-2)[1-e^{-2(t-2)}] \\ &\quad + 0.5u(t-3)[1-e^{-2(t-3)}] + \cdots \end{aligned}$$

El ejemplo anterior ilustra cómo manejar los retrasos de tiempo en la función de entrada. Se puede utilizar el mismo procedimiento cuando el retraso (tiempo muerto) aparece en la función de transferencia del sistema. Esta situación se presenta en el capítulo 3 en los modelos de procesos con retraso por transporte.

2-3 CARACTERIZACIÓN DE LA RESPUESTA DEL PROCESO

En la sección anterior se vio que la transformada de Laplace de la variable de salida del proceso se puede expresar como el producto de dos términos: una función de transferencia, que es característica del proceso, y la transformada de la señal de entrada. Un objetivo importante de esta sección es relacionar las características de la respuesta de la variable de salida con los parámetros de la función de transferencia del proceso y, en particular, con las raíces del denominador de la función de transferencia. Se verá que la mayoría de la información importante acerca de la respuesta del proceso puede obtenerse de estas raíces, y que en general no es necesario obtener la solución exacta de cada problema.

Las preguntas relevantes acerca de la respuesta de salida son las siguientes:

- ¿La respuesta es estable? Es decir, ¿permanecerá acotada cuando sea forzada por una entrada acotada?
- Si es estable, ¿cuál será su valor final de estado estacionario?
- ¿La respuesta es monótona u oscilatoria?
- Si es monótona y estable, ¿en cuánto tiempo desaparecerá el periodo transitorio?
- Si es oscilatoria, ¿cuál es el periodo de oscilación y en cuánto tiempo desaparecerán las oscilaciones?

Se verá que las respuestas a todas estas preguntas se pueden obtener a partir de los parámetros de la función de transferencia del sistema. Pero antes se definirán formalmente las variables de desviación y se verá cómo su uso, combinado con el supuesto de condiciones iniciales en estado estacionario, permite eliminar el efecto de las condiciones iniciales en la respuesta.

2-3.1 Variables de desviación

En la sección 2-2 se vio que la respuesta de la variable de salida es afectada no sólo por la variable de entrada, sino también por las condiciones iniciales. Como estamos interesados en

estudiar la respuesta del proceso y sus sistemas de control a los cambios en las variables de entrada (perturbaciones y variables manipuladas, definidas en el capítulo 1), se quiere eliminar el efecto de las condiciones iniciales sobre la respuesta. Para ello, suponemos que las condiciones iniciales están en estado estacionario. Esto hace que los valores iniciales de las derivadas respecto al tiempo sean iguales a cero, pero no el valor inicial de la variable de salida en sí. Para eliminar el valor inicial de la salida, se reemplaza la variable de salida con su desviación del valor inicial. Esto da origen a las *variables de desviación,* las cuales se definen como

$$Y(t) = y(t) - y(0) \tag{2-3.1}$$

donde:

$Y(t)$ = variable de desviación
$y(t)$ = valor total de la variable.

En general, en este libro las variables de desviación se representan con letras mayúsculas y las variables absolutas con letras minúsculas, siempre que sea posible. A partir de la definición de variables de desviación se observa que su valor inicial siempre es cero: $Y(0) = y(0) - y(0) = 0$.

Para ilustrar la simplificación que resulta del uso de variables de desviación, considérese la ecuación diferencial lineal de orden n:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 x(t) + c \tag{2-3.2}$$

donde $n > m$, $y(t)$ es la variable de salida, $x(t)$ es la variable de entrada, y c es una constante. En el estado estacionario inicial, todas las derivadas respecto al tiempo son cero y se puede escribir

$$a_0 y(0) = b_0 x(0) + c \tag{2-3.3}$$

Restando la ecuación 2-3.3 de la ecuación 2-3.2 se obtiene

$$a_n \frac{d^n Y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} Y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 Y(t) = b_m \frac{d^m X(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 X(t) \tag{2-3.4}$$

donde $Y(t) = y(t) - y(0)$, $X(t) = x(t) - x(0)$, y las variables de desviación en los términos de las derivadas pueden sustituirse directamente con las variables de desviación respectivas debido a que únicamente difieren en una constante:

$$\frac{d^k Y(t)}{dt^k} = \frac{d^k [y(t) - y(0)]}{dt^k} = \frac{d^k y(t)}{dt^k} - \frac{d^k y(0)}{dt^k} = \frac{d^k y(t)}{dt^k}$$

Nótese que la ecuación 2-3.4 expresada en términos de las variables de desviación es, en esencia, igual que la ecuación 2-3.2 expresada en términos de las variables originales, excepto por la constante c que se cancela. Este resultado es general.

2-3.2 Respuesta de la salida

Para mostrar la relación entre la respuesta de la salida y las raíces del denominador de la función de transferencia, se aplica la transformada de Laplace a la ecuación diferencial de orden n expresada en variables de desviación, ecuación 2-3.4, y se despeja la transformada de la salida:

$$Y(s) = \left[\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} \right] X(s) \tag{2-3.5}$$

donde se utiliza el hecho de que todas las condiciones iniciales son cero. La expresión entre corchetes es la función de transferencia, y su denominador se puede factorizar en n términos de primer orden, uno para cada una de sus raíces:

$$Y(s) = \left[\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n (s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_n)} \right] X(s) \tag{2-3.6}$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son las raíces del polinomio del denominador. Además de los n factores que se encuentran en la ecuación 2-3.6, hay factores adicionales introducidos por la variable de entrada $X(s)$, los cuales dependen del tipo de entrada (escalón, pulso, rampa, etcétera). A continuación se hace la expansión de la transformada en fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - r_n} + [\text{términos de } X(s)] \tag{2-3.7}$$

Finalmente, se invierte la transformada por comparación con las entradas de la tabla 2-1.1 para obtener la respuesta como una función del tiempo. Si no hay raíces repetidas, la inversa es

$$Y(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \cdots + A_n e^{r_n t} + (\text{términos de } X) \tag{2-3.8}$$

Los n primeros términos del lado derecho provienen de la función de transferencia y el resto de los términos varía, dependiendo de la función de entrada $X(t)$.

Si cualquiera de las raíces se repite p veces, su coeficiente se reemplaza por un polinomio en t de grado $p - 1$, como se mostró en la sección anterior. El número total de términos, por supuesto, será n, contando los términos en el polinomio de t.

A continuación se responden las preguntas planteadas al inicio de esta sección mediante el análisis de la ecuación 2-3.8. Primero se considera el caso en que todas las raíces son reales, y luego la posibilidad de pares de raíces conjugadas complejas.

Todas las raíces reales

Si todas las raíces son reales, los términos de la ecuación 2-3.8 son funciones exponenciales simples del tiempo que sólo aumentan con el tiempo si la raíz es positiva o disminuyen a cero si la raíz es negativa. Por consiguiente, las raíces reales no pueden producir respuestas oscilatorias. Además, si alguna de las raíces es positiva, la respuesta crecerá exponencialmente sin límite, por lo que será *inestable*. El lector puede preguntarse ¿qué pasa si el coeficiente del término con raíz positiva es cero? El sistema sigue siendo inestable. Un coeficiente de cero quiere decir que para una entrada particular el sistema no crecerá sin límite, como un lápiz apoyado en su punta afilada, pero a la menor desviación respecto a su condición de equilibrio el sistema se apartará rápidamente de esa posición.

De esta manera, para responder las preguntas iniciales cuando todas las raíces del denominador de la función de transferencia son reales:

- La respuesta es monótona (no oscilatoria).
- Es estable sólo si todas las raíces son negativas.

Las figuras 2-3.1*a* y *b* son ejemplos de respuestas monótonas estable e inestable, respectivamente.

Respecto al tiempo que le toma decaer a la respuesta transitoria, se puede observar que cada término exponencial comienza con un valor en la unidad ($e^0 = 1$) y, si la raíz es negativa, decae a cero con el tiempo. Teóricamente, una función exponencial nunca llega a cero, de manera que es necesario definir un umbral por abajo del cual se considera que la respuesta transitoria desapareció. Digamos que el umbral para cada término de la respuesta se define como menor de 1% de su valor inicial. Para usar un número de fácil manejo, sea $e^{rt} = e^{-5} = 0.0067$, o 0.67%, que es menor de 1%. Entonces, el tiempo requerido para que el k-ésimo término exponencial alcance 0.67% de su valor inicial es

$$t_k = \frac{-5}{r_k} \tag{2-3.9}$$

De esta manera, a la raíz con el menor valor absoluto (la menos negativa) le tomará el tiempo más largo para que su respuesta transitoria decaiga. Esta raíz se denomina la *raíz dominante* de la respuesta.

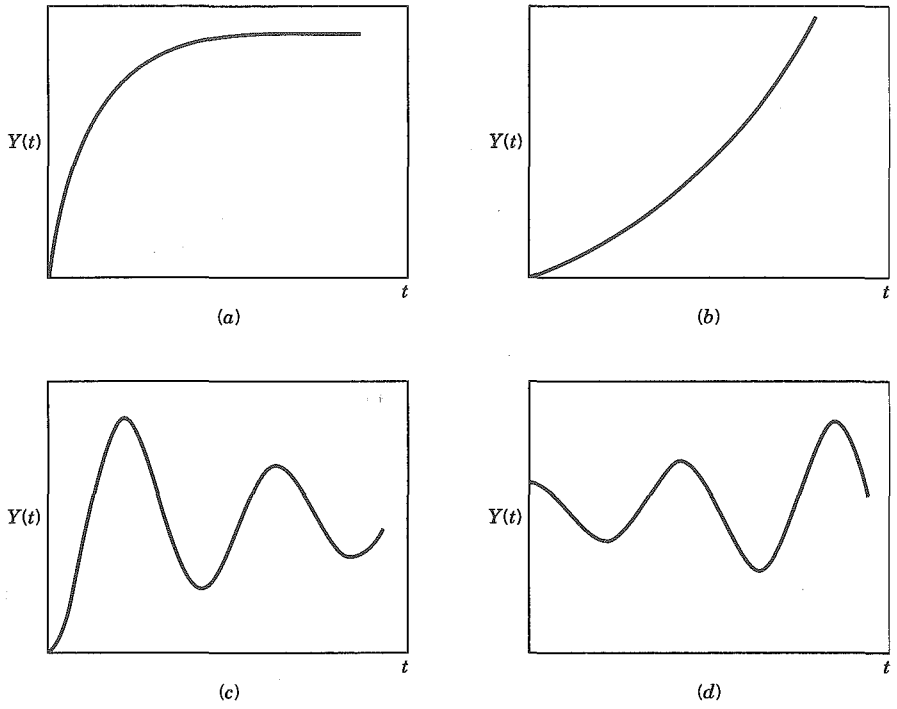


Figura 2-3.1 Ejemplos de respuestas. (*a*) Estable, raíz real negativa. (*b*) Inestable, raíz real positiva. (*c*) Oscilatoria estable, raíces complejas con parte real negativa. (*d*) Oscilatoria inestable, raíces complejas con parte real positiva.

Par de raíces conjugadas complejas

Las raíces complejas de un polinomio real se presentan en pares conjugados complejos, tales como

$$r_1 = \rho + i\omega \quad r_2 = \rho - i\omega$$

donde ρ es la parte real y ω es la parte imaginaria. En el caso de uno de estos pares de raíces, la transformada expandida de la salida es

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{A_1}{s-\rho-i\omega} + \frac{A_2}{s-\rho+i\omega} + \cdots \\ &= \frac{(A_1+A_2)(s-\rho)}{(s-\rho)^2+\omega^2} + \frac{i(A_1-A_2)\omega}{(s-\rho)^2+\omega^2} + \cdots \\ &= \frac{B(s-\rho)}{(s-\rho)^2+\omega^2} + \frac{C\omega}{(s-\rho)^2+\omega^2} + \cdots \end{aligned} \tag{2-3.10}$$

donde:

$$B = A_1 + A_2$$
$$C = i\,(A_1 - A_2)$$

Se puede demostrar que A_1 y A_2 son números complejos y conjugados uno del otro. Por lo tanto, B y C son números reales. Ahora se puede invertir la ecuación 2-3.10 por comparación con las dos últimas entradas de la tabla 2-1.1, con $a = -\rho$.

$$\begin{aligned} Y(t) &= Be^{\rho t}\cos \omega t + Ce^{\rho t}\,\text{sen}\,\omega t + \cdots \\ &= e^{\rho t}\,(B\cos \omega t + C\,\text{sen}\,\omega t) + \cdots \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede simplificar aún más utilizando la identidad trigonométrica

$$\text{sen}\,(\omega t + \theta) = \text{sen}\,\theta\cos \omega t + \cos\theta\,\text{sen}\,\omega t$$

El resultado es

$$Y(t) = De^{\rho t}\,\text{sen}\,(\omega t + \theta) + \cdots \qquad \textbf{(2-3.11)}$$

donde:

$D = \sqrt{B^2 + C^2}$, es la amplitud inicial, y

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{B}{C}$, es el ángulo de fase en radianes.[3]

Este resultado muestra que la respuesta es oscilatoria, debido a que contiene la función sinusoidal. La amplitud de la onda sinusoidal varía con el tiempo de acuerdo con el término exponencial $e^{\rho t}$, el cual es inicialmente la unidad, pero puede crecer con el tiempo si ρ es positiva, o decae a cero si es negativa. Por lo tanto, para el caso de uno o más pares de raíces conjugadas complejas, se pueden seguir respondiendo las preguntas del inicio de esta sección como sigue:

- La respuesta es oscilatoria.
- Las oscilaciones crecen con el tiempo (respuesta inestable) si cualquiera de los pares de raíces complejas tiene partes reales positivas.

Las figuras 2-3.1*c* y *d* muestran ejemplos de una respuesta oscilatoria estable y una inestable, respectivamente.

[3] Para las fórmulas deducidas en esta sección, el argumento de la función trigonométrica debe estar en *radianes*, lo que significa que su calculadora debe estar en este modo cuando utilice la función trigonométrica. Las funciones trigonométricas para la mayoría de los lenguajes de computadora (FORTRAN, Pascal, C, Visual Basic, etc.) y las hojas de cálculo operan en radianes.

La ecuación 2-3.11 muestra que la frecuencia de la onda sinusoidal es igual a la parte imaginaria de las raíces, ω, en radianes por unidad de tiempo. El periodo de las oscilaciones es el tiempo que toma completar un ciclo, es decir, el tiempo que le toma al argumento de la onda sinusoidal, $\omega t + \theta$, incrementarse en 2π radianes. Por tanto, el periodo es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2-3.12}$$

La unidad de frecuencia en el sistema internacional (SI) es el hertz (Hz), que es el número de ciclos por segundo, o el recíproco del periodo en segundos. Sin embargo, las fórmulas consideradas aquí requieren que la frecuencia esté en radianes por unidad de tiempo.

En tanto que el periodo de las oscilaciones está determinado por ω, la parte imaginaria de las raíces, la parte real de las raíces, ρ, determina el tiempo que le toma a la oscilación desvanecerse. Como ocurre con las raíces reales, el tiempo que le toma a las oscilaciones decaer a menos de 1% de su amplitud inicial, específicamente $e^{-5} = 0.0067$ o 0.67%, es

$$t_S = \frac{-5}{\rho} \tag{2-3.13}$$

donde t_s es aproximadamente igual a 1% del *tiempo de estabilización.*

Quizá una mejor medición del decaimiento de las oscilaciones es la *razón de asentamiento*, o la razón a la cual la amplitud de la onda decae en un periodo. Este número es

$$\text{Razón de asentamiento} = e^{\rho T} = e^{2\pi\rho/\omega} \tag{2-3.14}$$

Tabla 2-3.1 Relación entre la transformada de Laplace $Y(s)$ y su inversa $Y(t)$.

Denominador de $Y(s)$	Término de fracción parcial	Término de $Y(t)$
Raíz real no repetida	$\frac{A}{s-r}$	Ae^{rt}
Par de raíces conjugadas complejas	$\frac{Bs+C}{(s-\rho)^2+\omega^2}$	$De^{\rho t}\,\text{sen}\,(\omega t+\theta)$
donde $D=\sqrt{B^2+C^2}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{B}{C}$		
Raíz real repetida m veces	$\sum_{j=1}^{m}\frac{A_j}{(s-r)^j}$	$e^{rt}\sum_{j=1}^{m}\frac{A_j t^{j-1}}{(j-1)!}$

Valor final de estado estacionario

La única pregunta que falta por responder es cómo determinar el estado estacionario final o valor de equilibrio de la salida después de que desaparezca la respuesta transitoria. Para que exista un valor final de estado estacionario, la variable de entrada $X(t)$ debe permanecer estacionaria durante algún tiempo. La forma más fácil de analizar la respuesta con el fin de encontrar el valor final de estado estacionario es utilizar el teorema del valor final de la transformada de Laplace y suponer una entrada escalón, $X(t) = \Delta x u(t)$, o $X(s) = \Delta x/s$. Sustituyendo en la ecuación 2-3.5 y aplicando el teorema del valor final, ecuación 2-1.9, se obtiene

$$\Delta Y = \lim_{s \to 0} s \left[\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} \right] \frac{\Delta x}{s} = \frac{b_0}{a_0} \Delta x \qquad \textbf{(2-3.15)}$$

En esta sección se han deducido varias fórmulas para calcular parámetros importantes de la respuesta de salida. Con excepción de la fórmula para el valor final de estado estacionario, ecuación 2-3.15, todas las demás fórmulas están basadas en las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia. Ninguno de estos parámetros depende de los valores de los coeficientes de la expansión en fracciones parciales.

En la tabla 2-3.1 se resumen las relaciones que se han establecido en esta sección entre la respuesta de salida y las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia. El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de las ideas que se han discutido en esta sección.

Ejemplo 2-3.1 Caracterizar la respuesta descrita por la siguiente ecuación diferencial. Suponer que el tiempo se mide en minutos y que las variables son desviaciones de las condiciones iniciales de estado estacionario.

a)
$$30\frac{d^3Y(t)}{dt^3} + 43\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 14\frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = 2.5X(t)$$

Usando la transformada de Laplace y despejando $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2.5}{30s^3 + 43s^2 + 14s + 1} X(s)$$

Las raíces del denominador son: -0.1, -0.333 y -1.0. Como las raíces son reales y negativas, la respuesta es monótona y estable. La respuesta es

$$Y(t) = A_1 e^{-0.1t} + A_2 e^{-0.333t} + A_3 e^{-t} + (\text{términos de } X)$$

Los tiempos requeridos para que cada término decaiga a 0.67% de su valor inicial son 50 (= $-5/-0.1$), 15 y 5 minutos, respectivamente, por lo que el primer término domina la respuesta.

Para un cambio escalón en $X(t)$, el valor final de estado estacionario es 2.5/1.0 = 2.5 veces la amplitud del escalón.

b)
$$\frac{d^3Y(t)}{dt^3}+5\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+11\frac{dY(t)}{dt}+15Y(t)=12X(t)$$

Usando la transformada de Laplace y despejando $Y(s)$:

$$Y(s)=\frac{12}{s^3+5s^2+11s+15}X(s)$$

Las raíces del denominador son: $-1 \pm i2$ y -3. Como hay un par de raíces conjugadas complejas, la respuesta es oscilatoria con una frecuencia de 2 radianes/minuto y un periodo de $2\pi/2 = 3.14$ min. La respuesta es estable porque la parte real de las raíces complejas es negativa y, por consiguiente, la raíz real también lo es. La solución es

$$Y(t) = De^{-t}\text{sen}\,(2t+\theta) + A_3e^{-3t} + (\text{términos de } X)$$

La onda sinusoidal decae a 0.67% de su amplitud inicial en $-5/-1 = 5$ min, mientras que el término con la raíz real decae en $-5/-3 = 1.67$ min. Por lo tanto, la onda sinusoidal es el término dominante. La razón de asentamiento de la onda sinusoidal es

$$\text{Razón de asentamiento} = e^{2\pi(-1)/2} = e^{-3.14} = 0.043$$

Esto significa que la amplitud se reduce a 4.3% de su valor durante un ciclo. El cambio final de estado estacionario en $Y(t)$ es 0.8 (= 12/15) veces el tamaño del cambio sostenido en $X(t)$.

Ejemplo 2-3.2 ***Respuesta de un péndulo.*** Los relojes de caja y los relojes de cucú utilizan un péndulo como dispositivo de temporización, esto es, una masa suspendida de una barra que oscila alrededor de su valor de equilibrio, que es la posición vertical. Encontrar los parámetros del péndulo (peso, longitud, forma, etc.) que determinan su periodo de oscilación.

Solución Un balance de fuerza horizontal en el péndulo, despreciando por el momento la resistencia del aire y suponiendo que el ángulo de oscilación es pequeño, resulta en la siguiente ecuación diferencial:

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -Mg\frac{x(t)}{L} + f(t)$$

donde $x(t)$ es la posición horizontal de la masa en metros (m) a partir de la posición de equilibrio, M es la masa del peso en kg, L es la longitud de la barra en m, $g = 9.8$ m/s^2 es la

aceleración de la gravedad, y $f(t)$ es la fuerza en newtons (N) requerida para poner en movimiento el péndulo, por lo general un pulso o impulso corto. Suponiendo que el péndulo se encuentra originalmente en la posición de equilibrio, $x(0) = 0$, se toma la transformada de Laplace de la ecuación y se despeja $X(s)$ para obtener:

$$X(s) = \left[\frac{1}{Ms^2 + \dfrac{Mg}{L}} \right] F(s)$$

Las raíces del denominador son números imaginarios puros:

$$r_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Por la ecuación 2-3.11, la respuesta es:

$$x(t) = D \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \theta \right) + (\text{términos de } f)$$

Esto significa que el péndulo oscilará indefinidamente con una frecuencia que es independiente de su masa y forma, y que será una función exclusiva de su longitud y la aceleración local de la gravedad. El periodo de oscilación es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

De esta manera, si su reloj de caja se está adelantando, usted debe bajar la masa en la barra, y si se está atrasando, debe subirla. Por ejemplo, un péndulo con una longitud de 1.0 m tendrá un periodo de $2\pi(1/9.8)^{0.5} = 2.0$ s.

El péndulo, por supuesto, no oscila indefinidamente debido a la resistencia del aire. La masa y la forma del péndulo afectan la resistencia del aire. Los relojes están equipados con un mecanismo de pesas o de resorte para compensar la resistencia del aire. Esta acción podría incorporarse en la fuerza externa $f(t)$. ¿Cómo puede incorporarse la resistencia del aire en la ecuación de movimiento para indicar que, si no se compensa, el péndulo terminará por detenerse?

Nótese que el ejemplo anterior se resolvió sin tener que evaluar los coeficientes de la expansión en fracciones parciales o especificar la función de entrada.

2-3.3 Estabilidad

Estabilidad es la capacidad de la respuesta de permanecer acotada (permanecer dentro de límites) cuando es sometida a una entrada acotada. Por la discusión de la sección anterior, se concluye que las raíces del denominador de la función de transferencia de un proceso o dispositivo determinan la estabilidad de su respuesta ante señales de entrada. Esa discusión se puede resumir con la siguiente condición de estabilidad para sistemas lineales: *un sistema es estable si todas las raíces del denominador de su función de transferencia son números reales negativos o números complejos con partes reales negativas.*

Esta condición de estabilidad se considera con mayor detalle en el capítulo 6, donde se verá que la estabilidad es una restricción muy importante en la operación y sintonización de lazos de control por retroalimentación.

2-4 RESPUESTA DE SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Como se verá en el capítulo 3, la respuesta dinámica de muchos procesos y componentes de sistemas de control puede representarse con ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Se hace referencia a estos procesos como *sistemas de primer orden*. En esta sección se presenta la respuesta de sistemas de primer orden a tres diferentes tipos de señales de entrada: una función escalón, una rampa y una onda sinusoidal. El objetivo es aprender cómo los parámetros de los sistemas de primer orden afectan su respuesta para que posteriormente puedan inferirse las características importantes de la respuesta de un sistema examinando tan sólo su función de transferencia. Los sistemas de primer orden también son importantes porque muchos sistemas de orden superior pueden tratarse como combinaciones de sistemas de primer orden en serie y en paralelo.

Considérese la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bx(t) + c \tag{2-4.1}$$

donde $y(t)$ es la salida o variable dependiente, $x(t)$ es la variable de entrada, t es el tiempo, la variable independiente, y los parámetros a_1, a_0, b y c son constantes. La ecuación se puede escribir en el estado estacionario inicial, es decir, antes de que ocurra algún cambio en $x(t)$:

$$a_0 y(0) = bx(0) + c \tag{2-4.2}$$

Observe que esta ecuación establece una relación entre los valores iniciales de x y y. Restando la ecuación 2-4.2 de la ecuación 2-4.1, se obtiene

$$a_1 \frac{dY(t)}{dt} + a_0 Y(t) = bX(t) \tag{2-4.3}$$

donde

$$Y(t) = y(t) - y(0)$$
$$X(t) = x(t) - x(0)$$

son las variables de desviación, y donde se utiliza el hecho de que $dy(t)/dt = dY(t)/dt$, debido a que sólo difieren por la constante $y(0)$. Advierta que la constante c se cancela.

La ecuación 2-4.3 es la ecuación diferencial lineal general de primer orden en términos de la desviación de las variables de entrada y salida respecto a sus valores iniciales de estado estacionario. La ecuación tiene tres coeficientes, a_1, a_0 y b, pero, sin pérdida de generalidad, se puede dividir entre uno de los tres coeficientes, de manera que la ecuación pueda caracterizarse con sólo dos parámetros. En control de procesos se acostumbra dividir entre el coeficiente de la variable de salida, a_0, siempre que no sea cero. Esta operación resulta en la siguiente ecuación, que se denomina la *forma estándar* de la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = KX(t) \tag{2-4.4}$$

donde

$\tau = \dfrac{a_1}{a_0}$ es la *constante de tiempo,* y

$K = \dfrac{b}{a_0}$ es la *ganancia de estado estacionario.*

La razón de estos nombres será evidente a medida que se desarrollen las respuestas a diferentes tipos de entrada. Observe que para que la ecuación 2-4.4 sea dimensionalmente consistente, τ debe estar en unidades de tiempo, y K en unidades de Y divididas entre las unidades de X.

Cualquier ecuación diferencial lineal de primer orden puede transformarse a la forma estándar de la ecuación 2-4.4, siempre que la variable dependiente $Y(t)$ aparezca en la ecuación. Entonces es posible obtener la función de transferencia de un sistema de primer orden tomando la transformada de Laplace de la ecuación 2-4.4. Para hacer esto se aplica la propiedad de linealidad, ecuación 2-1.3, y el teorema de diferenciación real, ecuación 2-1.4, notando que la condición inicial de la variable de desviación $Y(t)$ es cero. El resultado es

$$\tau s Y(s) + Y(s) = K X(s) \tag{2-4.5}$$

Despejando $Y(s)$ se obtiene

$$Y(s) = \left[\frac{K}{\tau s + 1}\right] X(s) \tag{2-4.6}$$

El término entre corchetes es la función de transferencia del sistema de primer orden en forma estándar. Tenga en cuenta que lo que resulta característico de esta forma es que el segundo término en el denominador es la unidad. Cuando la función de transferencia está en esta forma, el término del numerador es la ganancia y el coeficiente de s es la constante de tiempo.

La raíz del denominador de la función de transferencia es $r = -1/\tau$. Por lo que se aprendió en la sección anterior, se puede ver que la respuesta de un sistema de primer orden es monótona (una raíz real) y que es estable si su constante de tiempo es positiva. Además, el tiempo requerido para que la respuesta transitoria se reduzca a menos de 1% de su valor inicial, específicamente $e^{-5} = 0.0067$, o 0.67%, es $-5/r = 5\tau$ o cinco veces la constante de tiempo. El cambio final en la salida en estado estacionario, el cual se obtiene haciendo $s = 0$ en la función de transferencia, es K veces el cambio sostenido en la entrada, razón por la cual K es la ganancia; la definición de ganancia es el cambio en estado estacionario en la salida dividido entre el cambio sostenido en la entrada.

Habiendo establecido las características generales de la respuesta de los sistemas de primer orden, se considera ahora la respuesta específica a tres señales de entrada representativas.

2-4.1 Respuesta escalón

Para obtener la respuesta escalón ante un cambio de magnitud Δx, se hace $X(t) = \Delta x\, u(t)$, donde $u(t)$ representa la función escalón unitario en el tiempo cero [véase el ejemplo 2-1.1(a)]. Por la tabla 2-1.1, la transformada de la entrada es $X(s) = \Delta x/s$. Sustituyendo este valor en la ecuación 2-4.6 y expandiendo en fracciones parciales se obtiene

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1}\frac{\Delta x}{s} = \frac{-K\,\Delta x}{\tau s + 1} + \frac{K\,\Delta x}{s}$$

Invirtiendo por comparación de entradas en la tabla 2-1.1, con $a = 1/\tau$,

$$\boxed{Y(t) = K\,\Delta x(1 - e^{-t/\tau})} \qquad (2\text{-}4.7)$$

Éste es un resultado muy importante. En la figura 2-4.1 se presenta una gráfica de la respuesta y en la tabla 2-4.1 se tabula la respuesta normalizada contra t/τ. Advierta que la respuesta comienza con la tasa de cambio máxima justo después de aplicar el escalón y luego la tasa de cambio se reduce de tal modo que la respuesta tiende exponencialmente al valor final de estado estacionario $K\Delta x$. Después de una constante de tiempo, la respuesta alcanza 63.2% de su cambio final, y en cinco constantes de tiempo alcanza más de 99% del cambio. En otras palabras, para efectos prácticos, la respuesta se estabiliza después de cinco constantes de tiempo.

Tabla 2-4.1 Respuesta escalón de primer orden

$\frac{t}{\tau}$	$\frac{Y(t)}{K\Delta x}$
0	0
1.0	0.632
2.0	0.865
3.0	0.950
4.0	0.982
5.0	0.993
⋮	⋮
∞	1.000

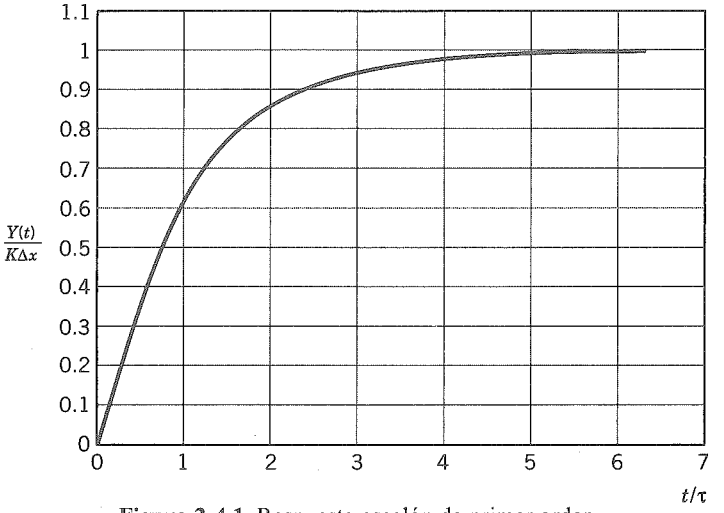


Figura 2-4.1 Respuesta escalón de primer orden.

2-4.2 Respuesta rampa

Una rampa es un incremento lineal en la entrada iniciando en el tiempo cero. La función de entrada está dada por $X(t) = rt$, donde r es la pendiente (tasa) de la rampa. Según la tabla 2-1.1, la transformada de Laplace es $X(s) = r/s^2$. Sustituyendo en la ecuación 2-4.6 y expandiendo en fracciones parciales,

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1}\frac{r}{s^2} = \frac{A_1}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s}$$

De la ecuación 2-2.9 se obtiene el coeficiente A_1, y de la ecuación 2-2.13 se obtienen los coeficientes A_2 y A_3:

$$A_1 = \lim_{s \to -1/\tau} \left(s + \frac{1}{\tau} \right) \frac{Kr}{(\tau s + 1)s^2} = Kr\tau$$

$$A_2 = \lim_{s \to 0} s^2 \frac{Kr}{(\tau s + 1)s^2} = Kr$$

$$A_3 = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[\frac{Kr}{\tau s + 1} \right] = -Kr\tau$$

Sustituyendo en la transformada e invirtiendo por comparación con las entradas de la tabla 2-1.1,

$$\begin{aligned} Y(t) &= Kr\tau e^{-t/\tau} + (Krt - Kr\tau)u(t) \\ &= Kr\tau e^{-t/\tau} + Kr(t - \tau)u(t) \end{aligned} \tag{2-4.8}$$

La respuesta rampa, luego que el término exponencial decae en aproximadamente cinco constantes de tiempo, se vuelve una rampa con pendiente Kr con un retraso de una constante de tiempo. Para ilustrar la forma en que la salida se retrasa en exactamente una constante de tiempo con respecto a la entrada, en la figura 2-4.2 se sobreponen las gráficas de $X(t)$ y $Y(t)/K$ contra t. De esta manera, las dos rampas son paralelas porque ambas tienen pendientes (o tasas) r. Resulta evidente al observar la gráfica que la respuesta rampa está retrasada respecto a la rampa de entrada por una constante de tiempo τ. Ésta es la razón por la que los sistemas representados por funciones de transferencia de primer orden también se denominan *retardos de primer orden.*

2-4.3 Respuesta sinusoidal

Para obtener la respuesta de un sistema de primer orden a una onda sinusoidal, se hace que la función de entrada sea $X(t) = A$ sen ωt, donde A es la amplitud y ω es la frecuencia en radianes/tiempo. Por la tabla 2-1.1, la transformada de Laplace es $X(s) = A\omega/(s^2 + \omega^2)$. Sustituyendo en la ecuación 2-4.6 y expandiendo en fracciones parciales,

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A_1}{s + \dfrac{1}{\tau}} + \frac{A_2}{s - i\omega} + \frac{A_3}{s + i\omega}$$

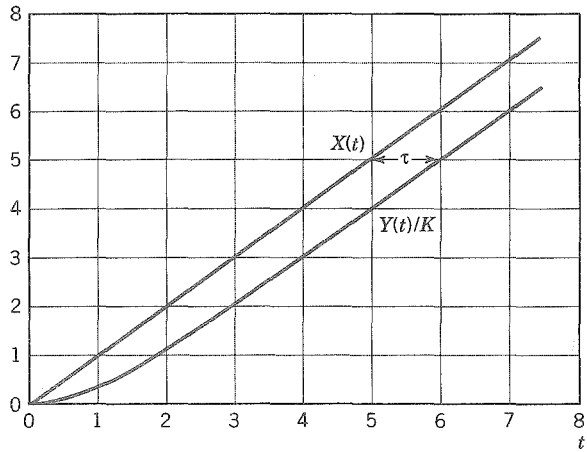


Figura 2-4.2 Respuesta de primer orden a una rampa. La salida normalizada está retrasada de la entrada exactamente por una constante de tiempo.

donde se ha hecho uso de $(s^2 + \omega^2) = (s - i\omega)(s + i\omega)$. Los coeficientes se obtienen con la ecuación 2-2.9.

$$A_1 = \lim_{s\to -1/\tau}\left(s+\frac{1}{\tau}\right)\frac{KA\omega}{(\tau s+1)(s^2+\omega^2)} = \frac{KA\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}$$

$$A_2 = \lim_{s\to i\omega}\frac{KA\omega}{(\tau s+1)(s+i\omega)} = \frac{KA(-\tau\omega - i)}{2(1+\tau^2\omega^2)}$$

$$A_3 = \lim_{s\to -i\omega}\frac{KA\omega}{(\tau s+1)(s-i\omega)} = \frac{KA(-\tau\omega + i)}{2(1+\tau^2\omega^2)}$$

Sustituyendo en la transformada, invirtiendo y utilizando la ecuación 2-3.11 con $\rho = 0$, después de algunas manipulaciones no triviales se obtiene

$$Y(t) = \frac{KA\omega\tau}{1+\tau^2\omega^2}e^{-t/\tau} + \frac{KA}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\operatorname{sen}(\omega t+\theta) \qquad (2\text{-}4.9)$$

donde $\theta = \tan^{-1}(-\omega\tau)$.

Esta respuesta sinusoidal de un sistema de primer orden se grafica en la figura 2-4.3. Luego de que el término exponencial decae en cinco constantes de tiempo, la respuesta se vuelve una onda sinusoidal con la misma frecuencia ω que la onda sinusoidal de entrada. La amplitud de la onda sinusoidal de la salida depende de la frecuencia. A muy bajas frecuencias es el producto de la ganancia de estado estacionario y la amplitud de la entrada, pero a medida que la frecuencia de la onda sinusoidal de entrada aumenta, la amplitud de la onda sinusoidal de salida se reduce. También se presenta un corrimiento de fase, un retraso, θ, que es una función de la frecuencia. Esta dependencia de la respuesta de la frecuencia de la onda sinusoidal de entrada constituye la base de un método para analizar la dinámica de procesos y los sistemas de control conocido como *respuesta en frecuencia*, que es el tema del capítulo 8.

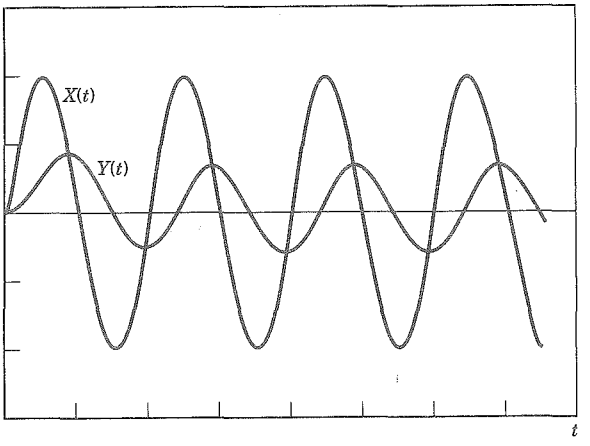


Figura 2-4.3 Respuesta de primer orden a una onda sinusoidal. La onda sinusoidal de salida, $Y(t)$, tiene la misma frecuencia que la onda de entrada, $X(t)$.

2-4.4 Respuesta con retardo

Como se verá en el capítulo 3, la respuesta de algunos procesos presenta retardo (también conocido como retraso por transporte o tiempo muerto). Por el teorema de traslación real, el retardo modificará la función de transferencia estándar de primer orden de la ecuación 2-4.6 como sigue:

$$Y(s) = \left[\frac{Ke^{-st_0}}{\tau s + 1}\right] X(s) \tag{2-4.10}$$

El término entre corchetes es una importante función de transferencia utilizada para aproximar la respuesta de sistemas de orden superior. Se denomina *función de transferencia de primer orden más tiempo muerto (FOPDT,* por sus siglas en inglés).

El efecto del tiempo muerto en las tres respuestas que se presentaron en esta sección es el siguiente:

Respuesta escalón

$$Y(t) = K\Delta x u(t - t_0)(1 - e^{(t-t_0)/\tau}) \tag{2-4.11}$$

donde la presencia del factor $u(t - t_0)$ muestra que la respuesta es cero para $t < t_0$. En la figura 2-4.4 se muestra una gráfica de esta respuesta.

Respuesta rampa

$$Y(t) = u(t - t_0)[Kr\tau e^{-(t-t_0)/\tau} + Kr(t - t_0 - \tau)] \tag{2-4.12}$$

Nótese que el efecto del retardo de tiempo en la respuesta a largo plazo es que la rampa de la respuesta de salida está retrasada respecto a la rampa de entrada por la suma del retardo más la constante de tiempo.

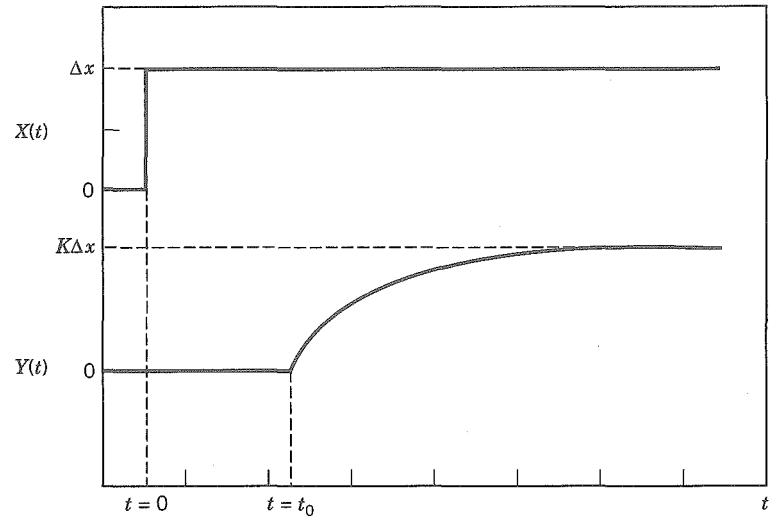


Figura 2-4.4 Respuesta escalón de primer orden con tiempo de retardo t_0.

Respuesta sinusoidal

$$Y(t) = u(t-t_0)\left\{\frac{KA\omega\tau}{1+\tau^2\omega^2}e^{-(t-t_0)/\tau} + \frac{KA}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\operatorname{sen}[\omega(t-t_0)+\theta]\right\} \qquad (2\text{-}4.13)$$

El único efecto del retardo en la respuesta a largo plazo es incrementar el retraso de fase por ωt_0. Este incremento en el retraso de fase es proporcional a la frecuencia de la onda sinusoidal de entrada. El retraso de fase θ es el mismo que en la ecuación 2-4.9.

2-4.5 Respuesta de una unidad de adelanto-atraso

Una *unidad de adelanto-atraso* es un dispositivo de uso común para la compensación dinámica en controladores feedforward y tiene la siguiente función de transferencia:

$$Y(s) = \frac{\tau_{ld}s+1}{\tau_{lg}s+1}X(s) \qquad (2\text{-}4.14)$$

donde τ_{ld} es la constante de tiempo del término de adelanto y τ_{lg} es la constante de tiempo del término de atraso. Nótese que un "adelanto" es un término de primer orden en el numerador, mientras que un "atraso", como ya se vio, es un término de primer orden en el denominador. Las respuestas escalón y rampa de las unidades de adelanto-atraso resultan útiles para entender cómo sintonizarlas, es decir, cómo ajustar las constantes de tiempo de adelanto y de atraso para lograr una compensación dinámica adecuada.

Respuesta escalón

La respuesta a una entrada escalón unitario, $X(s) = 1/s$, es

$$Y(t) = u(t) + \left(\frac{\tau_{ld}}{\tau_{lg}} - 1 \right) e^{-t/\tau_{lg}} \tag{2-4.15}$$

En la figura 2-4.5 se presenta una gráfica de esta respuesta para varios valores de τ_{ld} / τ_{lg}. Nótese que la razón de las constantes de tiempo controla el cambio inicial en la salida, mientras que la constante de tiempo de atraso determina el tiempo requerido para que la respuesta transitoria desaparezca (aproximadamente cinco veces la constante de tiempo de atraso). Cuando la relación adelanto-retraso es mayor que la unidad, la respuesta sobrepasa su estado estacionario final, mientras que cuando es menor que la unidad, no lo sobrepasa.

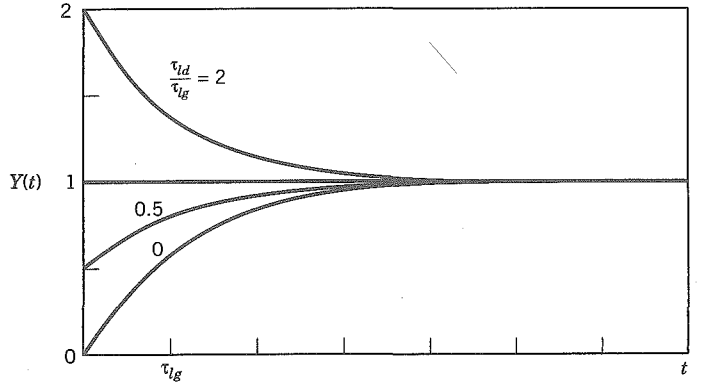


Figura 2-4.5 Respuesta de adelanto-atraso a un cambio escalón unitario.

Respuesta rampa

La respuesta a una rampa de tasa unitaria, $X(s) = 1/s^2$, es

$$Y(t) = (\tau_{ld} - \tau_{lg}) e^{-t/\tau_{lg}} + t + \tau_{ld} - \tau_{lg} \tag{2-4.16}$$

En la figura 2-4.6 se presenta la entrada rampa junto con la respuesta rampa para dos casos, uno en el que el adelanto es mayor que el atraso, y otro en el que el atraso es mayor que el adelanto. Nótese que, después de que el término transitorio desaparece, la respuesta es una rampa adelantada o atrasada respecto a la rampa de entrada por la diferencia entre el tiempo de adelanto y el de atraso, dependiendo de cuál es mayor. Es esta respuesta la que da los nombres "adelanto" y "atraso" a los términos del numerador y del denominador de la función de transferencia.

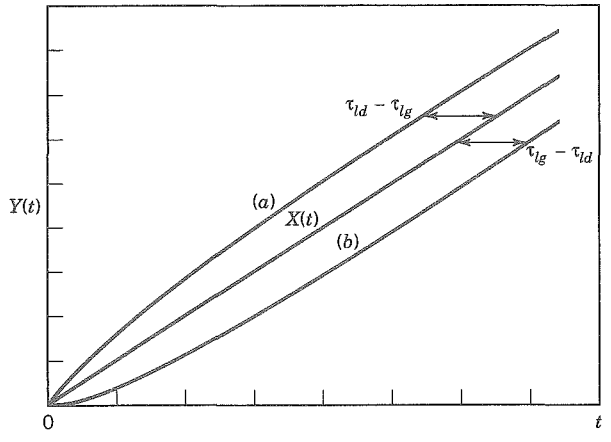


Figura 2-4.6 Respuesta de adelanto-atraso a una rampa de entrada $X(t)$. (a) Adelanto neto, $\tau_{ld} > \tau_{lg}$. (b) Retardo neto, $\tau_{lg} > \tau_{ld}$.

Un dispositivo físico no puede tener más adelantos que atrasos, hecho que debe tenerse presente cuando se sintonizan las unidades de adelanto-atraso. Aunque la constante de tiempo de adelanto se puede hacer cero, no es posible hacer lo mismo con la constante de tiempo de atraso.

La aplicación de unidades de adelanto-atraso para la compensación dinámica de los controladores feedforward se analizará en detalle en la sección 11-3.

Además de las respuestas que se han presentado en esta sección, existen otras respuestas de interés tales como las respuestas a funciones impulso y pulsos. Éstas se proponen como ejercicios en los problemas al final de este capítulo. Otro problema interesante propuesto como ejercicio es la respuesta de procesos integrantes, los cuales son los procesos que no contienen el término a_0 en la ecuación 2-4.3. La sección 4-4.1 contiene un ejemplo de un proceso integrante.

2-5 RESPUESTA DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Esta sección presenta la respuesta de los sistemas lineales de segundo orden a los mismos tres tipos de señales de entrada para los que se presentó la respuesta de procesos de primer orden en la sección anterior. Se verá que las respuestas son bastante diferentes, dependiendo de si las raíces del denominador de la función de transferencia son reales o un par de conjugadas complejas. Cuando ambas raíces son reales, se dice que la respuesta es *sobreamortiguada*, mientras que si las raíces son complejas se dice que la respuesta es *subamortiguada*. La respuesta de los procesos sobreamortiguados se generaliza a sistemas de orden superior a dos.

Un sistema lineal de segundo orden es el que está representado por una ecuación diferencial lineal de segundo orden. La forma general de esta ecuación es

$$a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bx(t) + c \qquad (2\text{-}5.1)$$

donde $y(t)$ es la variable de salida, $x(t)$ es la variable de entrada y los parámetros a_2, a_1, a_0, b y c son constantes. Suponiendo que las condiciones iniciales se encuentran en estado estacionario, la ecuación en las condiciones iniciales es

$$a_0 y(0) = bx(0) + c \tag{2-5.2}$$

Restando la ecuación 2-5.2 de la ecuación 2-5.1 se obtiene

$$a_2 \frac{d^2Y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dY(t)}{dt} + a_0 Y(t) = bX(t) \tag{2-5.3}$$

donde:

$$Y(t) = y(t) - y(0)$$
$$X(t) = x(t) - x(0)$$

son las variables de desviación. Por definición, las condiciones iniciales de las variables de desviación son cero. Nótese que la constante c se cancela.

Los cuatro parámetros en la ecuación 2-5.3, a_2, a_1, a_0 y b, pueden reducirse a tres dividiendo toda la ecuación entre cualquiera de ellos, siempre que no sea cero. En el control de procesos se llega a lo que se denomina la *forma estándar* de la ecuación de segundo orden dividiendo entre el coeficiente a_0, siempre que no sea cero. La ecuación resultante en la forma estándar es

$$\tau^2 \frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = KX(t) \tag{2-5.4}$$

donde:

$\tau = \sqrt{\dfrac{a_2}{a_0}}$ es el tiempo característico[4]

$\zeta = \dfrac{a_1}{2\tau a_0} = \dfrac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$ se denomina la *razón de amortiguamiento*

$K = b/a_0$ es la ganancia de estado estacionario.

La razón por la que los parámetros τ y ζ se definieron como se presentó será evidente pronto. En la definición del tiempo característico se supone que a_2 y a_0 tienen el mismo signo; de lo contrario, el tiempo característico sería un número imaginario y perdería su utilidad.

[4]En algunos libros sobre control, en particular los escritos por ingenieros eléctricos, la respuesta de segundo orden se caracteriza por la *frecuencia natural*, ω_n, definida como el recíproco del tiempo característico τ.

Ahora se toma la transformada de Laplace de la ecuación 2-5.4, se aplica la propiedad de linealidad y el teorema de diferenciación real, y se despeja la transformada de salida para obtener

$$Y(s) = \left[\frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}\right] X(s) \tag{2-5.5}$$

donde el término entre corchetes es la función de transferencia de segundo orden en la forma estándar. Para poder encontrar las raíces del polinomio del denominador se aplica la fórmula cuadrática:

$$r_{1,2} = \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} \tag{2-5.6}$$

Se observa entonces que la razón de amortiguamiento determina si las raíces son reales o complejas. Si el valor absoluto de la razón de amortiguamiento es mayor o igual que uno, las raíces son reales, mientras que si la razón de amortiguamiento es menor que la unidad, las raíces son un par de números complejos conjugados. Cuando la razón de amortiguamiento es la unidad, las dos raíces son iguales entre sí y su valor es $-1/\tau$. Si la razón de amortiguamiento es cero, la parte real de las raíces complejas es cero, es decir, las raíces son números imaginarios puros y su valor es $\pm i/\tau$, donde i es la raíz cuadrada de -1.

Como se vio en la sección 2-3, si las raíces del denominador de la función de transferencia son números reales, la respuesta es monótona, mientras que las raíces complejas resultan en una respuesta oscilatoria. Además, para que la respuesta sea estable, las raíces deben ser negativas si son reales, o deben tener la parte real negativa si son complejas. Se invita al lector a verificar que, para la función de transferencia de segundo orden de la ecuación 2-5.5, la condición de estabilidad se satisface si y sólo si la razón de amortiguamiento es positiva. Ahora se puede ver que el término "razón de amortiguamiento" se refiere al amortiguamiento de las oscilaciones. El comportamiento de la respuesta se resume como sigue:

Para	La respuesta es
$\zeta \geq 1$	sobreamortiguada = monótona y estable
$0 < \zeta < 1$	subamortiguada = oscilatoria y estable
$\zeta = 0$	no amortiguada = oscilaciones sostenidas
$-1 < \zeta < 0$	inestable = oscilaciones crecientes
$\zeta \leq -1$	desbocada = inestable monótona

El caso de $\zeta = 1$ en ocasiones se denomina *críticamente amortiguado*, pero éste es sólo el caso limítrofe. Su respuesta es monótona y estable, como la respuesta sobreamortiguada.

Para nuestros propósitos, sólo es necesario considerar los dos casos de raíces reales y complejas, que se denominarán sobreamortiguado y subamortiguado, respectivamente. En las

secciones siguientes se presentan las ecuaciones de la respuesta específica para entradas escalón, rampa y sinusoidal para cada uno de estos dos casos.

2-5.1 Respuestas sobreamortiguadas

Cuando la razón de amortiguamiento es mayor que la unidad, las raíces dadas por la ecuación 2-5.6 son números reales. En este caso es mejor factorizar el denominador de la función de transferencia en dos términos de primer orden que contengan cada uno una constante de tiempo, como sigue:

$$\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 = \tau^2 (s - r_1)(s - r_2) = (\tau_{e1} s + 1)(\tau_{e2} s + 1) \tag{2-5.7}$$

donde τ_{e1} y τ_{e2} son las *constantes de tiempo efectivas*, definidas como los recíprocos negativos de las raíces. Para el sistema de segundo orden, de la ecuación 2-5.6, las constantes de tiempo efectivas son:

$$\begin{aligned} \tau_{e1} &= -\frac{1}{r_1} = \frac{\tau}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ \tau_{e2} &= -\frac{1}{r_2} = \frac{\tau}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned} \tag{2-5.8}$$

A continuación se sustituye la ecuación 2-5.7 en la ecuación 2-5.5 para obtener la función de transferencia en términos de las constantes de tiempo efectivas:

$$Y(s) = \left[\frac{K}{(\tau_{e1} s + 1)(\tau_{e2} s + 1)} \right] X(s) \tag{2-5.9}$$

Ésta es una función de transferencia más conveniente para representar sistemas de segundo orden cuando las raíces son números reales. Se utilizará para desarrollar las diferentes respuestas.

Respuesta escalón

Como en la sección anterior, se supone que la entrada es un cambio escalón de magnitud Δx. Sustituyendo después $X(s) = \Delta x/s$ en la ecuación 2-5.9 y expandiendo en fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{K}{(\tau_{e1} s + 1)(\tau_{e2} s + 1)} \frac{\Delta x}{s} = \frac{A_1}{s + \dfrac{1}{\tau_{e1}}} + \frac{A_2}{s + \dfrac{1}{\tau_{e2}}} + \frac{A_3}{s}$$

Evaluando los coeficientes e invirtiendo para obtener la respuesta de la salida, se obtiene

$$Y(t) = K\Delta x\left[u(t) - \frac{\tau_{e1}}{\tau_{e1} - \tau_{e2}} e^{-t/\tau_{e1}} - \frac{\tau_{e2}}{\tau_{e2} - \tau_{e1}} e^{-t/\tau_{e2}}\right] \tag{2-5.10}$$

Para el caso críticamente amortiguado, $\zeta = 1$, las dos raíces son iguales entre sí, $\tau_{e1} = \tau_{e2} = \tau$, y la respuesta está dada por

$$Y(t) = K\Delta x\left[u(t) - \left(\frac{t}{\tau} + 1\right) e^{-t/\tau}\right] \tag{2-5.11}$$

En la figura 2-5.1 se muestran dos respuestas escalón típicas, una sobreamortiguada y otra críticamente amortiguada. Ambas son monótonas (no oscilatorias). Nótese que la tasa de cambio inicial de la respuesta es cero, luego se incrementa hasta un máximo, y finalmente se reduce hasta acercarse exponencialmente a su cambio final de estado estacionario de $K\Delta x$. Esta respuesta difiere de la respuesta escalón de primer orden de la figura 2-4.1 en la que la tasa de cambio máxima ocurre justo después de que se aplicó el cambio escalón (en el tiempo cero).

Las respuestas escalón con forma de S de la figura 2-5.1 son características de muchos procesos.

Respuesta rampa

La respuesta a una rampa con tasa r, $X(t) = rt$, se obtiene sustituyendo su transformada, $X(s) = r/s^2$, en la ecuación 2-5.9, expandiendo en fracciones parciales e invirtiendo. Cuando las dos constantes de tiempo son diferentes, la respuesta rampa es

$$Y(t) = Kr\left[\frac{\tau_{e1}^2}{\tau_{e1} - \tau_{e2}} e^{-t/\tau_{e1}} + \frac{\tau_{e2}^2}{\tau_{e2} - \tau_{e1}} e^{-t/\tau_{e2}} + t - (\tau_{e1} + \tau_{e2})\right] \tag{2-5.12}$$

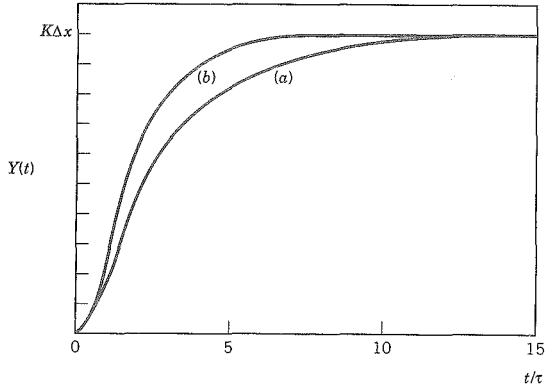


Figura 2-5.1 Respuestas escalón de segundo orden. (*a*) Sobreamortiguada ($\zeta = 1.5$). (*b*) Críticamente amortiguada ($\zeta = 1.0$).

Cuando las dos constantes son iguales a τ, la respuesta rampa es

$$Y(t) = Kr[(t + 2\tau)e^{-t/\tau} + t - 2\tau)] \tag{2-5.13}$$

La característica importante común en ambas respuestas es que después que el término exponencial desaparece, la respuesta se vuelve una rampa de tasa Kr. Esta rampa de salida está retrasada respecto a la rampa de entrada por la suma de las dos constantes de tiempo. Este resultado se puede extender a sistemas de orden superior si todas las raíces del denominador son números reales negativos. La rampa de salida para un sistema de orden n está retrasada respecto a la rampa de entrada por la suma de las n constantes de tiempo efectivas, donde estas últimas se definen como los recíprocos negativos de las raíces.

Respuesta sinusoidal

Para obtener la respuesta a una onda sinusoidal de amplitud A y frecuencia ω radianes/tiempo, $X(t) = A$ sen ωt, se sustituye su transformada, $X(s) = A\omega/(s^2 + \omega^2)$, en la ecuación 2-5.6, se expande en fracciones parciales y se invierte. En el capítulo 8 se presenta un procedimiento formal para llevar a cabo esta operación. Se presenta aquí la respuesta resultante:

$$Y(t) = A_1 e^{-t/\tau_{e1}} + A_2 e^{-t/\tau_{e2}} + \frac{KA}{\sqrt{1+\tau_{e1}^2\omega^2}\sqrt{1+\tau_{e2}^2\omega^2}}\operatorname{sen}(\omega t + \theta) \tag{2-5.14}$$

donde $\theta = \tan^{-1}(-\omega\tau_{e1}) + \tan^{-1}(-\omega\tau_{e2})$.

Dado que los términos exponenciales desaparecen y el término sinusoidal no, los coeficientes de los términos exponenciales no son importantes. Para la respuesta sinusoidal, las dos características importantes son que la amplitud de la onda sinusoidal de salida se reduce a medida que la frecuencia de la onda sinusoidal de entrada aumenta, y que el ángulo de fase se vuelve más negativo a medida que la frecuencia aumenta.

Incluso es más interesante notar que el efecto de los dos atrasos de tiempo sobre la amplitud es multiplicativo. Esto quiere decir que la reducción en la amplitud de la salida es el producto de las reducciones que cada atraso causaría si estuviera actuando solo. Del mismo modo, el efecto de los dos atrasos sobre el ángulo de fase es aditivo; el efecto es la suma de los efectos que cada atraso causaría si estuviera solo. Este resultado se puede extender a sistemas de orden n, si todas las raíces del denominador de la función de transferencia son números reales negativos. La reducción en la amplitud de la onda de salida es el producto de las reducciones que cada uno de los n atrasos causaría si actuara por separado. Asimismo, el ángulo de fase es la suma de los ángulos de fase que cada uno de los n atrasos causaría por separado. En el capítulo 8 se presenta este concepto con mayor detalle.

Todas las ecuaciones para las respuestas presentadas en esta sección se aplican tanto para razones de amortiguamiento mayores o iguales que la unidad como para las menores o iguales que menos uno. La diferencia es que, para razones de amortiguamiento positivas, las dos constantes de tiempo efectivas son positivas (ambas raíces son negativas) y la respuesta es estable. Por otra parte, cuando la razón de amortiguamiento es negativa, las constantes de tiempo efectivas son negativas (las raíces son positivas) y la respuesta es monótonamente inestable; es decir, la salida se aparta exponencialmente de su condición inicial.

2-5.2 Respuestas subamortiguadas

El estudio de las respuestas subamortiguadas, u oscilatorias, es importante porque es la respuesta más común de los sistemas de control por retroalimentación. Muchos dispositivos comunes, como péndulos, columpios, yo-yos, sistemas de suspensión de automóviles y puertas en tiendas departamentales, también exhiben este comportamiento oscilatorio.

Los sistemas de segundo orden descritos por la ecuación 2-5.4 tienen respuestas subamortiguadas cuando la razón de amortiguamiento está entre -1 y $+1$. La ecuación 2-5.6 indica que en estos casos las raíces del denominador de la función de transferencia son un par de raíces conjugadas complejas.

$$r_{1,2} = \frac{-\zeta \pm \sqrt{-1(1-\zeta^2)}}{\tau} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm i\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} \tag{2-5.15}$$

En la sección 2-3 se vio que estas dos raíces resultan en una respuesta que contiene una onda sinusoidal con la frecuencia igual a la parte imaginaria y una tasa de asentamiento igual al valor de la parte real. Si la razón de amortiguamiento es positiva, $0 < \zeta < 1$, la amplitud de las oscilaciones disminuye con el tiempo y la respuesta es estable; si ζ es negativa, la amplitud de la respuesta aumenta con el tiempo y la respuesta es inestable; si $\zeta = 0$, las oscilaciones se mantienen y se dice que el sistema es *no amortiguado*. Habiendo discutido estas generalidades de la respuesta, se presentan ahora las respuestas específicas a varias señales de entrada.

Respuesta escalón

Para obtener la respuesta escalón, sea la señal de entrada un escalón de magnitud Δx, $X(t) = \Delta x\, u(t)$, y se sustituye su transformada de Laplace, $X(s) = \Delta x/s$, en la ecuación 2-5.5. Usando el método de expansión de fracciones parciales y la ecuación 2-3.11 se obtiene la respuesta

$$Y(t) = K\Delta x\left[u(t) - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-(\zeta/\tau)t}\operatorname{sen}(\psi t + \phi)\right] \tag{2-5.16}$$

donde:

$$\psi = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} \text{ es la frecuencia en radianes/tiempo}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \text{ es el ángulo de fase en radianes.}$$

En la figura 2-5.2 se muestra la gráfica de esta respuesta. Nótese que, como en el caso de las respuestas sobreamortiguadas de la figura 2-5.1, la tasa de cambio máxima no ocurre justo después de aplicar el cambio escalón como en la respuesta de primer orden. De hecho, la tasa de cambio inicial es cero. A diferencia de la respuesta sobreamortiguada, la respuesta subamortiguada oscila alrededor de su estado estacionario final, $K\,\Delta x$, que es también el estado estacionario para las otras respuestas escalón.

La respuesta escalón subamortiguada es tan importante que se ha caracterizado con varios términos. Como para cualquier onda sinusoidal, el periodo de oscilación es el tiempo que toma completar un ciclo completo, o 2π radianes:

$$T = \frac{2\pi}{\psi} = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2-5.17}$$

Como se muestra en la figura 2-5.2, el periodo se puede medir en la respuesta por el tiempo entre dos picos consecutivos en la misma dirección. A continuación se definen otros términos.

Aunque la unidad SI de frecuencia en el sistema internacional de unidades es el hertz (Hz), que es el recíproco del periodo T en segundos, o el número de ciclos por segundo, las fórmulas que se presentan a continuación requieren que las frecuencias se indiquen en radianes por unidad de tiempo; también requieren que los ángulos se indiquen en radianes y no en grados u otras unidades.

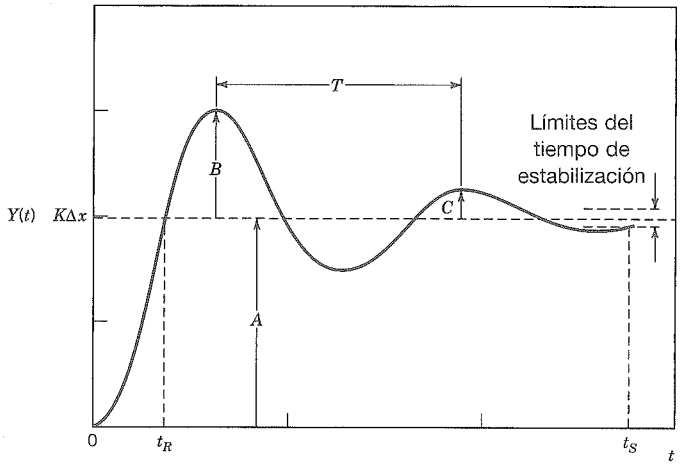


Figura 2-5.2 Respuesta escalón de segundo orden subamortiguada ($\zeta = 0.215$).

Razón de asentamiento. La razón de asentamiento (*decay ratio*) es la razón a la cual la amplitud de la onda sinusoidal se reduce durante un ciclo completo. Se define como el cociente de dos picos consecutivos en la misma dirección, *C/B* en la figura 2-5.2:

$$\text{Razón de asentamiento} = e^{-(\zeta/\tau)T} = e^{-2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2-5.18}$$

Éste es un término muy importante, ya que sirve como criterio para establecer la respuesta satisfactoria del sistema de controladores por retroalimentación.

Tiempo de elevación. El tiempo de elevación (*rise time*) es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez su valor final de estado estacionario, t_R en la figura 2-5.2. Este tiempo se puede aproximar como un cuarto del periodo *T*.

Tiempo de estabilización. El tiempo de estabilización (*settling time*) es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar ciertos límites preestablecidos del valor final de estado estacionario y permanecer dentro de ellos. Valores típicos son ±5%, ±3% o ±1% del cambio final. El tiempo de estabilización es t_S en la figura 2-5.2. Como se vio en la sección 2-3, la parte real de las raíces del denominador de la función de transferencia controla el tiempo de estabilización. Para los límites de ±1%, este tiempo es aproximadamente $5\tau/\zeta$.

Sobrepaso. El sobrepaso (*overshoot*) es la fracción (o porcentaje) del cambio en el valor final de estado estacionario por la que el primer pico excede este cambio. Suponiendo que el primer pico ocurre aproximadamente a la mitad del ciclo después de aplicar el cambio escalón, el sobrepaso es:

$$\text{Sobrepaso} = e^{-(\zeta/\tau)(T/2)} = e^{-(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})} \tag{2-5.19}$$

Tabla 2-5.1 Respuesta escalón de segundo orden subamortiguada

Razón de amortiguamiento (ζ)	Razón de asentamiento	Sobrepaso %	$\frac{t_R}{\tau}$	$\frac{t_S}{\tau}$, ±1%
1.0	0	0	—	7.0
0.707	1/500	4.3	2.2	7.1
0.344	1/10	29.3	1.8	14.5
0.215	1/4	50.0	1.6	23.2
0	1/1	100	$\pi/2$	∞

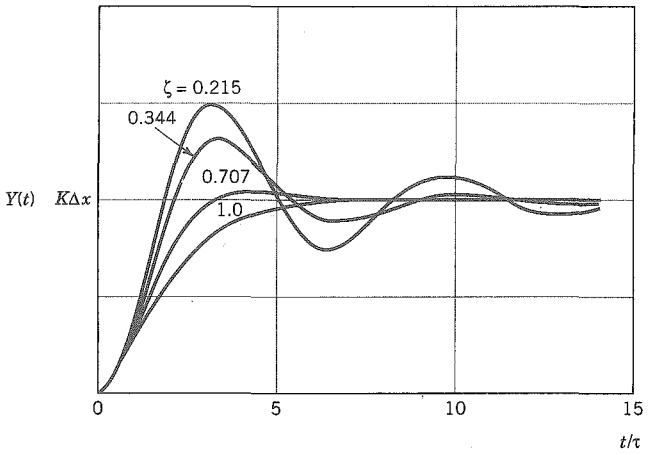


Figura 2-5.3 Efecto de la razón de amortiguamiento sobre la respuesta escalón de segundo orden subamortiguada.

En la figura 2-5.2 se muestra cómo obtener el sobrepaso a partir de la gráfica de la respuesta escalón; es el cociente B/A, donde $K\,\Delta x$.

Por el número de términos presentados hasta este punto puede verse que la respuesta escalón de sistemas subamortiguados es un tema importante. En la tabla 2-5.1 se muestra el valor numérico de varios de estos términos para diversos valores de la razón de amortiguamiento. La figura 2-5.3 muestra las gráficas de la respuesta escalón subamortiguada para varios valores de la razón de amortiguamiento.

Respuesta rampa

Para obtener la respuesta de un sistema subamortiguado de segundo orden a una entrada en forma de rampa con una tasa r, $X(t) = rt$, se sustituye su transformada, $X(s) = r/s^2$, en la ecuación 2-5.5. Después se expande en fracciones parciales, se evalúan los coeficientes y se invierte. El resultado es

$$Y(t) = Kr\left[\frac{\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-(\zeta/\tau)t}\operatorname{sen}(\psi t + \phi) + t - 2\zeta\tau\right] \qquad \textbf{(2-5.20)}$$

donde:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta^2 - 1}\right)$$

y ψ es la frecuencia, que es la misma que la del cambio escalón. La característica importante de esta respuesta es que, después que los términos sinusoidales desaparecen, la respuesta es una

rampa de tasa Kr que sigue a la entrada por un tiempo de retraso que disminuye a medida que la razón de amortiguamiento disminuye. Para una respuesta no amortiguada, $\zeta = 0$, la respuesta de salida es una oscilación sostenida alrededor de la rampa de entrada.

Respuesta a una entrada sinusoidal

Para obtener la respuesta subamortiguada del sistema de segundo orden a una onda sinusoidal con amplitud y frecuencia ω, A sen ωt, se sustituye su transformada, $X(s) = A\omega/(s^2 + \omega^2)$, en la ecuación 2-5.5. Después se expande en fracciones parciales, se evalúan los coeficientes y se invierte. El resultado es

$$Y(t) = KADe^{-(\zeta/\tau)t}\operatorname{sen}(\psi t + \phi) + \frac{KA}{\sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\zeta\tau\omega)^2}}\operatorname{sen}(\omega t + \theta) \qquad \text{(2-5.21)}$$

donde:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\tau\omega}{1-\tau^2\omega^2}\right)$$

La amplitud D y el ángulo de fase ϕ del primer término seno no son importantes porque éste es el término que decae con el tiempo. Una vez que este término decae, la respuesta de salida es una onda sinusoidal con frecuencia igual a la frecuencia de la señal de entrada. La amplitud y el ángulo de fase de la salida son funciones de la frecuencia. Un efecto interesante en la respuesta sinusoidal de sistemas subamortiguados es lo que sucede cuando la frecuencia de entrada es la *frecuencia de resonancia* del sistema, igual a $1/\tau$. De acuerdo con la ecuación 2-5.21, a la frecuencia de resonancia la razón de la amplitud de la onda sinusoidal de salida y la amplitud de la onda de entrada está dada por $K/2\zeta$, es decir, es inversamente proporcional a la razón de amortiguamiento. Este fenómeno, conocido como *resonancia,* puede resultar en amplitudes de salida muy altas cuando la razón de amortiguamiento es muy baja. En los años 1940 el puente Tacoma Narrows, en el estado de Washington, se vino abajo cuando el viento lo hizo oscilar a su frecuencia de resonancia.

2-5.3 Respuestas de orden superior

Las respuestas de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales de orden superior a dos se pueden considerar como una combinación de respuestas de retardos de primer orden y de respuestas subamortiguadas de segundo orden. Cuando todas las raíces del denominador de la función de transferencia son reales, un sistema de orden n es una combinación de n retardos de primer orden. Muy fácilmente se pueden extender los resultados de las respuestas de los

sistemas sobreamortiguados de segundo orden a las respuestas de sistemas sobreamortiguados de orden superior. Por ejemplo, considérese el siguiente sistema sobreamortiguado de orden n:

$$Y(s) = \left[\frac{K}{\prod_{k=1}^{n} (\tau_k s + 1)} \right] X(s) \tag{2-5.22}$$

donde K es la ganancia y las τ_k son las n constantes de tiempo efectivas, o los recíprocos negativos de las n raíces del polinomio del denominador. La respuesta de este sistema a un cambio escalón de magnitud Δx, $X(s) = \Delta x/s$, cuando todas las constantes de tiempo son diferentes entre sí, está dada por

$$Y(t) = K\Delta x \left[u(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\tau_k^{n-1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (\tau_k - \tau_j)} e^{-t/\tau_k} \right] \tag{2-5.23}$$

Nótese que la ecuación 2-5.10 es un caso especial de la ecuación 2-5.23 para $n = 2$. Cuando todas las n constantes de tiempo son iguales entre sí, la respuesta está dada por

$$Y(t) = K\Delta x \left[u(t) - e^{-t/\tau} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{n-k} \right] \tag{2-5.24}$$

donde τ es la constante de tiempo repetida n veces. Nótese que la ecuación 2-5.11 es un caso especial de la ecuación 2-5.24 para $n = 2$.

Si la función de transferencia de un sistema de orden contiene términos de adelanto,

$$Y(s) = \left[\frac{K \prod_{j=1}^{m} (\tau_{ldj} s + 1)}{\prod_{k=1}^{n} (\tau_{lgk} s + 1)} \right] X(s) \tag{2-5.25}$$

donde $n \geq m$, la respuesta escalón cuando todas las constantes de tiempo de atraso son diferentes entre sí, está dada por

$$Y(t) = K\Delta x \left[u(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\tau_{lgk}^{n-m-1} \prod_{j=1}^{m} (\tau_{lgk} - \tau_{ldj})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (\tau_{lgk} - \tau_{lgj})} e^{-t/\tau_{lgk}} \right] \tag{2-5.26}$$

El efecto de los términos de adelanto es hacer la respuesta más rápida si las constantes de tiempo de adelanto son positivas o más lenta si son negativas.

Para sistemas subamortiguados de orden superior, los términos para la respuesta escalón de segundo orden definidos en esta sección también aplican. Sin embargo, las fórmulas presentadas para calcular los términos característicos sólo son válidas para estimar la contribución de los pares individuales de raíces conjugadas complejas en la respuesta global. La exactitud de la estimación del sobrepaso, el tiempo de elevación y la razón de asentamiento de la respuesta total depende de qué tan dominante sea el par de raíces conjugadas complejas con respecto a las otras raíces. Recuérdese, por la sección 2-3, que las raíces dominantes son las que tienen el menor número de partes reales negativas, es decir, los términos de la respuesta a los que les toma más tiempo decaer.

2-6 LINEALIZACIÓN

Al analizar la respuesta dinámica de muchos procesos, una de las principales dificultades es cuando son no lineales, es decir, cuando no se pueden representar con ecuaciones diferenciales lineales. Para que una ecuación diferencial sea lineal, cada uno de sus términos no debe contener más de una variable o derivada, la cual debe estar a la primera potencia. En las secciones anteriores se vio que el método de la transformada de Laplace permite relacionar las características de la respuesta de una amplia variedad de sistemas físicos con los parámetros de sus funciones de transferencia. Desafortunadamente, con la transformada de Laplace sólo se pueden analizar sistemas lineales. No existe una técnica comparable que permita analizar la dinámica de un sistema no lineal y generalizar los resultados para representar sistemas físicos similares.

En esta sección se estudia la técnica conocida como *linealización* para aproximar la respuesta de sistemas no lineales con ecuaciones diferenciales lineales que se pueden analizar mediante transformadas de Laplace. La aproximación lineal de las ecuaciones no lineales es válida para una región próxima a algún punto base alrededor del cual se realiza la linealización. Para facilitar la manipulación de las ecuaciones linealizadas, se elige el estado estacionario inicial como punto base para la linealización, y se usan las *variables de desviación* (o *de perturbación)* que se definieron en la sección 2-3.1.

Se presenta a continuación una lista de funciones no lineales comunes que aparecen en los modelos de procesos dinámicos:

- La entalpía, H, como una función de la temperatura, T:

$$H[T(t)] = H_0 + a_1T(t) + a_2T^2(t) + a_3T^3(t) + a_4T^4(t) \tag{2-6.1}$$

  donde H_0, a_1, a_2, a_3 y a_4 son constantes.
- La ecuación de Antoine para la presión de vapor de una sustancia pura, p^o, como una función de la temperatura, T:

$$p^o[T(t)] = e^{A-B/[T(t)+C]} \tag{2-6.2}$$

  donde A, B, y C son constantes.
- La fracción molar de vapor en equilibrio, y, como una función de la fracción molar del líquido, x:

$$y[x(t)] = \frac{\alpha x(t)}{1+(\alpha-1)x(t)} \tag{2-6.3}$$

  donde α es la volatilidad relativa, por lo general considerada constante.
- Flujo de fluido, f, como una función de la caída de presión, Δp:

$$f[\Delta p(t)] = k\sqrt{\Delta p(t)} \tag{2-6.4}$$

  donde k es un coeficiente de conductancia constante.
- Tasa de transferencia de calor por radiación, q, como una función de temperatura, T:

$$q[T(t)] = \varepsilon\sigma AT^4(t) \tag{2-6.5}$$

  donde $\in$, σ y A son constantes.
- La ecuación de Arrhenius para la dependencia del coeficiente de la tasa de reacción, k, de la temperatura, T:

$$k[T(t)] = k_0e^{-E/RT(t)} \tag{2-6.6}$$

  donde k_0, E y R son constantes.
- La tasa de reacción, r, como una función de la temperatura, T, y de las concentraciones de los reactivos, c_A, c_B,...,

$$r[T(t), c_A(t), c_B(t), \ldots] = k[T(t)]c_A^a(t)c_B^b(t)\ldots \tag{2-6.7}$$

  donde $k[T(t)]$ está dada por la ecuación 2-6.6, y a, b,..., son constantes.

Todas estas funciones no lineales, con excepción de la última, son funciones de una sola variable. A continuación se presenta el procedimiento de linealización para funciones de una sola variable y después se amplía a funciones de dos o más variables.

2-6.1 Linealización de funciones de una variable

Cualquier función se puede expandir en una serie de Taylor alrededor de un punto base como sigue:

$$f[x(t)] = f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} [x(t)-\bar{x}] + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{\bar{x}} [x(t)-\bar{x}]^2 + \cdots \tag{2-6.8}$$

donde $\bar{x}$ es el valor base de x alrededor del cual se expande la función. La linealización de la función $f[x(t)]$ consiste en aproximarla utilizando tan sólo los dos primeros términos de la expansión en la serie de Taylor:

$$f[x(t)] \approx f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} [x(t)-\bar{x}] \tag{2-6.9}$$

Ésta es la fórmula básica de linealización. Como $\bar{x}$ es una constante, el lado derecho de la ecuación es lineal en la variable $x(t)$.

En la figura 2-6.1 se da una interpretación gráfica de la fórmula de linealización, la ecuación 2-6.9. La aproximación lineal es una recta que pasa por el punto $[\bar{x}, f(\bar{x})]$ con pendiente $df/dx|_{\bar{x}}$. Esta recta es por definición tangente a $f(x)$ en $\bar{x}$. Note que la diferencia entre la función no lineal y su aproximación lineal es pequeña cerca del punto base $\bar{x}$ y que se hace más grande entre más lejos se encuentre $x(t)$ de $\bar{x}$. El rango en que la aproximación lineal es precisa depende de la función. La curvatura de algunas funciones es más pronunciada que la de otras y, en consecuencia, tienen un rango más estrecho en el que la aproximación lineal es precisa.

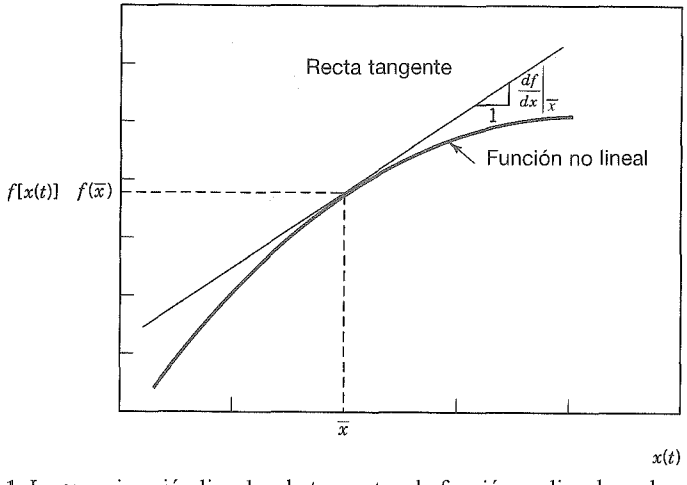


Figura 2-6.1 La aproximación lineal es la tangente a la función no lineal en el punto base $\bar{x}$.

Es importante tener presente que lo que afecta los parámetros de la función de transferencia de un sistema linealizado es la pendiente, $df/dx|_{\bar{x}}$ y no el valor de la función en sí, $f(\bar{x})$. Lo anterior se hará evidente cuando se muestre cómo aplicar la técnica de linealización a ecuaciones diferenciales no lineales. En el ejemplo siguiente se ilustra la aplicación de la fórmula de linealización.

Ejemplo 2-6.1 Linealizar la ecuación de Arrhenius, ecuación 2-6.6, para la dependencia de los coeficientes de la tasa de reacción química de la temperatura. Para una reacción química con un coeficiente $k(\bar{T}) = 100\ s^{-1}$ y una energía de activación $E = 22\ 000$ kcal/kmol, estimar el error en la pendiente de la función en el rango de ±10°C alrededor de $\bar{T} = 300°C$ (573 K).

Solución Aplicando la fórmula de linealización, ecuación 2-6.9, a la ecuación 2-6.6,

$$k[T(t)] \approx k(\bar{T}) + \left.\frac{dk}{dT}\right|_{\bar{T}} [T(t) - \bar{T}]$$

donde:

$$\left.\frac{dk}{dT}\right|_{\bar{T}} = \frac{d}{dT}\left[k_0 e^{-E/(RT(t))}\right]_{T=\bar{T}} = k_0 e^{-E/(R\bar{T})} \frac{E}{R\bar{T}^2} = k(\bar{T})\frac{E}{R\bar{T}^2}$$

Para los valores numéricos dados, con $R = 1.987$ kcal/kmol-K (la constante de la ley de gases ideales), el valor de la pendiente es

$$\left.\frac{dk}{dT}\right|_{300°C} = (100 s^{-1}) \frac{(22\ 000 \text{kcal/kmol})}{1.987 \text{ kcal/kmol-K})(300 + 273 \text{ K})^2} = 3.37 \frac{s^{-1}}{°C}$$

y la aproximación lineal de la función es

$$k[T(t)] \approx 100\ s^{-1} + \left(3.37 \frac{s^{-1}}{°C}\right)[T(t) - \bar{T}]$$

Los valores de la verdadera función y su pendiente en el rango de 290°C a 310°C son

$$\text{En } T = 290°C, \quad k(T) = 70.95\ s^{-1}, \quad \frac{dk}{dT} = 2.48 \frac{s^{-1}}{°C}$$

$$\text{En } T = 310°C, \quad k(T) = 139.3\ s^{-1}, \quad \frac{dk}{dT} = 4.54 \frac{s^{-1}}{°C}$$

En comparación, la aproximación lineal de la función predice $k(290°C) = 100 + 3.37(290 - 300) = 66.3\ s^{-1}$, con un error de –6.6%, y $k(310°C) = 133.7\ s^{-1}$, con un error de –4%. Como en el caso de la pendiente, varía de 2.48 a 4.54 $s^{-1}/°C$, lo cual representa una diferencia de –26.4% a +34.7% del valor de la aproximación lineal, 3.37 $s^{-1}/°C$.

Este ejemplo indica que, para el caso de la fórmula de Arrhenius, la aproximación lineal es precisa en un rango más amplio para la función que para su pendiente. Desafortunadamente, es la pendiente la que afecta los parámetros de la función de transferencia. Sin embargo, un error de ±35% en los parámetros suele ser satisfactorio en muchos cálculos de sistemas de control.

2-6.2 Linealización de funciones de dos o más variables

La serie de expansión de Taylor se puede usar para deducir la fórmula de linealización para funciones de dos o más variables, justo como se hizo para deducir la ecuación 2-6.9. En este caso se conserva el término de la primera derivada parcial de cada una de las variables. La aproximación lineal resultante es

$$f[x_1(t), x_2(t), \ldots] \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots) + \overline{\frac{\partial f}{\partial x_1}}[x_1(t) - \bar{x}_1] + \overline{\frac{\partial f}{\partial x_2}}[x_2(t) - \bar{x}_2] + \cdots \qquad \textbf{(2-6.10)}$$

donde $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)}$ y $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$,..., son los valores base de cada variable. Recuerde, del cálculo, que la derivada parcial es el cambio con respecto a una variable manteniendo todas las otras variables constantes. Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la ecuación 2-6.10 para linealizar funciones no lineales de más de una variable.

Ejemplo 2-6.2 Una función no lineal común que se presenta en los balances de componentes y energía es el producto de dos variables (flujo y composición, flujo y entalpía específica, etc.). La linealización de esta función es tan simple que a veces resulta difícil de captar. Como un ejemplo de esta sencilla función, considere el área a de un rectángulo como una función de su ancho, w, y su altura, h:

$$a[w(t), h(t)] = w(t)h(t)$$

Usando la ecuación 2-6.10, la linealización resulta en

$$\begin{aligned} a[\omega(t), h(t)] &\approx a(\bar{w}, \bar{h}) + \left.\frac{\partial a}{\partial \omega}\right|_{(\bar{\omega}, \bar{h})}[\omega(t) - \bar{\omega}] + \left.\frac{\partial a}{\partial h}\right|_{(\bar{w}, \bar{h})}[h(t) - \bar{h}] \\ &\approx a(\bar{w}, \bar{h}) + \bar{h}[w(t) - \bar{w}] + \bar{w}[h(t) - \bar{h}] \end{aligned}$$

Como se muestra gráficamente en la figura 2-6.2, el error de esta aproximación es el área del rectángulo pequeño de la esquina superior derecha, $[w(t) - \bar{w}][h(t) - \bar{h}]$. Este error es pequeño para incrementos relativamente pequeños en el ancho y la altura. Por ejemplo, suponga que los valores base son $\bar{w} = 2$ m, $\bar{h} = 1$ m, y que se incrementan a 2.2 m y 1.1 m, respectivamente. Entonces el error entre el área real, 2.42 m^2, y la aproximación, $2.0 + 1(0.2) + 2(0.1) = 2.40$ m^2, es el área del rectángulo, $(0.2)(0.1) = 0.02$ m^2. Una vez más, la precisión en la función es buena (−0.8%), pero las pendientes difieren en 10%.

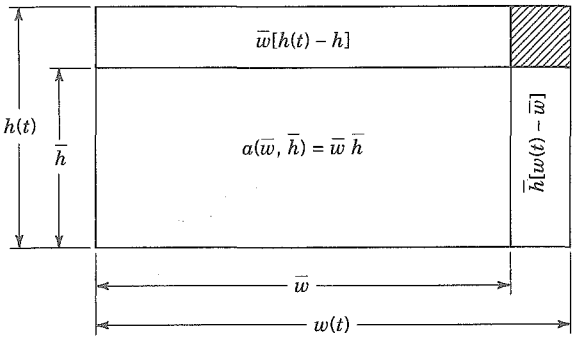


Figura 2-6.2 El área sombreada es el error en la aproximación lineal de la función $a[w(t), h(t)] = w(t)h(t)$.

Ejemplo 2-6.3 La densidad de un gas ideal es una función de la presión y la temperatura:

$$\rho[p(t), T(t)] = \frac{Mp(t)}{RT(t)}$$

donde M es el peso molecular, $p(t)$ es la presión absoluta, $T(t)$ es la temperatura absoluta y R es la constante de la ley de gases ideales. Obtener la aproximación lineal de la densidad y evaluarla para el aire ($M = 29$) a 300 K y a la presión atmosférica, 101.3 kPa. En estas unidades del SI, la constante de la ley de gases ideales es 8.314 kPa-m^3/kmol-K.

Solución A partir de la ecuación 2-6.10, se obtiene

$$\begin{aligned}
\rho[p(t),T(t)] &\approx \rho(\bar{p},\bar{T}) + \left.\frac{\partial \rho}{\partial p}\right|_{(\bar{p},\bar{T})} [p(t)-\bar{p}] + \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{(\bar{p},\bar{T})} [T(t)-\bar{T}] \\
&\approx \frac{M\bar{p}}{R\bar{T}} + \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{Mp(t)}{RT(t)}\right]_{(\bar{p},\bar{T})} [p(t)-\bar{p}] + \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{Mp(t)}{RT(t)}\right]_{(\bar{p},\bar{T})} [T(t)-\bar{T}] \\
&\approx \frac{M\bar{p}}{R\bar{T}} + \frac{M}{R\bar{T}}[p(t)-\bar{p}] - \frac{M\bar{p}}{R\bar{T}^2}[T(t)-\bar{T}]
\end{aligned}$$

Numéricamente, los valores son

$$\begin{aligned}
\rho[p(t),T(t)] \approx &\left(1.178\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) + \left(0.01163\frac{\text{kg}}{\text{m}^3\text{-kPa}}\right)[p(t) - 101.3\,\text{kPa}] \\
&- \left(0.00393\frac{\text{kg}}{\text{m}^3\text{-K}}\right)[T(t) - 300\text{K}]
\end{aligned}$$

donde ρ está en kg/m^3, p está en kPa y T está en K.

Un punto a observar en los ejemplos anteriores es que, en las aproximaciones lineales, el coeficiente de cada variable es constante. Así, aunque a veces estos coeficientes se indican como funciones de los valores base de las variables, las ecuaciones no serían lineales si estos valores base no se supusieran constantes. Siempre que los coeficientes se puedan expresar como funciones de los valores base, podrán calcularse para diferentes valores base. Se aplica a continuación lo aprendido para linealizar ecuaciones diferenciales no lineales.

2-6.3 Linealización de ecuaciones diferenciales

En el siguiente procedimiento para linealizar ecuaciones diferenciales no lineales se supone que éstas pueden expresarse como ecuaciones de primer orden. No se trata de una restricción significativa porque, como se verá en los capítulos 3 y 4, los modelos de procesos dinámicos consisten por lo general en el desarrollo de un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. Sólo después de linealizarlas y obtener su transformada de Laplace, las ecuaciones podrán combinarse para formar ecuaciones de orden superior. Esto se debe a que es mucho más fácil manipular las ecuaciones algebraicas que relacionan las transformadas que las ecuaciones diferenciales originales. La mayoría de los programas de simulación por computadora también requieren que las ecuaciones diferenciales sean de primer orden.

En el siguiente procedimiento se supone, como se ha venido haciendo, que las condiciones iniciales se encuentran en estado estacionario. Además, se selecciona este estado estacionario inicial como el punto base para la linealización, ya que con esto las ecuaciones linealizadas se simplifican significativamente.

Considere la siguiente ecuación diferencial de primer orden con una sola entrada:

$$\frac{dy(t)}{dt} = g[x(t), y(t)] + b \tag{2-6.11}$$

donde $g[x(t), y(t)]$ es una función no lineal de la variable de entrada, $x(t)$, y de la variable de salida, $y(t)$, y b es una constante. En las condiciones iniciales de estado estacionario, la ecuación 2-6.11 se puede escribir:

$$0 = g(\bar{x}, \bar{y}) + b \tag{2-6.12}$$

donde las condiciones iniciales, $\bar{x} = x(0)$, $\bar{y} = y(0)$, se han elegido como el punto base para la linealización. Note que la derivada con respecto al tiempo es cero por el supuesto de que se comienza de un estado estacionario. Restando la ecuación 2-6.12 de la ecuación 2-6.11 se obtiene

$$\frac{dy(t)}{dt} = g[x(t), y(t)] - g(\bar{x}, \bar{y}) \tag{2-6.13}$$

Si se aproxima ahora la ecuación 2-6.13 usando la fórmula para la linealización de funciones multivariables, ecuación 2-6.10, el resultado es

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{y})} [x(t)-\bar{x}] + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(\bar{x},\bar{y})} [y(t)-\bar{y}] \tag{2-6.14}$$

Debido a que los términos $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las condiciones iniciales, los términos entre corchetes son las variables de desviación que se introdujeron en la sección 2-3.1. Sustituyendo las variables de desviación, $X(t) = x(t) - \bar{x}$ y $Y(t) = y(t) - \bar{y}$, se obtiene

$$\frac{dY(t)}{dt} \approx a_1 X(t) + a_2 Y(t) \tag{2-6.15}$$

donde $a_1 = \partial g/\partial x\big|_{(\bar{x},\,\bar{y})}$ y $a_2 = \partial g/\partial y\big|_{(\bar{x},\,\bar{y})}$.

En general, el procedimiento anterior se puede aplicar a cualquier ecuación con cualquier número de variables. La ecuación 2-6.15 es la aproximación lineal de la ecuación 2-6.11; al comparar las dos ecuaciones se puede notar lo siguiente:

- La constante b en la ecuación 2-6.11 se cancela. No debe haber ningún término constante en la ecuación que relacione las variables de desviación.
- La ecuación linealizada, ecuación 2-6.15, reemplaza el lado derecho de la ecuación no lineal original con una suma de términos que consisten cada uno de ellos en una constante multiplicada por una variable de desviación para cada variable que aparece en el lado derecho de la ecuación diferencial original.
- La condición inicial de la variable de desviación es cero, $Y(0) = y(0) - y(0) = 0$.

A continuación se ilustra con un ejemplo el procedimiento de linealización.

Ejemplo 2-6.4 La siguiente ecuación diferencial resulta de un balance de masa de un reactivo en un reactor de tanque con agitador (el modelo completo del reactor se desarrolla en el capítulo 4).

$$\frac{dc_A(t)}{dt} = \frac{1}{V} f(t) c_{Ai}(t) - \frac{1}{V} f(t) c_A(t) - k[T(t)] c_A(t)$$

donde $k[T(t)]$ es la expresión de Arrhenius para la dependencia de la tasa de reacción con respecto a la temperatura, ecuación 2-6.6. Esta función se linealizó en el ejemplo 2-6.1. Se supone que V, el volumen del reactor, es constante. Las variables de entrada son $f(t)$, el flujo de reactivos, y $c_{Ai}(t)$, la concentración del reactivo en el caudal de entrada, en tanto que las variables de salida son $T(t)$, la temperatura del reactor, y $c_A(t)$, la concentración del reactivo. Obtener la aproximación lineal de la ecuación diferencial y las expresiones para la constante de tiempo y las ganancias de la función de transferencia de la concentración del reactivo.

Solución Todos los términos de la ecuación son no lineales; los dos primeros términos consisten en el producto de dos variables, y el tercer término es un producto de dos variables donde una de ellas es la función no lineal de Arrhenius. Se podría hacer la linealización de cada término a la vez, sustituir las aproximaciones lineales en la ecuación diferencial, para restar después la ecuación de estado estacionario inicial y expresarla en términos de variables de desviación. Sin embargo, las manipulaciones algebraicas pueden simplificarse mediante el siguiente procedimiento.

Se define el lado derecho de la ecuación como una función no lineal de las cuatro variables que aparecen en ella.

$$\frac{dc_A(t)}{dt} = g[f(t), c_{Ai}(t), T(t), c_A(t)]$$

$$= \frac{1}{V} f(t) c_{Ai}(t) - \frac{1}{V} f(t)\, c_A(t) - k[T(t)] c_A(t)$$

Entonces, por comparación con la ecuación 2-6.11 y su aproximación lineal, ecuación 2-6.15, se sabe que la aproximación lineal es de la forma

$$\frac{dC_A(t)}{dt} = a_1 F(t) + a_2 C_{Ai}(t) + a_3 \Gamma(t) + a_4 C_A(t)$$

donde $C_A(t) = c_A(t) - \overline{c_A}, F(t) = f(t) - \overline{f}, C_{Ai}(t) = c_{Ai}(t) - \overline{c}_{Ai}, \Gamma(t) = T(t) - \overline{T}$ son las variables de desviación y las constantes se evalúan tomando las derivadas parciales de la función g.

$$a_1 = \overline{\frac{\partial g}{\partial f}} = \frac{\overline{c}_{Ai} - \overline{c}_A}{V} \qquad a_2 = \overline{\frac{\partial g}{\partial c_{Ai}}} = \frac{\overline{f}}{V}$$

$$a_3 = \overline{\frac{\partial g}{\partial T}} = -k(\overline{T}) \frac{E}{R\overline{T}^2} \overline{c}_A \qquad a_4 = \overline{\frac{\partial g}{\partial c_A}} = \frac{\overline{f}}{V} - k(\overline{T})$$

donde la línea sobre las derivadas parciales indica que se evalúan en el punto base. Se invita al lector a verificar las expresiones para las constantes tomando las derivadas de la función no lineal g.

El siguiente paso es pasar la ecuación de primer orden linealizada a la forma estándar. Para ello, se pasa el término que contiene $C_A(t)$ al lado izquierdo del signo igual y se divide entre su coeficiente, $-a_4$,

$$\tau \frac{dC_A(t)}{dt} + C_A(t) = K_1 F(t) + K_2 C_{Ai}(t) + K_3 \Gamma(t)$$

donde los parámetros son

$$\tau = -\frac{1}{a_4} = \frac{V}{\bar{f} + Vk(\bar{T})} \qquad K_1 = -\frac{a_1}{a_4} = \frac{\bar{c}_{Ai} - \bar{c}_A}{\bar{f} + Vk(\bar{T})}$$

$$K_2 = -\frac{a_2}{a_4} = \frac{\bar{f}}{\bar{f} + Vk(\bar{T})} \qquad K_3 = -\frac{a_3}{a_4} = -\frac{Vk(\bar{T})E_{\bar{c}_A}}{R\bar{T}^2[\bar{f} + Vk(\bar{T})]}$$

Finalmente, se obtiene la transformada de Laplace y se despeja $C_A(s)$:

$$C_A(s) = \frac{K_1}{\tau s + 1}F(s) + \frac{K_2}{\tau s + 1}C_{Ai}(s) + \frac{K_3}{\tau s + 1}\Gamma(s)$$

Este modelo no está completo. Necesita otra ecuación para la temperatura, $\Gamma(t)$, que no es una entrada independiente. En el capítulo 4 se presenta el modelo completo del reactor.

El ejemplo anterior indica que los parámetros de la función de transferencia de una ecuación linealizada dependen de los valores de las variables en el punto base. Note, como ya señalamos, que los parámetros dependen de las derivadas parciales de la función no lineal, a_1, a_2, a_3 y a_4, en vez del valor de la función en sí misma.

En esta sección se ha explicado cómo se linealizan las ecuaciones diferenciales no lineales para poder aplicar la poderosa técnica de la transformada de Laplace. Una vez que desarrolla la función de transferencia de las ecuaciones linealizadas, las características de la respuesta se pueden relacionar con sus parámetros con los métodos examinados en las secciones anteriores de este capítulo. La característica importante de los sistemas no lineales es que su respuesta depende del punto de operación. Es conveniente pensar que los parámetros del sistema linealizado son válidos en el punto base en vez de en una región de los valores de los parámetros. La mayoría de las veces, las ganancias y las constantes de tiempo no varían lo suficiente para afectar de manera significativa el comportamiento de los sistemas de control, pero siempre debe tenerse presente que los parámetros sí varían y su variación deberá tomarse en cuenta en el diseño de sistemas de control para sistemas no lineales.

2-7 RESUMEN

En este capítulo se estudiaron las técnicas de la transformada de Laplace y la linealización en la forma en que se aplican para analizar la respuesta dinámica de los procesos y sus sistemas de control. Las características de la respuesta de un proceso a las señales de entrada se relacionaron con las raíces del denominador de la función de transferencia del proceso, y se presentaron las respuestas y las funciones de transferencia de sistemas de primer y segundo orden. En los capítulos subsecuentes se relacionarán las funciones de transferencia de procesos específicos con los parámetros físicos del proceso mediante la aplicación de las leyes fundamentales de la conservación. En capítulos posteriores se usarán transformadas de Laplace para diseñar y analizar los sistemas de control de procesos.

PROBLEMAS

2-1. A partir de la definición de transformada de Laplace, obtener la transformada $F(s)$ de las siguientes funciones:

a) $f(t) = t$
b) $f(t) = e^{-at}$, donde a es constante.
c) $f(t) = \cos \omega t$, donde ω es constante.
d) $f(t) = e^{-at} \cos \omega t$, donde a y ω son constantes.

Nota: en los incisos c) y d) posiblemente se requiera la identidad trigonométrica.

$$\cos x \equiv \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Las respuestas se pueden verificar con las entradas de la tabla 2-1.1.

2-2. Usando una tabla de transformadas de Laplace y las propiedades de la transformada, encontrar la transformada $F(s)$ de las siguientes funciones:

a) $f(t) = u(t) + 2t + 3t^2$
b) $f(t) = e^{-2t}[u(t) + 2t + 3t^2]$
c) $f(t) = u(t) + e^{-2t} - 2e^{-t}$
d) $f(t) = u(t) - e^{-t} + te^{-t}$
e) $f(t) = u(t-2)[1 - e^{-2(t-2)} \operatorname{sen}(t-2)]$

2-3. Verificar la validez de los resultados del problema 2-2 aplicando los teoremas del valor inicial y del valor final. ¿Estos teoremas se aplican en todos los casos?

2-4. En el ejemplo 2-1.1b se obtuvo la transformada de Laplace de un pulso utilizando la definición de la transformada. Demostrar que se obtiene la misma transformada con el teorema de traslación real. Note que el pulso es la diferencia entre dos cambios escalón idénticos de magnitud H con el segundo retardado por la duración del pulso, T.

$$f(t) = Hu(t) - Hu(t - T)$$

2-5. En el enunciado del teorema de traslación real se señaló que para que el teorema se pueda aplicar, la función retardada debe ser cero para todos los tiempos menores que el tiempo de retardo. Demostrar lo anterior calculando la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = e^{-(t-t_0)/\tau}$$

donde t_0 y τ son constantes.

a) Suponiendo que la expresión se cumple para todos los tiempos mayores a cero, es decir, que se puede reordenar como

$$f(t) = e^{t_0/\tau}\, e^{-t/\tau}$$

b) Suponiendo que es cero para $t \leq t_0$, es decir, que podría escribirse de manera apropiada como

$$f(t) = u(t - t_0)e^{-(t - t_0)/\tau}$$

Trazar la gráfica de las dos funciones. ¿Las dos respuestas son iguales? ¿Cuál de las dos concuerda con el teorema de traslación real?

2-6. Obtener la solución $Y(t)$, como una desviación de su condición inicial de estado estacionario $y(0)$, de las siguientes ecuaciones diferenciales. Usar el método de la transformada de Laplace y la expansión en fracciones parciales. La función de forzamiento es la función escalón unitario, $x(t) = u(t)$.

a) $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5x(t) + 3$

b) $9\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 18\dfrac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 8x(t) - 4$

c) $9\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 9\dfrac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 8x(t) - 4$

d) $9\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\dfrac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 8x(t) - 4$

e) $2\dfrac{d^3y(t)}{dt^3} + 7\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 21\dfrac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = 3x(t)$

2-7. Repetir el problema 2-6d usando como función de forzamiento

a) $x(t) = e^{-t/3}$
b) $x(t) = u(t - 1)e^{-(t - 1)/3}$

2-8. Para cada ecuación diferencial del problema 2-6, determinar si la respuesta es estable o inestable, oscilatoria o monótona. Obtener también la raíz dominante, el periodo de oscilación, la razón de asentamiento si la respuesta es oscilatoria; el tiempo requerido para que el término menor de la respuesta, o la amplitud de las oscilaciones, decaiga dentro de menos de 1% (0.67%) de su valor inicial, y el valor del estado estacionario final de la salida. *Nota:* no es necesario resolver el problema 2-6 para responder las preguntas de este problema.

2-9. *Respuesta de segundo orden: móvil de pájaro.* El móvil de la figura P2-1 tiene una masa de 50 g y el resorte que lo sostiene se extiende 27 cm cuando se le aplica el peso del pájaro. Despreciando la resistencia debida al aire del movimiento del pájaro, es posible deducir la siguiente ecuación escribiendo el balance de fuerza dinámico (segunda ley de Newton) sobre el pájaro:

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -Mg - ky(t) + f(t)$$

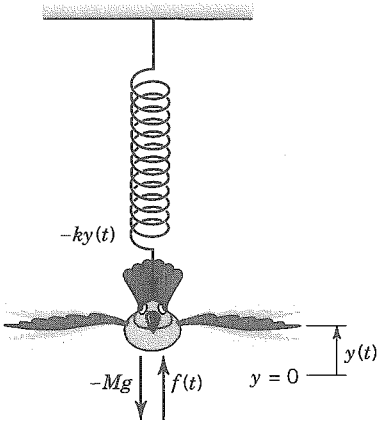


Figura P2-1 Móvil de pájaro para el problema 2-9.

donde $y(t)$ es la posición vertical del pájaro en metros, $f(t)$ es la fuerza que se requiere para poner en movimiento al pájaro en N, M es la masa del pájaro en kilogramos, k es la constante del resorte en N/m, y g es la aceleración local de la gravedad, 9.8 m/s^2. Encontrar el periodo de oscilación del pájaro. ¿La solución predice que el pájaro oscilará indefinidamente? ¿Qué término se debe sumar a la ecuación del modelo para describir con mayor precisión el movimiento real del pájaro? ¿Cuál es el significado físico de este término? *Nota:* la simulación de este sistema es el tema del problema 13-1.

2-10. Para la ecuación diferencial general de primer orden, ecuación 2-4.4, obtener la respuesta a

a) Un impulso, $X(t) = \delta(t)$.
b) El pulso que se muestra en la figura 2-1.1b.

Graficar la respuesta, $Y(t)$, en cada caso.

2-11. *Respuesta de un proceso integrante.* La respuesta del nivel del líquido en un tanque está dada por la ecuación diferencial de primer orden

$$A\frac{dh(t)}{dt} = f(t)$$

donde $h(t)$, en metros, es el nivel del líquido en el tanque; $f(t)$, en m^3/s, es el flujo de líquido que entra en el tanque, y A, en m^2, es el área transversal constante del tanque. Obtener la función de transferencia para el tanque y la respuesta del nivel a un escalón unitario en el flujo, $F(t) = u(t)$. Trazar la gráfica de la respuesta del nivel, $H(t)$. ¿Por qué cree que a este resultado se le llama la respuesta de un *proceso integrante*?

2-12. Para cada ecuación diferencial de segundo orden del problema 2-6, obtener la constante de tiempo y la razón de amortiguamiento, y clasificarlas como sobreamortiguadas o subamortiguadas. Obtener las constantes de tiempo efectivas para las ecuaciones sobreamortiguadas y, para las ecuaciones subamortiguadas, obtener la frecuencia y el periodo de oscilación, la razón de asentamiento, el sobrepaso porcentual, el tiempo de elevación y el tiempo de estabilización para una entrada escalón.

2-13. Evaluar los coeficientes de las expansiones en fracciones parciales que llevan a las ecuaciones 2-5.10, 2-5.11, 2-5.12 y 2-5.13.

2-14. Deducir la ecuación 2-5.23 a partir de la ecuación 2-5.22.

2-15. Una función de transferencia común que modela muchos sistemas interactivos de segundo orden (véase el capítulo 4) es

$$Y(s) = \frac{k_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) - k_2} X(s)$$

donde τ_1, τ_2, k_1 y k_2 son constantes. Deducir la relación entre la ganancia, la constante de tiempo y la razón de amortiguamiento de la función de transferencia de segundo orden y las cuatro constantes que aparecen en la función de transferencia. Suponiendo que las cuatro constantes son números reales positivos,

a) Establecer que la respuesta es sobreamortiguada.
b) Establecer que la respuesta es estable si $k_2 < 1$.
c) Deducir la relación entre las dos constantes de tiempo efectivas y las cuatro constantes de la función de transferencia.

2-16. La función de transferencia de un lazo de control por retroalimentación está dada por

$$C(s) = \frac{K_c}{(3s + 1)(s + 1) + K_c} R(s)$$

donde K_c es la ganancia del controlador. Deducir las relaciones entre la ganancia, la constante de tiempo y la razón de amortiguamiento de la función de transferencia de segundo orden y la ganancia del controlador. Obtener los rangos de la ganancia del controlador para los que la respuesta sea: i) sobreamortiguada, ii) subamortiguada, y iii) no amortiguada. ¿La respuesta puede ser inestable para cualquier valor positivo de la ganancia del controlador?

2-17. Hacer la linealización de las siguientes funciones no lineales y expresar los resultados en términos de desviaciones del punto base.

a) La ecuación de la entalpía como una función de la temperatura, ecuación 2-6.1.
b) La ecuación de Antoine para la presión de vapor, ecuación 2-6.2.
c) La ecuación de la fracción molar del vapor en equilibrio como una función de la fracción molar del líquido, ecuación 2-6.3.
d) La ecuación del flujo de fluido como una función de la caída de presión, ecuación 2-6.4.
e) La ecuación de la tasa de transferencia de calor por radiación como una función de la temperatura, ecuación 2-6.5.

2-18. Como se señaló en el texto, el error de la aproximación lineal en general se incrementa cuando la variable se desvía de su valor base; el error en la pendiente es el importante. Para la tasa de transferencia de calor por radiación como una función de la temperatura, ecuación 2-6.5, determinar el rango de temperatura para el que la pendiente de la función, $dq/dT|_T$, se mantiene dentro de ±5% de su valor base. Calcular también el rango de temperatura para el que la aproximación lineal de la tasa de transferencia de calor, q, se mantiene dentro de ±5% de su valor real. Considerar los dos valores base, $\overline{T} = 400$ K y 600 K. Explicar brevemente cómo el rango de aplicabilidad de la aproximación lineal, basado en su habilidad para aproximar la pendiente de la función, varía con el valor base de la temperatura.

2-19. Resolver el problema 2-18 para la fórmula de la fracción molar de vapor en equilibrio como una función de la fracción molar del líquido, ecuación 2-6.3. Calcular el rango de valores de la fracción molar del líquido x, en el que la pendiente, $dy/dx|_{\overline{x}}$, se mantiene dentro de ±5% de su valor base. Calcular también el rango de valores de x para el que la aproximación lineal de la fracción molar en equilibrio y se mantiene dentro de ±5% de su valor real. Considerar los siguientes casos:

a) $\alpha = 1.10$ $\quad \overline{x} = 0.10$ $\qquad$ c) $\alpha = 5.0$ $\quad \overline{x} = 0.10$
b) $\alpha = 1.10$ $\quad \overline{x} = 0.90$ $\qquad$ d) $\alpha = 5.0$ $\quad \overline{x} = 0.90$

Explicar brevemente cómo piensa el lector que el rango de aplicabilidad de la aproximación lineal, basada en su habilidad para aproximar la pendiente de la función, varía tanto con el parámetro como con el valor base para esta función.

2-20. La tasa de reacción de una reacción química está dada por la siguiente expresión

$$r[c_A(t), c_B(t)] = kc_A^2(t)c_B(t)$$

donde $k = 0.5$ m^6/(kmol^2-h) es una constante (operación isotérmica). Obtener la aproximación lineal de esta función para $\overline{c}_A = 2$ kmol/m^3, $\overline{c}_B = 1$ kmol/m^3, y encontrar el error en los parámetros de la aproximación (es decir, las derivadas parciales) cuando cada concentración sufre un cambio, de manera independiente, de 1 kmol/m^3. Expresar la aproximación lineal en términos de las variables de desviación.

2-21. La ley de Raoult da la fracción molar de vapor $y(t)$ en equilibrio como una función de la temperatura, $T(t)$, la presión, $p(t)$, y la fracción molar del líquido, $x(t)$:

$$y[T(t), p(t), x(t)] = \frac{p^o[T(t)]}{p(t)} x(t)$$

donde $p^o[T(t)]$ es la presión de vapor del componente puro, dada por la ecuación de Antoine, ecuación 2-6.2. Obtener la aproximación lineal de la fracción molar de vapor y expresarla en términos de las variables de desviación. Evaluar los parámetros de la aproximación para el benceno a presión atmosférica (760 mm de Hg), a 95°C, y con una fracción molar del líquido de 50%. Las constantes de Antoine para el benceno son A = 15.9008, B = 2788.51°C y C= 220.80°C para la presión de vapor en mm de Hg.

2-22. Evaluar los parámetros de la transformada obtenida en el ejemplo 2-6.4 utilizando los parámetros de la fórmula de Arrhenius dados en el ejemplo 2-6.1 y los siguientes parámetros del reactor:

$$V = 2.6 \text{ m}^3, \qquad \bar{f} = 0.002 \text{ m}^3/\text{s}, \qquad \bar{c}_{Ai} = 12 \text{ kmol/cm}^3.$$

Nótese que el valor inicial de la concentración del reactivo, $\bar{c}_A$, se puede obtener por el hecho de que la condición inicial está en estado estacionario, $\bar{g} = 0$.

2-23. Una bala perdida disparada por un ladrón perfora el tanque de aire comprimido de una gasolinera. El balance de masa del aire en el tanque es

$$V \frac{d\rho(t)}{dt} = w_i(t) - A_o \sqrt{2\rho(t)[p(t) - p_o]}$$

donde

$$\rho(t) = \frac{M}{RT} p(t)$$

$w_i(t)$, en kg/s, es el flujo de entrada de la compresora de aire, V = 1.5 m^3 es el volumen del tanque, A_o = 0.785 cm^2 es el área del agujero de la bala, M = 29 kg/kmol es el peso molecular del aire, R = 8.314 kPa-m^3/kmol-K es la constante de la ley de gases ideales, y la temperatura T se supone constante a 70°C.

Obtener la aproximación lineal de la ecuación diferencial alrededor de la presión manométrica inicial de 500 kPa. Obtener también la transformada de Laplace de la presión en el tanque y evaluar la constante de tiempo y la ganancia de la función de transferencia. *Nota:* la simulación de este sistema es el tema del problema 13-3.

2-24. La temperatura de un pavo en un horno, la cual se supone uniforme en toda el ave, y despreciando el calor absorbido por las reacciones de cocción, está dada por la ecuación diferencial

$$Mc_v \frac{dT(t)}{dt} = \sigma \varepsilon A[T_s^4(t) - T^4(t)]$$

donde M es la masa del pavo en libras (lb), c_v es el calor específico en Btu/lb-°R, $T(t)$ es la temperatura del pavo en °R, $\sigma = 0.1714 \cdot 10^{-8}$ Btu/h-ft^2-°R^4 es la constante de Stephan-Boltzman, ϵ es la emisividad de la piel del pavo, A es el área del pavo en pies cuadrados (ft^2), y $T_s(t)$ es la temperatura en el horno en °R.

Obtener la aproximación lineal de la ecuación diferencial. Obtener también la transformada de Laplace de la temperatura del pavo y escribir las expresiones para la constante de tiempo y la ganancia de la función de transferencia. ¿Cuál es la variable de entrada en este problema? *Nota:* la simulación de este sistema es el tema del problema 13-4.

2-25. La temperatura de un panel que se calienta con un calentador eléctrico está dada por la ecuación diferencial:

$$C\frac{dT(t)}{dt} = q(t) - \alpha[T^4(t) - T_s^4]$$

donde $T(t)$ es la temperatura del panel en °R, que se supone es uniforme, $q(t)$ es la tasa del calor de entrada en Btu/h, C = 180 Btu/°R es la capacidad calorífica del panel, T_s = 540°R es la temperatura ambiente (constante), y $\alpha = 5 \cdot 10^{-8}$ Btu/h-°R^4 es el coeficiente de la radiación de calor. Obtener la aproximación lineal de la ecuación diferencial alrededor de la temperatura inicial de estado estacionario de 700°R. Obtener también la transformada de Laplace de la temperatura del panel y encontrar la ganancia y la constante de tiempo de la función de transferencia.

Capítulo 3

Sistemas dinámicos de primer orden

Como se examinó brevemente en el capítulo 1, la respuesta dinámica de los procesos es una consideración primordial en el diseño, análisis e implementación de los sistemas de control de procesos. Una característica interesante e importante de los procesos químicos es que la respuesta dinámica cambia de un proceso a otro. Por ejemplo, la respuesta de temperatura es diferente a la respuesta del nivel. Además, la respuesta de temperatura en un intercambiador de calor es diferente a la respuesta de la temperatura en un horno. *El objetivo principal de este capítulo es mostrar cómo se describe la respuesta dinámica de procesos simples usando modelos matemáticos, funciones de transferencia y diagramas de bloques.* Aunque simples, estos modelos se toman de aplicaciones industriales reales. En el capítulo 4 se presentan procesos más complejos.

3-1 PROCESOS Y LA IMPORTANCIA DE SUS CARACTERÍSTICAS

Es importante comenzar este capítulo, y de hecho el estudio completo del control de procesos, explicando qué es un "proceso" y describiendo sus características desde el punto de vista del control de procesos. Para ello, se considera el intercambiador de calor del capítulo 1, el cual se grafica de nuevo en la figura 3-1.1.

La tarea del controlador es controlar el proceso. En este ejemplo, el controlador debe tomar las acciones necesarias para mantener la temperatura de salida, $T(t)$, en un valor especificado, es decir, su referencia (set point). El controlador recibe una señal del transmisor. Es a través del transmisor que el controlador "ve" a la variable controlada. *Por tanto, desde el punto de vista del controlador, la verdadera variable controlada es la salida del transmisor.* La relación entre la salida del transmisor y la variable física a controlar, $T(t)$, está dada por la calibración del transmisor, como se explica en el capítulo 5. La temperatura de salida del intercambiador y la salida del transmisor deben estar relacionadas correctamente. Si por alguna razón no es éste el caso, el controlador seguirá reaccionando a la salida del transmisor, no a $T(t)$.

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

En este ejemplo, el controlador debe manipular la posición de la válvula de vapor para mantener la variable controlada en la referencia. Sin embargo, nótese que la manera en que el controlador manipula la posición de la válvula es cambiando su señal de salida que llega a la válvula. *Por lo tanto, desde el punto de vista del controlador, la verdadera variable manipulada es su propia salida.* El controlador no manipula directamente la posición de la válvula, sólo manipula su señal de salida.

Ahora se puede definir un *proceso como todo lo que se encuentra entre la salida y la entrada del controlador.* La mayoría de las veces, la entrada del controlador la proporciona la salida del transmisor. Sin embargo, en ocasiones puede no ser éste el caso, como cuando se hace una manipulación matemática, como un filtro, en la señal del transmisor antes de que el controlador la reciba. Debido a que el transmisor por lo general envía directamente su salida al controlador, se puede decir que *la entrada del controlador es igual a la salida del transmisor.* Con referencia a la figura 3-1.1*a*, el proceso es todo aquello que esté dentro del área delineada por la curva punteada. El proceso incluye el transductor I/P, la válvula, el intercambiador de calor con sus tuberías, el sensor y el transmisor. Nótese que en la figura se ha utilizado el término $c(t)$ para denotar la señal de salida del transmisor. Esto se hace para recordar que ésta es la *variable controlada;* la unidad de $c(t)$ es el por ciento de la salida del transmisor, o simplemente %TO (por las siglas en inglés de "Transmitter Output"). En la figura también se ha usado el término $m(t)$ para denotar la señal de salida del controlador, a fin de indicar que esta señal es la *variable manipulada;* la unidad de $m(t)$ es el por ciento de la salida del controlador, o simplemente %CO (por las siglas en inglés de "Controller Output"). Se usará esta notación de $c(t)$ y $m(t)$ en este libro.

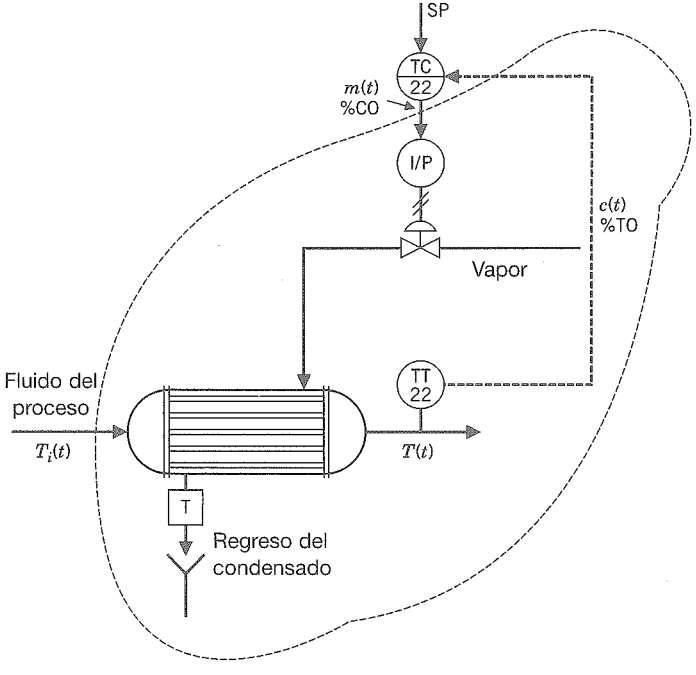


Figura 3-1.1*a* Sistema de control para un intercambiador de calor.

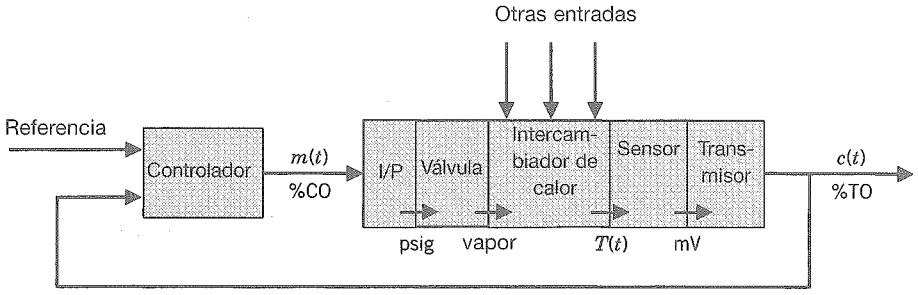


Figura 3-1.1*b* Control de temperatura para un intercambiador de calor.

Para una mejor comprensión de lo que se acaba de examinar, considérese la figura 3-1.1*b*. El diagrama muestra todas las partes del proceso y cómo están relacionadas. La figura muestra que la señal de salida del controlador, $m(t)$, entra al transductor I/P, generando una señal neumática. Esta señal va entonces a la válvula, produciendo un flujo de vapor. Este flujo entra al intercambiador de calor y, junto con otras entradas del proceso, produce una temperatura de salida $T(t)$. Esta temperatura se mide con un sensor, cuya señal de salida, quizá en milivolts, es recibida por el transmisor, el cual produce una señal, $c(t)$, hacia el controlador. Así, la figura muestra con claridad que, desde el punto de vista del controlador, la variable controlada es la salida del transmisor y que la variable manipulada es la salida del controlador.

¿Por qué es necesario entender las características del proceso que se va a controlar? Como se señaló en el capítulo 1, la calidad del control que proporcione el controlador depende del ajuste o especificación de los diferentes términos del controlador. El ajuste de estos términos se denomina la *sintonización del controlador*. La sintonización óptima del controlador depende del proceso por controlar y del criterio de sintonización. Cada controlador se debe sintonizar específicamente para el proceso que controla. Por consiguiente, para sintonizar un controlador, primero deben conocerse las características, o comportamiento, del proceso que se va a controlar.

Otra manera de explicar la necesidad de conocer las características del proceso es entendiendo que al sintonizar el controlador lo que se está haciendo es "adaptarlo" al proceso. Por tanto, tiene sentido conocer primero las características del proceso para después sintonizar el controlador, o adaptar las características del controlador con las del proceso. Si esto se hace correctamente, todo el sistema de control de lazo cerrado, es decir, *el proceso más el controlador*, tendrá el comportamiento deseado.

En este capítulo y en el capítulo 4 se examinan los procesos y sus características. En el capítulo 5 se presentan brevemente algunos términos relacionados con los transmisores y se examinan asimismo las válvulas de control y los diferentes controladores y sus características. Por último, en el capítulo 6 se conjuntan todas las piezas, es decir, "se cierra el lazo". En el capítulo 7 se muestra cómo sintonizar el controlador por retroalimentación una vez que se conocen las características del proceso. De ahí la importancia de conocer, entender y obtener las características del proceso. *El controlador sólo se puede sintonizar después de conocer las características de estado estacionario y dinámicas del proceso.*

3-2 MODELAJE MATEMÁTICO DE PROCESOS

En la introducción se señaló que el objetivo principal de este capítulo es describir la respuesta dinámica de procesos simples utilizando modelos matemáticos, funciones de transferencia y diagramas de bloques. Las funciones de transferencia y los diagramas de bloques se desarrollan a partir de modelos matemáticos. Los modelos matemáticos son conjuntos de ecuaciones que describen un proceso o sistema. De hecho, el estudiante de ingeniería ha estado escribiendo modelos matemáticos desde los cursos de física. Entonces los modelos eran simples y estaban compuestos en su mayoría por una sola ecuación. Al avanzar en los estudios de ingeniería, los modelos se hacen más complejos y se componen de varias ecuaciones. El lector se puede remontar a los cursos de "balance de masa y energía", y después a los cursos de termodinámica, de fenómenos de transporte, de operaciones unitarias y de diseño de reactores; en todos estos cursos, los modelos son más complejos que los de los cursos de física, se componen de varias ecuaciones y muy a menudo requieren el uso de una computadora para obtener una solución. El hecho es que ¡los estudiantes de ingeniería han estado desarrollando modelos matemáticos casi desde el primer día!

Los modelos matemáticos que se desarrollan en este capítulo y en los siguientes comienzan con un balance de una cantidad conservada: masa o energía. El balance se puede escribir como

$$\begin{array}{c}\text{Tasa de masa/energía}\\ \text{que entra al}\\ \text{volumen de control}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Tasa de masa/energía}\\ \text{que sale del}\\ \text{volumen de control}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Tasa de cambio de}\\ \text{masa/energía acumulada}\\ \text{en el volumen de control}\end{array} \qquad (3\text{-}2.1)$$

Los moles también se conservan en los procesos en que no hay reacciones químicas. Por tanto, en estos procesos se puede sustituir el término moles por masa en la ecuación de balance. En la sección 3-7 se examinan los procesos en que ocurren reacciones químicas. La ecuación 3-2.1 se denomina *balance de masa de estado no estacionario* o *balance de masa dinámica.*

Durante la mayor parte de nuestra formación como ingenieros, los balances se han escrito bajo el supuesto del estado estacionario con el resultado consecuente de modelos de estado estacionario. El supuesto del estado estacionario establece que

$$\begin{array}{c}\text{Tasa de cambio de masa/energía}\\ \text{acumulada en el volumen de control}\end{array} = 0$$

Por lo tanto, si la tasa de cambio de masa/energía acumulada en el volumen de control es cero, la masa/energía acumulada no cambia. Hay acumulación de masa/energía, pero ¡esta cantidad es constante! Entonces la ecuación 3-2.2 expresa el *balance de estado estacionario:*

$$\begin{array}{c}\text{Tasa de masa/energía que}\\ \text{entra al volumen de control}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Tasa de masa/energía que}\\ \text{sale del volumen de control}\end{array} = 0 \qquad (3\text{-}2.2)$$

Aunque seguramente el lector ha visto y aplicado esta ecuación en cursos anteriores, es conveniente un pequeño repaso. Se procede así para mostrar al lector que los modelos que se desarrollarán aquí no son muy diferentes de los que ha desarrollado en cursos previos.

Considérese el proceso ilustrado en la figura 3-2.1. En este proceso dos caudales de gas entran a un tanque, se mezclan y sale un solo caudal del tanque. El caudal 1 es una mezcla de los componentes A y B, y el caudal 2 es A puro. Se supone que el contenido del proceso está bien mezclado. Considerando el tanque como el volumen de control, es posible escribir varios balances, a saber, un balance molar total, un balance molar para el componente A y un balance de energía.

Un balance molar total de estado estacionario da como resultado:

$$\dot{n}_1 + \dot{n}_2 - \dot{n}_3 = 0 \tag{3-2.3a}$$

Esta ecuación algebraica es típica y se ha escrito en varias ocasiones en cursos anteriores. Entendamos lo que nos indica esta ecuación acerca de la física del proceso. La ecuación indica que el flujo del caudal 3, $\dot{n}_3$, es igual a la suma de los caudales 2 y 3, $\dot{n}_1 + \dot{n}_2$; por supuesto, se sabe que bajo un estado estacionario el flujo de salida es igual a la suma de los dos flujos de entrada. Lo que la ecuación dice es que si cambia el valor de $\dot{n}_1$ o $\dot{n}_2$, indica cuál es el valor de

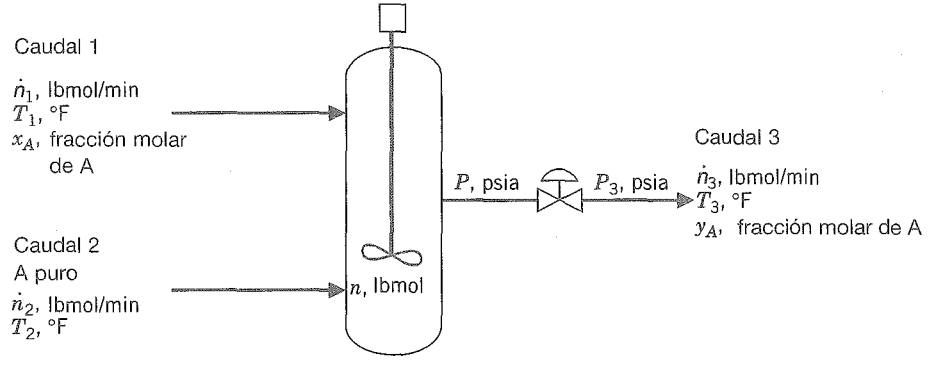


Figura 3-2.1 Proceso.

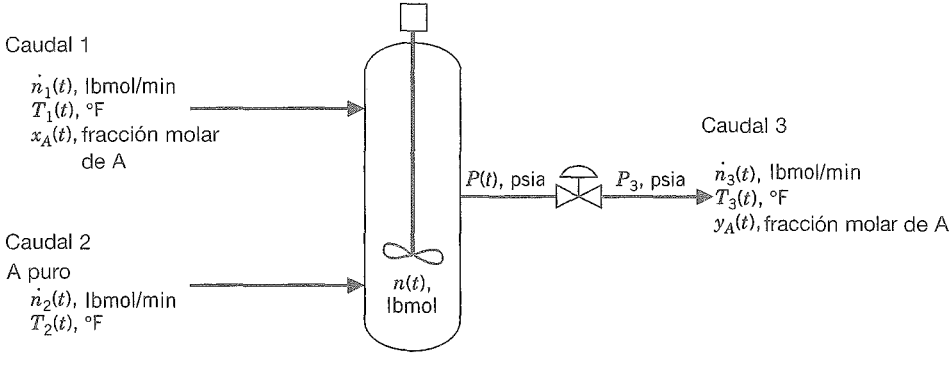


Figura 3-2.2 Proceso donde se muestran las variables como una función del tiempo.

$\dot{n}_3$ necesario para llegar a un estado estacionario. Lo que la ecuación no indica es *cuánto tiempo* le toma al proceso alcanzar la nueva condición. Se sabe que si cualquiera de los caudales de entrada cambia, es posible que el flujo del caudal de salida 3 no cambie de inmediato. Antes de que este caudal cambie, la presión en el tanque tiene que aumentar para aumentar la caída de presión a través de la válvula para así aumentar el caudal de salida; el aumento de la presión en el tanque toma cierto tiempo. Como se señaló en el capítulo 1, en la mayor parte de nuestros estudios de ingeniería no se considera el tiempo que se requiere para que estos cambios ocurran; lo anterior es una consecuencia del supuesto de estado estacionario. En la práctica se requiere tiempo para que los cambios ocurran. Para indicar que una variable varía con el tiempo, es decir, que es una función del tiempo, se usa la notación (t) después de la variable, como se muestra en la figura 3-2.2 y en la ecuación 3-2.3b.

$$\dot{n}_1(t) + \dot{n}_2(t) - \dot{n}_3(t) = 0 \tag{3-2.3b}$$

Las variables que son constantes, es decir, que no son funciones del tiempo, no están sucedidas por el símbolo (t).

Con base en lo que se ha discutido, la ecuación 3-2.3b no describe completamente cómo ocurren los cambios con el tiempo; la ecuación sólo describe el proceso en el estado estacionario. Se llega a una descripción más completa aplicando la ecuación 3-2.1, cuyo resultado es un balance de estado no estacionario, o *modelo dinámico*. De la ecuación 3-2.1 se obtiene

$$\dot{n}_1(t) + \dot{n}_2(t) - \dot{n}_3(t) = \frac{dn(t)}{dt} \tag{3-2.4}$$

La ecuación 3-2.4 es una ecuación diferencial cuya solución describe cómo cambian con el tiempo los moles acumulados en el tanque, $n(t)$, el término $dn(t)/dt$ es la tasa de *cambio de los moles totales acumulados* en el tanque. A medida que los moles totales de gas aumentan, la presión del gas en el tanque, $P(t)$, aumenta y el caudal de salida, $\dot{n}_3(t)$, también aumenta. Una vez que el caudal de salida es igual a la suma de los caudales de entrada, el término de la derivada $dn(t)/dt$ se hace cero y se llega a una nueva condición de estado estacionario. Desde luego, las ecuaciones diferenciales lucen más complicadas que las ecuaciones algebraicas, pero describen mucho mejor la física de los sistemas, y a menudo en realidad no son tan difíciles de resolver por métodos analíticos, como se vio en el capítulo 2, o usando soluciones numéricas, como se verá en el capítulo 13.

Es importante hacer un par de comentarios acerca de la ecuación 3-2.4. Primero, nótese que al escribir el balance molar de estado no estacionario tan sólo se sumó la tasa de cambio del término de acumulación al balance de estado estacionario convencional; se construye con base en lo conocido. Segundo, las unidades de los términos $\dot{n}(t)$ son lbmol/min, lo mismo que las de $dn(t)/dt$.

Como ya se mencionó, el término diferencial es la tasa de cambio de los moles acumulados en el tanque con respecto al tiempo. Si $\dot{n}_1(t) + \dot{n}_2(t) - \dot{n}_3(t)$ es diferente de cero, entonces los moles dentro del tanque cambian y $dn(t)/dt$ indica la rapidez con que están cambiando estos

moles (positiva si los moles aumentan –entran más moles de los que salen– y negativa si éstos disminuyen –salen más moles de los que entran). Una vez que los moles que salen son iguales a los que entran, la cantidad de moles dentro del tanque es constante y $dn(t)/dt = 0$.

Un balance molar de A en estado estacionario resulta en

$$\dot{n}_1(t)x_A(t) + \dot{n}_2(t) - \dot{n}_3(t)y_A(t) = 0 \tag{3-2.5}$$

Esta ecuación indica la cantidad de moles de A que debe salir, dada por $\dot{n}_3(t)y_A(t)$, para llegar al nuevo estado estacionario si alguna de las condiciones de operación de entrada cambia. Al igual que el balance molar total, lo que esta ecuación no indica es en *cuánto tiempo* llega el proceso a esta condición. Una mejor descripción de este proceso se obtiene escribiendo un balance de masa en estado no estacionario para el componente A.

$$\dot{n}_1(t)x_A(t) + \dot{n}_2(t) - \dot{n}_3(t)y_A(t) = \frac{dn_A(t)}{dt} = \frac{d[n(t)y_A(t)]}{dt} \tag{3-2.6}$$

La solución de la ecuación 3-2.6 describe cómo los moles del componente A acumulados en el tanque, dados por $n_A(t) = n(t)y_A(t)$, cambian con el tiempo; el término $dn_A(t)/dt = d[n(t)y_A(t)]/dt$ es la *tasa de cambio de los moles del componente A acumulados* en el tanque. Nótese una vez más que para escribir este balance molar de estado no estacionario para el componente A tan sólo se sumó la tasa de cambio del término de acumulación al balance de estado estacionario convencional; una vez más se construye con base en lo conocido.

Es interesante notar que desde el punto de vista del balance molar total puede haber una operación de estado estacionario, es decir, la suma de los moles totales que entran es igual a los moles totales que salen o, $\dot{n}_1(t) + \dot{n}_2(t) - \dot{n}_3(t) = 0$. Sin embargo, éste tal vez no sea el caso desde el punto de vista del balance molar del componente A, como cuando $\dot{n}_1(t)$ y $\dot{n}_2(t)$ permanecen constantes pero la fracción másica de A en el caudal 1, $x_A(t)$, cambia.

Un balance de energía de estado estacionario, suponiendo que las pérdidas de calor son despreciables, da como resultado

$$\dot{n}_1(t)\hat{h}_1(t) + \dot{n}_2(t)\hat{h}_2(t) - \dot{n}_3(t)\hat{h}_3(t) = 0 \tag{3-2.7}$$

donde $\hat{h}_1(t)$, $\hat{h}_2(t)$ y $\hat{h}_3(t)$ son las entalpías molares de cada caudal en Btu/lbmol. Seleccionando la fase gaseosa a una temperatura de 0°F y 1 atm como el estado de referencia, las entalpías se pueden expresar como una función de las temperaturas; para simplificar, se supone que las expresiones de las capacidades caloríficas son constantes. Entonces

$$\dot{n}_1(t)\hat{C}_{p1}T_1(t) + \dot{n}_2(t)\hat{C}_{p2}T_2(t) - \dot{n}_3(t)\hat{C}_{p3}T_3(t) = 0 \tag{3-2.8}$$

donde $\hat{C}_{p1}$, $\hat{C}_{p2}$ y $\hat{C}_{p3}$ son las capacidades caloríficas molares en Btu/lbmol · °F. Se puede establecer ahora un razonamiento similar al relacionado con el balance molar total y con el balance del componente A. Esto es, si alguna de las condiciones de operación de entrada cambia, la ecuación 3-2.8 indica la cantidad de energía que sale necesaria, dada por $\dot{n}_3(t)\hat{C}_{p3}T_3(t)$, para

alcanzar la nueva condición de estado estacionario. Lo que la ecuación no indica es *cuánto tiempo* le toma al proceso alcanzar la nueva condición. Una descripción mejor de este proceso se obtiene escribiendo un balance de energía de estado no estacionario:

$$\dot{n}_1(t)\hat{h}_1(t) + \dot{n}_2(t)\hat{h}_2(t) - \dot{n}_3(t)\hat{h}_3(t) = \frac{d[n(t)\hat{u}_3(t)]}{dt} \tag{3-2.9}$$

donde $u_3(t)$ es la energía interna del gas en el tanque. La ecuación 3-2.9 puede escribirse en términos de la temperatura como

$$\dot{n}_1(t)\hat{C}_{p1}T_1(t) + \dot{n}_2(t)\hat{C}_{p2}T_2(t) - \dot{n}_3(t)\hat{C}_{p3}T_3(t) = \frac{d[n(t)\hat{C}_{v3}T_3(t)]}{dt} \tag{3-2.10}$$

La solución de la ecuación 3-2.10 describe cómo cambia con el tiempo la energía acumulada en el tanque, dada por $n(t)u_3(t) = n(t)\,\hat{C}_{v3}T_3(t)$; el término $d[n(t)u_3(t)]/dt = d[n(t)\,\hat{C}_{v3}T_3(t)]/dt$ es la *tasa de cambio de la energía del gas acumulado* en el tanque. Nótese una vez más que para escribir el balance de energía de estado no estacionario tan sólo se sumó la tasa de cambio del término de acumulación al balance de estado estacionario convencional; o sea, una vez más se construye con base en lo conocido.

En esta sección se ha explicado por qué los balances, o modelos, de estado estacionario no describen completamente el comportamiento de un proceso. Los *balances de estado no estacionario,* o *modelos dinámicos,* proporcionan una descripción más completa; estos balances *describen el comportamiento de estado estacionario y dinámico de los procesos.* Una vez que el proceso alcanza un estado estacionario, la solución del balance de estado no estacionario ofrece exactamente la misma información que el balance de estado estacionario. Los balances de estado estacionario por lo general resultan en ecuaciones algebraicas; los balances de estado no estacionario resultan en ecuaciones diferenciales con el tiempo como variable independiente. El desarrollo de un balance de estado no estacionario sólo requiere sumar la tasa de cambio del término de acumulación al balance de estado estacionario convencional. En esta sección se han presentado tres balances comunes; en la sección 3-7 se examinan los balances de procesos donde ocurren reacciones químicas. Como se verá en la exposición que sigue, el modelo matemático completo no sólo requiere los balances sino también otras ecuaciones. Al escribir los balances, y todas las demás ecuaciones auxiliares, se integran los conocimientos de la ingeniería de procesos, como los de termodinámica, flujo de fluidos, transferencia de calor, transferencia de masa e ingeniería de reacciones químicas. Esto hace del modelaje de procesos industriales una actividad por demás interesante y desafiante.

3-3 EJEMPLO DE UN PROCESO TÉRMICO

Considérese el tanque ilustrado en la figura 3-3.1. En este proceso se supone que los flujos volumétricos de entrada y salida, la densidad y la capacidad calorífica de los líquidos son iguales y constantes, y que se conocen todos sus valores. Se supone, asimismo, que el líquido en el

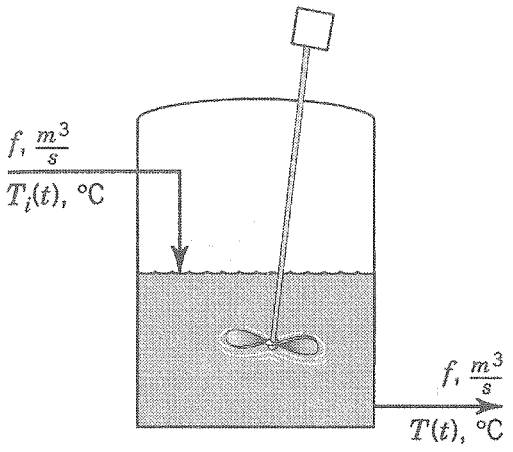


Figura 3-3.1 Proceso térmico.

tanque está bien mezclado y que el tanque está bien aislado, es decir, que las pérdidas térmicas en el ambiente son despreciables. Por último, se supone que la entrada de energía impartida por el mezclador es despreciable.

Se tiene interés en desarrollar el modelo matemático y la función de transferencia que describen la forma en que la temperatura de salida, $T(t)$, responde a los cambios en la temperatura de entrada, $T_i(t)$. Tomando el contenido del tanque como el volumen de control, un balance de energía de estado no estacionario da como resultado la relación buscada entre las temperaturas de entrada y de salida. Aplicando la ecuación 3-2.1 se obtiene:

Tasa de energía que entra al volumen de control	−	Tasa de energía que sale del volumen de control	=	Tasa de cambio de la energía acumulada en el volumen de control

o, en términos de una ecuación,

$$f\rho_i h_i(t) - f\rho h(t) = \frac{d[V\rho u(t)]}{dt}$$

donde:

f = flujo volumétrico, m^3/s
ρ_i, ρ = densidades del líquido de entrada y de salida, respectivamente, kg/m^3
V = volumen del líquido en el tanque, m^3
$h_i(t), h(t)$ = entalpía del líquido de entrada y de salida, J/kg
$u(t)$ = energía interna del líquido en el tanque, J/kg.

En términos de temperaturas, usando como estado de referencia para $u(t)$ y $h(t)$ el componente puro en el estado líquido a 0°F y a la presión del sistema, la ecuación anterior se puede escribir como

$$f\rho_i C_{pi} T_i(t) - f\rho C_p T(t) = \frac{d[V\rho C_v T(t)]}{dt} \tag{3-3.1}$$

donde:

C_{pi}, C_p = capacidades caloríficas de entrada y de salida a presión constante del líquido, respectivamente, J/kg-°C
C_v = capacidad calorífica del líquido a volumen constante, J/kg-°C
$T_i(t)$, $T(t)$ = temperaturas de entrada y de salida, respectivamente, °C.

Debido a que la densidad y la capacidad calorífica se suponen constantes e iguales en el rango de la temperatura de operación, la última ecuación se puede escribir como

$$f\rho C_p T_i(t) - f\rho C_p T(t) = V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt} \tag{3-3.2}$$

Ésta es una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden que expresa la relación entre las temperaturas de entrada y de salida. Es importante señalar que en esta ecuación hay una sola incógnita, $T(t)$. La temperatura de entrada, $T_i(t)$, es una variable de entrada y la que fuerza a la temperatura de salida a cambiar. En este ejemplo queremos estudiar cómo afecta $T_i(t)$ a $T(t)$, y por tanto nos corresponde decidir la forma en que cambiará esta temperatura de entrada. Por consiguiente, $T_i(t)$ no se considera una incógnita. En este capítulo y el siguiente, las variables de entrada no se consideran incógnitas porque se tiene la libertad de cambiarlas a voluntad.

Para indicar que se trata de una ecuación con una incógnita se escribe explícitamente:

$$f\rho C_p T_i(t) - f\rho C_p T(t) = V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt} \tag{3-3.3}$$

1 ec., 1 incóg. [$T(t)$]

La ecuación 3-3.3 es el modelo matemático para este proceso. La solución de esta ecuación diferencial da la respuesta de la temperatura de salida como una función del tiempo. Como se acaba de señalar, la temperatura de entrada es la variable de entrada, la que en ocasiones se denomina función de forzamiento, ya que es la variable que fuerza el cambio en la temperatura de salida. La temperatura de salida es la variable de salida, la que en ocasiones se denomina la variable de respuesta, ya que es la que responde a la función de forzamiento, o variable de entrada.

Como se señaló al principio del ejemplo, también estamos interesados en obtener la función de transferencia que relacione $T(t)$ con $T_i(t)$. Para ello, se sigue una serie de pasos que llevan a la función de transferencia deseada; después de este ejemplo, se formaliza el procedimiento. Se comienza haciendo un cambio de variable que simplifica el desarrollo de la función de transferencia buscada.

Se escribe el balance de energía de estado estacionario del contenido del tanque en las condiciones iniciales:

$$f\rho C_p \bar{T}_i - f\rho C_p \bar{T} = 0 \tag{3-3.4}$$

donde:

$\bar{T}, \bar{T}_i$ = valores iniciales de estado estacionario de las temperaturas de entrada y de salida, respectivamente, °C.

Restando esta última ecuación de la ecuación 3-3.3 se obtiene

$$f\rho C_p [T_i(t) - \bar{T}_i] - f\rho C_p [T(t) - \bar{T}] = V\rho C_v \frac{d[T(t) - \bar{T}]}{dt} \tag{3-3.5}$$

Nótese que la derivada de la temperatura también es igual a

$$\frac{d[T(t) - \bar{T}]}{dt} = \frac{dT(t)}{dt} - \frac{d\bar{T}}{dt} = \frac{dT(t)}{dt} - 0$$

que es el resultado de restar el lado derecho de las ecuaciones 3-3.3 y 3-3.4. Es solamente un truco que va a ayudar en la definición de las variables de desviación y en el desarrollo de las funciones de transferencia.

Ahora se definen las siguientes variables de desviación, como se vio en el capítulo 2:

$$\Gamma(t) = T(t) - \bar{T} \tag{3-3.6}$$

$$\Gamma_i(t) = T_i(t) - \bar{T}_i \tag{3-3.7}$$

donde:

Γ, Γ_i = variables de desviación de las temperaturas de entrada y de salida, respectivamente, °C.

Se sustituyen las ecuaciones 3-3.6 y 3-3.7 en la ecuación 3-3.5 y se obtiene

$$f\rho C_p \Gamma_i(t) - f\rho C_p \Gamma(t) = V\rho C_v \frac{d\Gamma(t)}{dt} \tag{3-3.8}$$

La ecuación 3-3.8 es igual a la ecuación 3-3.3 excepto porque está escrita en términos de variables de desviación. La solución de esta ecuación da como resultado la variable de desviación $\Gamma(t)$ contra el tiempo para cierta entrada $\Gamma_i(t)$. Si se desea la verdadera temperatura de salida, $T(t)$, se debe sumar el valor de estado estacionario $\bar{T}$ a $\Gamma(t)$ de conformidad con la ecuación 3-3.6.

Las variables de desviación son casi de uso exclusivo en la teoría de control y, por tanto, es necesario comprender bien su significado e importancia en el análisis y diseño de sistemas de control de procesos. Como se explicó en el capítulo 2, su valor indica el grado de desviación respecto a algún valor inicial de estado estacionario. En la práctica, este valor de estado estacionario puede ser el valor deseado de la variable. Otra ventaja de usar estas variables es que su valor inicial, suponiendo que se comienza del estado estacionario inicial, es cero, lo cual simplifica la solución de las ecuaciones diferenciales como la ecuación 3-3.8 con la transformada de Laplace.

La ecuación 3-3.8 se puede reordenar ahora como sigue:

$$\frac{V\rho C_v}{f\rho C_p}\frac{d\Gamma(t)}{dt} + \Gamma(t) = \Gamma_i(t)$$

y sea

$$\tau = \frac{V\rho C_v}{f\rho C_p} \tag{3-3.9}$$

de donde

$$\tau\frac{d\Gamma(t)}{dt} + \Gamma(t) = \Gamma_i(t) \tag{3-3.10}$$

En la sección 2-4 se definió τ como la *constante de tiempo*, con unidades de tiempo. Por la ecuación 3-3.9 se observa que para este ejemplo

$$\tau = \frac{[\text{m}^3][\text{kg/m}^3][\text{J/kg-°C}]}{[\text{m}^3/\text{s}][\text{kg/m}^3][\text{J/kg-°C}]} = \text{segundos}$$

Como la ecuación 3-3.10 es una ecuación diferencial lineal, al aplicar la transformada de Laplace se obtiene

$$\tau s\Gamma(s) - \tau\Gamma(0) + \Gamma(s) = \Gamma_i(s)$$

Pero el valor inicial de la temperatura, $T(0)$, es $\bar{T}$, por lo que $\Gamma(0) = 0$. Después de algunas manipulaciones algebraicas simples se obtiene

$$\Gamma(s) = \frac{1}{\tau s + 1}\Gamma_i(s) \tag{3-3.11}$$

o bien,

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma_i(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \tag{3-3.12}$$

La ecuación 3-3.12 es la función de transferencia deseada. Es una función de transferencia de primer orden porque se desarrolla a partir de una ecuación diferencial de primer orden. Como se vio en el capítulo 2, los procesos descritos por este tipo de función de transferencia se denominan *procesos de primer orden, sistemas de primer orden* o *retardos de primer orden.* La ecuación 2-4.6 presentó la forma general de este tipo de función de transferencia. En este ejemplo el valor de K es la unidad.

El término *función de transferencia* se deriva del hecho de que con la solución de la ecuación traslada, o transfiere, la entrada, $\Gamma_i(t)$, a la salida, $\Gamma(t)$. Las funciones de transferencia se tratan con más detalle en la sección 3-5.

Como un breve repaso del capítulo 2, supóngase que la temperatura de entrada al tanque se incrementa en M°C. Es decir, la temperatura de entrada sufre un cambio escalón de M grados de magnitud. Matemáticamente, lo anterior se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} T_i(t) &= \bar{T}_i & t < 0 \\ T_i(t) &= \bar{T}_i + M & t \geq 0 \end{aligned}$$

o, en términos de variables de desviación,

$$\Gamma_i(t) = Mu(t)$$

donde, como se vio en el capítulo 2, $u(t)$ representa un cambio escalón de magnitud unitaria.

Al obtener la transformada de Laplace de $\Gamma_i(t)$, se obtiene

$$\Gamma_i(s) = \frac{M}{s}$$

Sustituyendo $\Gamma_i(s)$ en la ecuación 3-3.11, se obtiene

$$\Gamma(s) = \frac{M}{s(\tau s + 1)}$$

Utilizando el método de fracciones parciales examinado en el capítulo 2 se llega a

$$\Gamma(s) = \frac{M}{s(\tau s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s + 1}$$

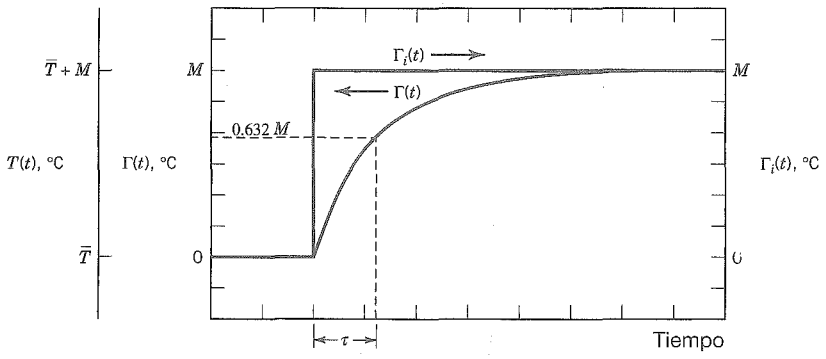


Figura 3-3.2 Respuesta de un proceso de primer orden a un cambio escalón en la variable de entrada.

Obteniendo los valores de A y B e invirtiendo al dominio del tiempo, se obtiene

$$\Gamma(t) = M\,(1 - e^{-t/\tau}) \tag{3-3.13}$$

o bien,

$$T(t) = \bar{T} + M(1 - e^{-t/\tau}) \tag{3-3.14}$$

En la figura 3-3.2 se ilustran gráficamente las soluciones de las ecuaciones 3-3.13 y 3-3.14. La pendiente más pronunciada de la curva de respuesta ocurre al principio de la misma, *es la respuesta típica de los sistemas de primer orden a un cambio escalón en la entrada.*

En la sección 2-4 se presentó el significado de la constante de tiempo del proceso, τ. Sin embargo, para repasar de nuevo el significado, sea $t = \tau$ en la ecuación 3-3.13, de donde se obtiene

$$\Gamma(\tau) = M(1 - e^{-\tau/\tau}) = M(1 - e^{-1})$$
$$\Gamma(\tau) = 0.632M$$

Es decir, *para un cambio escalón en la variable de entrada, la constante de tiempo indica el tiempo que le toma a la variable de salida alcanzar 63.2% de su cambio total;* la figura 3-3.2 ilustra este significado. En cinco constantes de tiempo, 5τ, el proceso alcanza el 99.3% de su cambio total; en esencia, la respuesta se ha completado. En consecuencia, *la constante de tiempo está relacionada con la rapidez de respuesta del proceso.* Entre más lenta sea la respuesta de un proceso a una entrada, mayor será el valor de τ. Entre más rápida sea la respuesta del proceso a una entrada, menor será el valor de τ.

Es importante tener presente que la constante de tiempo se compone de las diferentes propiedades físicas y parámetros de operación del proceso, como lo indica la ecuación 3-3.9. Es decir, la constante de tiempo depende del volumen de líquido en el tanque (V), de las capacidades caloríficas (C_p y C_v) y del flujo del proceso (f). Si alguna de estas características cambia, el comportamiento del proceso también cambia y este cambio se refleja en la rapidez de la respuesta del proceso o constante de tiempo.

Hasta este punto, se ha supuesto que el tanque está bien aislado, es decir, las pérdidas térmicas en el ambiente son despreciables. Por consiguiente, no está presente el término de pérdida de calor en el balance de energía. A continuación se elimina este supuesto y se desarrolla el modelo matemático y las funciones de transferencia que relacionan la temperatura de salida, $T(t)$, con la temperatura de entrada, $T_i(t)$, y con la temperatura ambiente, $T_s(t)$.

Como antes, usando el mismo estado de referencia para las entalpías y la energía interna, se empieza con un balance de energía de estado no estacionario:

$$f\rho C_p T_i(t) - q(t) - f\rho C_p T(t) = V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt}$$

o bien,

$$f\rho C_p T_i(t) - UA[T(t) - T_s(t)] - f\rho C_p T(t) = V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt} \qquad \textbf{(3-3.15)}$$

1 ec., 1 incóg. $[T(t)]$

donde:

$q(t)$ = tasa de transferencia de calor al ambiente, J/s
U = coeficiente global de transferencia de calor, J/m^2-K-s
A = área de transferencia de calor, m^2
$T_s(t)$ = temperatura ambiente, °C, una variable de entrada.

El coeficiente global de transferencia de calor, U, es una función de varios factores, uno de los cuales es la temperatura. Sin embargo, en este ejemplo en particular se supone constante. Puesto que se supone que la masa del líquido en el tanque y su densidad también son constantes, entonces la altura del líquido es constante y, en consecuencia, el área de transferencia de calor, A, también es constante.

La ecuación 3-3.15 es el modelo matemático del proceso. Sigue habiendo una ecuación con una incógnita, $T(t)$. La nueva variable es la temperatura ambiente, $T_s(t)$, que es otra entrada. Como esta temperatura cambia, afecta las pérdidas de calor y, en consecuencia, la temperatura del líquido del proceso.

Para obtener las funciones de transferencia, se empieza introduciendo las variables de desviación. Esto se hace escribiendo primero el balance de energía en estado estacionario del proceso en las condiciones iniciales.

$$f\rho C_p \bar{T}_i - UA[\bar{T} - \bar{T}_s] - f\rho C_p \bar{T} = 0 \qquad \textbf{(3-3.16)}$$

Al restar la ecuación 3-3.16 de la ecuación 3-3.15, se obtiene

$$f\rho C_p [T_i(t) - \bar{T}_i] - UA[T(t) - \bar{T}) - (T_s(t) - \bar{T}_s)]$$
$$- f\rho C_p [T(t) - \bar{T}] = V\rho C_v \frac{d[T(t) - \bar{T}]}{dt} \qquad \textbf{(3-3.17)}$$

Nótese que se ha aplicado de nuevo el truco en el término diferencial (de acumulación).

Se define una nueva variable de desviación como

$$\Gamma_s(t) = T_s(t) - \bar{T}_s \tag{3-3.18}$$

Al sustituir las ecuaciones 3-3.6, 3-3.7 y 3-3.18 en la ecuación 3-3.17, se obtiene

$$f\rho C_p \Gamma_i(t) - UA[\Gamma(t) - \Gamma_s(t)] - f\rho C_p \Gamma(t) = V\rho C_v \frac{d\Gamma(t)}{dt} \tag{3-3.19}$$

La ecuación 3-3.19 es igual a la ecuación 3-3.15 excepto porque está escrita en términos de variables de desviación. Esta ecuación también es diferencial ordinaria lineal de primer orden. La ecuación 3-3.19 se puede reordenar como sigue:

$$\frac{V\rho C_v}{f\rho C_p + UA}\frac{d\Gamma(t)}{dt} + \Gamma(t) = \frac{f\rho C_p}{f\rho C_p + UA}\Gamma_i(t) + \frac{UA}{f\rho C_p + UA}\Gamma_s(t)$$

o bien,

$$\tau\frac{d\Gamma(t)}{dt} + \Gamma(t) = K_1\Gamma_i(t) + K_2\Gamma_s(t) \tag{3-3.20}$$

donde:

$$\tau = \frac{V\rho C_v}{f\rho C_p + UA}, \text{ segundos} \tag{3-3.21}$$

$$K_1 = \frac{f\rho C_p}{f\rho C_p + UA}, \text{ adimensional} \tag{3-3.22}$$

$$K_2 = \frac{UA}{f\rho C_p + UA}, \text{ adimensional} \tag{3-3.23}$$

En el lado derecho de la ecuación 3-3.20 aparecen dos variables de entrada, $\Gamma_i(t)$ y $\Gamma_s(t)$, que actúan sobre la variable de salida, $\Gamma(t)$.

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación 3-3.20, se obtiene

$$\tau s\Gamma(s) - \tau\Gamma(0) + \Gamma(s) = K_1\Gamma_i(s) + K_2\Gamma_s(s)$$

Pero el valor inicial de la temperatura, $T(0)$, es $\bar{T}$, por lo que $\Gamma(0) = 0$. Reordenando esta ecuación, se obtiene

$$\Gamma(s) = \frac{K_1}{\tau s + 1}\Gamma_i(s) + \frac{K_2}{\tau s + 1}\Gamma_s(s) \tag{3-3.24}$$

Si la temperatura ambiente permanece constante, $T_s(t) = \bar{T}_s$, entonces $\Gamma_s(t) = 0$ y la función de transferencia que relaciona la temperatura del proceso con la temperatura de entrada es

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma_i(s)} = \frac{K_1}{\tau s + 1} \tag{3-3.25}$$

Si la temperatura de entrada del líquido permanece constante, $T_i(t) = \bar{T}_i$, entonces $\Gamma_i(t) = 0$, y la función de transferencia que relaciona la temperatura del proceso con la temperatura ambiente es

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma_s(s)} = \frac{K_2}{\tau s + 1} \tag{3-3.26}$$

Si tanto la temperatura de entrada del líquido como la temperatura ambiente cambian, entonces la ecuación 3-3.24 expresa la relación completa, aunque no es una función de transferencia.

Las ecuaciones 3-3.25 y 3-3.26 son las funciones de transferencia de primer orden típicas que se presentaron en la sección 2-4. En este caso, sin embargo, las *ganancias de estado estacionario* (a veces llamadas también *ganancias del proceso*), K_1 y K_2, no son la unidad, como fue en el caso de la ecuación 3-3.12. Para repasar brevemente el significado de estas ganancias de estado estacionario, supóngase que la temperatura de entrada al tanque tiene incremento escalón de M°C, es decir,

$$\begin{aligned} T_i(t) &= \bar{T}_i & t < 0 \\ T_i(t) &= \bar{T}_i + M & t \geq 0 \end{aligned}$$

o bien,

$$\Gamma_i(t) = Mu(t)$$

y

$$\Gamma_i(s) = \frac{M}{s}$$

Entonces la respuesta de la temperatura a esta función de forzamiento está dada por

$$\Gamma(s) = \frac{K_1 M}{s(\tau s + 1)}$$

de donde

$$\Gamma(t) = K_1 M(1 - e^{-t/\tau}) \tag{3-3.27}$$

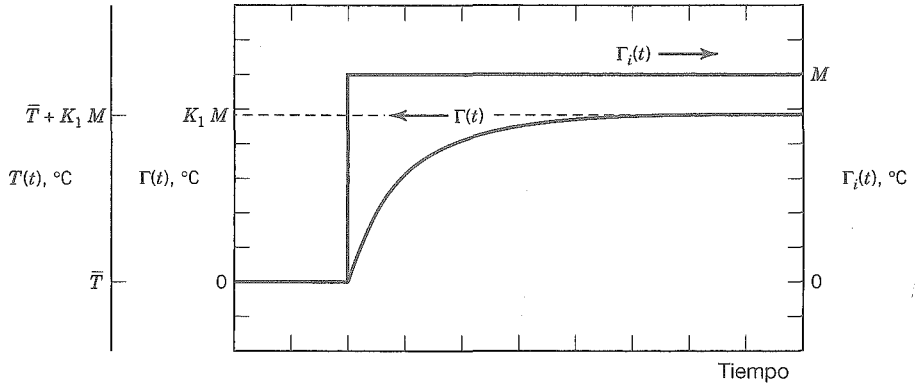


Figura 3-3.3 Respuesta de un proceso de primer orden a un cambio escalón en la variable de entrada.

o bien,

$$T(t) = \bar{T} + K_1 M(1 - e^{-t/\tau}) \tag{3-3.28}$$

La respuesta de salida se ilustra gráficamente en la figura 3-3.3. La cantidad total de cambio en $T(t)$ está dada por $K_1 M$, la ganancia multiplicada por el cambio en la entrada. Por tanto, *la ganancia indica cuánto cambia la salida por unidad de cambio en la entrada o cuánto afecta la entrada a la salida.* Es decir, la ganancia define la *sensibilidad* que relaciona las variables de entrada y de salida. También se puede definir matemáticamente como sigue:

$$K = \frac{\Delta O}{\Delta I} = \frac{\Delta \text{ variable de salida}}{\Delta \text{ variable de entrada}} \tag{3-3.29}$$

La ganancia es otro parámetro que describe las características del proceso y, en consecuencia, depende de las propiedades físicas y los parámetros de operación del proceso, como se muestra en las ecuaciones 3-3.22 y 3-3.23. Las ganancias en este proceso dependen del flujo (f), de la densidad (ρ) y de la capacidad calorífica (C_p) del líquido del proceso, así como del coeficiente global de transferencia de calor (U) y del área de transferencia de calor (A). Si cualquiera de estos factores cambia, el comportamiento del proceso cambia y repercute en la ganancia.

En este ejemplo hay dos ganancias. La primera, K_1, relaciona la temperatura de salida con la temperatura de entrada. La otra ganancia, K_2, relaciona la temperatura de salida con la temperatura ambiente. Las unidades del término de la ganancia deben ser las unidades de la variable de salida divididas entre las unidades de la variable de entrada; lo anterior es evidente por la ecuación 3-3.29.

Nótese que la ganancia indica claramente las características del proceso. En la primera parte de este ejemplo se supuso que el tanque estaba bien aislado, y que la ganancia, dada por la ecuación 3-3.12, era la unidad. Es decir, en el estado estacionario, toda la energía introducida en el caudal de entrada sale en el caudal de salida, y las temperaturas de entrada y de salida son

iguales. Éste no es el caso cuando se suprime el supuesto del buen aislamiento y se permite la transferencia de energía entre el tanque y el ambiente. Nótese que K_1, dada por la ecuación 3-3.22, es menor que uno, indicando que cuando la temperatura de entrada aumenta en M grados, la temperatura de salida no aumenta en la misma cantidad. Es decir, si la energía en el caudal de entrada aumenta, la energía en el caudal de salida no aumenta en la misma cantidad porque parte de esta energía se transfiere al ambiente; esto por supuesto tiene sentido. También tiene sentido que si $UA \ll fpC_p$, la temperatura de entrada tiene un mayor efecto en la temperatura de salida que la temperatura ambiente, es decir $K_2 \ll K_1$.

En la ecuación 3-3.24 se aprecia que sólo hay una constante de tiempo en este proceso. Es decir, el tiempo que se necesita para que la temperatura de salida alcance determinado por ciento de su cambio total debido a un cambio en la temperatura de entrada que es igual al tiempo que se necesita para que alcance el mismo por ciento que su cambio total cuando la temperatura ambiente cambia.

Durante el análisis de un proceso, siempre es importante detenerse en algún punto para verificar si hay errores en el desarrollo; la ecuación 3-3.20 constituye un punto conveniente. Se puede realizar una verificación rápida examinando los signos de la ecuación para ver si tienen sentido en el mundo real. En la ecuación 3-3.20 ambas ganancias son positivas. La ecuación indica que si la temperatura de entrada aumenta, la temperatura de salida también aumenta; esto tiene sentido para este proceso. La ecuación también indica que si la temperatura ambiente aumenta, la temperatura de salida también aumenta. Esto tiene sentido porque si la temperatura ambiente aumenta, la tasa de las pérdidas de calor del tanque se reduce, con lo cual aumenta la temperatura del contenido del tanque. Otra verificación consiste en examinar las unidades de τ y K. Se sabe cuáles deberían ser estas unidades y las ecuaciones, de la 3-3.21 a la 3-3.23 en este ejemplo, deberán confirmar estas expectativas. Con esta verificación rápida se aumenta la confianza y permite continuar el análisis con la renovada confianza del éxito.

Antes de terminar esta sección, se resume el procedimiento que se siguió para desarrollar las funciones de transferencia.

1. Se escriben las ecuaciones de estado no estacionario que describen el proceso. A esto se le llama modelaje.
2. Se escriben las ecuaciones de estado estacionario para las condiciones iniciales.
3. Se restan los dos conjuntos de ecuaciones y se definen las variables de desviación.
4. Se obtienen las transformadas de Laplace del modelo en términos de variables de desviación.
5. Se obtienen las funciones de transferencia resolviendo explícitamente la transformada de Laplace para la(s) variable(s) de salida.

En el ejemplo de un proceso térmico se siguieron estos cinco pasos. Constituyen un procedimiento organizado para desarrollar las funciones de transferencia.

3-4 TIEMPO MUERTO

Considérese el proceso que se muestra en la figura 3-4.1. Se trata, en esencia, del mismo proceso que se ilustra en la figura 3-3.1. Sin embargo, en este caso el interés se encuentra en conocer cómo responde $T_1(t)$ a los cambios en las temperaturas de entrada y ambiente.

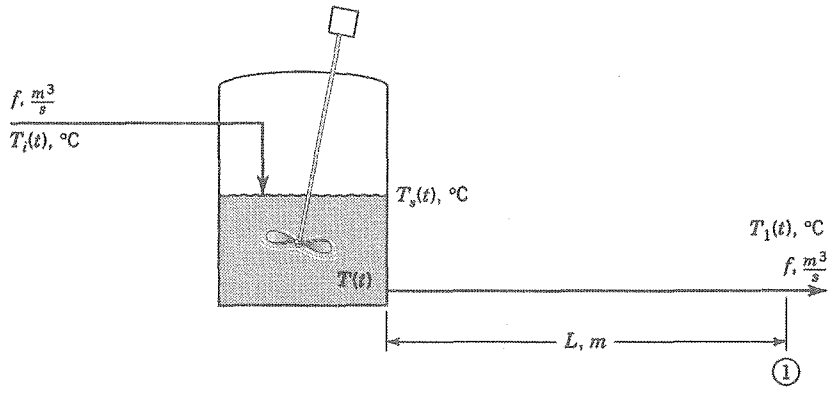


Figura 3-4.1 Proceso térmico.

Se hacen las dos suposiciones siguientes acerca del conducto de salida entre el tanque y el punto 1. Primera, el conducto está bien aislado. Segunda, el flujo del líquido a través del conducto es un flujo pistón ideal (altamente turbulento) sin difusión ni dispersión de energía de tal modo que, en esencia, no hay retromezcla del líquido en el conducto.

Bajo estas suposiciones, la respuesta de $T_1(t)$ a las perturbaciones $T_i(t)$ y $T_s(t)$ será la misma que la de $T(t)$ excepto porque tendrá un retardo de cierta cantidad de tiempo. Es decir, habrá una cantidad finita de tiempo entre la respuesta inicial de $T(t)$ y el cambio de $T_1(t)$; este retardo se ilustra gráficamente en la figura 3-4.2. Esta cantidad finita de tiempo se desarrolla debido al tiempo que le toma al líquido moverse de la salida del tanque al punto 1 y se denomina *tiempo*

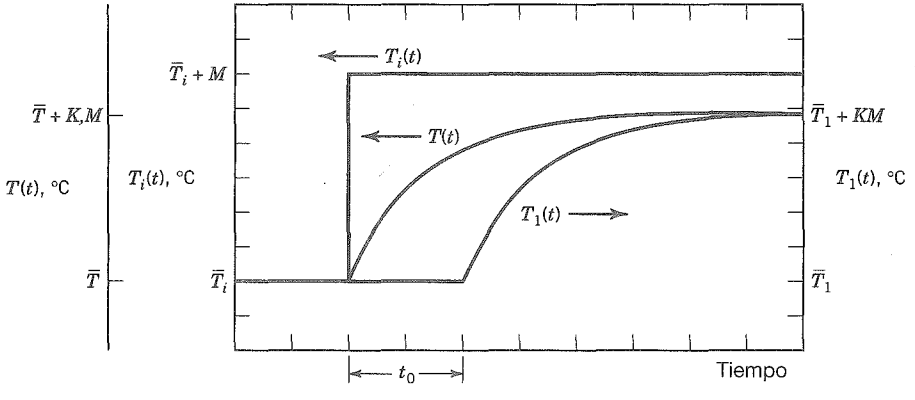


Figura 3-4.2 Respuesta de un proceso térmico a un cambio escalón en la temperatura de entrada.

muerto puro, retardo de transporte o retardo de tiempo. Se representa como t_o y en este caso se puede estimar con facilidad usando

$$t_o = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{L}{f/A_p} = \frac{A_p L}{f} \tag{3-4.1}$$

donde:

f = flujo volumétrico, m^3/s
A_p = área transversal del conducto, m^2
L = longitud del conducto, m.

Las variables físicas diferentes viajan a velocidades diferentes:

- Corrientes y voltajes eléctricos viajan a la velocidad de la luz, es decir, a 300 000 km/s o 984 106 ft/s.
- Presiones y flujos de líquidos viajan a la velocidad del sonido en el fluido: 340 m/s o 1100 ft/s.
- Temperaturas, composiciones y otras propiedades del fluido viajan a la velocidad del fluido: típicamente, hasta 5 m/s (15 ft/s) para líquidos, y 60 m/s (200 ft/s) para gases.
- Las propiedades de los sólidos viajan a la velocidad del sólido, por ejemplo, el carbón en una transportadora, el coque en una cama de filtrado y papel en una máquina para fabricar papel.

A partir de esta información se puede ver que para las distancias más comunes en los sistemas de control de procesos industriales, el tiempo muerto puro solamente es importante para la temperatura, la composición y otras propiedades de fluidos y sólidos que se propagan en el espacio por el movimiento del fluido o sólido.

Aun cuando el tiempo muerto puro (el tiempo muerto debido a la transportación) es despreciable comparado con la constante de tiempo del proceso, la respuesta de muchos procesos puede dar la impresión de contener tiempo muerto debido a la combinación en serie de varios procesos de primer orden, como se verá en los capítulos 4 y 6. No es fácil la evaluación de este pseudotiempo muerto usando principios fundamentales y debe obtenerse empíricamente aproximando la respuesta del proceso. Los métodos para realizar esta evaluación empírica se presentan en el capítulo 7.

Debido a que el tiempo muerto es parte integral de los procesos, es necesario tomarlo en cuenta en las funciones de transferencia. La ecuación 2-1.8 indica que la transformada de Laplace de una función de retardo es igual al producto de la transformada de Laplace de la función sin retardo y el término $e^{-t_o s}$; el término $e^{-t_o s}$ es la transformada de Laplace del tiempo muerto. Por tanto, si se requieren las funciones de transferencia que relacionan $T_1(t)$ con $T_i(t)$ y $T_s(t)$, utilizando las suposiciones enunciadas al principio de la sección, las funciones de transferencia dadas por las ecuaciones 3-3.25 y 3-3.26, se multiplican por $e^{-t_o s}$ o

$$\frac{\Gamma_1(s)}{\Gamma_i(s)} = \frac{K_1 e^{-t_o s}}{\tau s + 1} \tag{3-4.2}$$

y

$$\frac{\Gamma_1(s)}{\Gamma_s(s)} = \frac{K_2 e^{-t_o s}}{\tau s + 1} \tag{3-4.3}$$

En este punto se debe tener presente que el tiempo muerto es otro parámetro que ayuda a definir las características del proceso. La ecuación 3-4.1 indica que t_o depende de ciertas propiedades físicas y de las características operativas del proceso, de manera similar a K y τ. Si cualquiera de las condiciones del proceso cambia, este cambio se puede reflejar en un cambio en t_o.

Antes de concluir esta sección, es necesario subrayar que una de las peores cosas que puede ocurrir en un lazo de control por retroalimentación es la presencia de una cantidad significativa de tiempo muerto en el lazo. El desempeño de los lazos de control por retroalimentación resulta afectado severamente por el tiempo muerto, como se verá en los capítulos 6 y 8. Por tanto, los procesos y los sistemas de control deberán diseñarse para mantener el tiempo muerto en un mínimo. Algunas medidas que se pueden tomar para minimizar el tiempo muerto incluyen hacer las mediciones lo más cerca posible del equipo, seleccionar sensores y elementos de control final de respuesta rápida y el uso de instrumentación electrónica en vez de neumática en los procesos con constantes de tiempo cortas.

3-5 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA Y DIAGRAMAS DE BLOQUES

3-5.1 Funciones de transferencia

En el capítulo 2 se presentó el concepto de funciones de transferencia. Este concepto es a tal punto fundamental para el estudio de la dinámica y el control automático de procesos que se consideran brevemente, una vez más, algunas de sus propiedades y características importantes.

Ya se definió una función de transferencia como el cociente de la transformada de Laplace de la variable de salida y la transformada de Laplace de la variable de entrada. La función de transferencia se representa generalmente por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + 1) e^{-t_o s}}{(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + 1)} \tag{3-5.1}$$

donde:

$G(s)$ = representación general de una función de transferencia
$Y(s)$ = transformada de Laplace de la variable de salida

$X(s)$ = transformada de Laplace de la variable de entrada
K, a's, b's = constantes
t_o = tiempo muerto.

En la ecuación 3-5.1 se muestra la manera más general y más conveniente de escribir una función de transferencia. Cuando se escribe de esta manera (el coeficiente de s^0 es 1 tanto en el polinomio del numerador como en el polinomio del denominador), K representa la ganancia del sistema y sus unidades serán las de $Y(t)$ sobre las de $X(t)$. Las otras constantes, las a y las b, tendrán unidades $(tiempo)^i$, donde i es la potencia de la variable de Laplace, s, multiplicada por la constante particular; con esto se producirá un término adimensional dentro de los paréntesis porque la unidad de s es 1/tiempo.

Nota: en general, las unidades de s son el recíproco de las unidades de la variable independiente que se usa en la definición de la transformada de Laplace, ecuación 2-1.1. En la dinámica y control de procesos la variable independiente es el tiempo y, en consecuencia, las unidades de s son 1/tiempo.

La función de transferencia define completamente las características de estado estacionario y dinámicas, o la respuesta total, de un sistema descrito por una ecuación diferencial lineal. Es característica del sistema, y sus términos determinan si el sistema es estable o inestable y si su respuesta a una entrada no oscilatoria es oscilatoria o no. Se dice que el sistema o proceso es estable cuando su salida se mantiene acotada (finita) para una entrada acotada. El capítulo 2 analiza la estabilidad y la forma en que se relaciona con los términos en la función de transferencia. En los capítulos 6 y 8 se trata con mayor detalle el tema de la estabilidad de los sistemas de proceso.

Algunas propiedades importantes de las funciones de transferencia son:

1. En las funciones de transferencia de los sistemas físicos reales, la potencia más alta de s en el numerador nunca es mayor que la del denominador; en otras palabras, $n \geq m$.
2. La función de transferencia relaciona las transformadas de la desviación de las variables de entrada y de salida a partir de algún estado estacionario inicial. De lo contrario, las condiciones iniciales diferentes de cero contribuirían con términos adicionales en la transformada de la variable de salida. Por ejemplo, si se hubiera decidido obtener la transformada de Laplace de la ecuación 3-3.3 sin restarle el balance de energía de estado estacionario para obtener la ecuación 3-3.8, el resultado hubiera sido

$$\frac{V\rho C_v}{f\rho C_p}\frac{dT(t)}{dt} + T(t) = T_i(t)$$

$$\tau\frac{dT(t)}{dt} + T(t) = T_i(t)$$

$$\tau sT(s) - sT(0) + T(s) = T_i(s)$$

porque en estado estacionario $T(0) = \bar{T}$,

$$\tau s T(s) - \tau \bar{T} + T(s) = T_i(s)$$
$$\tau s T(s) + T(s) = T_i(s) + \tau \bar{T}$$
$$T(s) = \frac{1}{\tau s + 1} T_i(s) + \frac{\tau \bar{T}}{\tau s + 1}$$

y debido al último término (las condiciones iniciales diferentes de cero) es imposible obtener una función de transferencia a partir de esta ecuación.

3. Para los sistemas estables, la relación de estado estacionario entre el cambio en la variable de entrada y el cambio en la variable de salida se obtiene por

$$\lim_{s \to 0} G(s)$$

Esta ecuación se deriva del teorema del valor final que se presentó en el capítulo 2.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$
$$Y(s) = G(s)X(s)$$
$$\lim_{t \to \infty} Y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s)$$
$$\lim_{t \to \infty} Y(t) = \lim_{s \to 0} sG(s)X(s)$$
$$\lim_{t \to \infty} Y(t) = [\lim_{s \to 0} G(s)][\lim_{s \to 0} sX(s)]$$
$$\lim_{t \to \infty} Y(t) = [\lim_{s \to 0} G(s)][\lim_{t \to \infty} X(t)]$$

Esto significa que el cambio en la variable de salida después de un tiempo muy largo, si está acotado, se obtiene multiplicando la función de transferencia evaluada en $s = 0$ por el valor final del cambio en la entrada.

3-5.2 Diagramas de bloques

La representación gráfica de las funciones de transferencia por medio de diagramas de bloques es una herramienta muy útil en el control de procesos. En esta sección se presenta una introducción a los diagramas de bloques y a su álgebra.

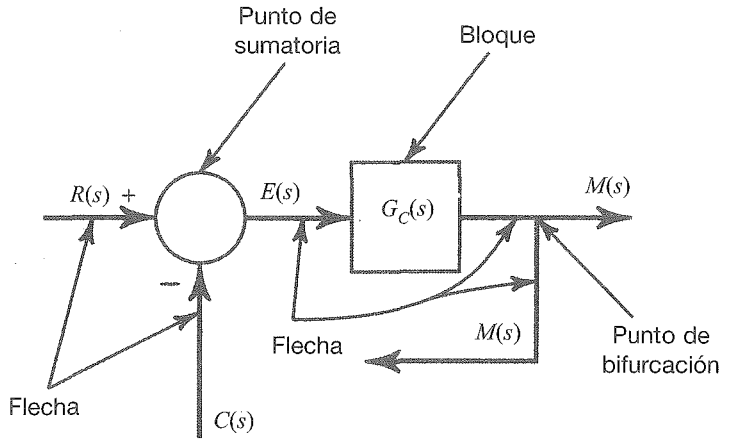


Figura 3-5.1 Elementos de un diagrama de bloques.

Todos los diagramas de bloques constan de una combinación de cuatro elementos básicos: flechas, puntos de sumatoria, puntos de bifurcación y bloques; en la figura 3-5.1 se ilustran estos elementos. Las flechas indican el flujo de la información; representan variables del proceso o señales de control. Cada punta de flecha indica la dirección del flujo de la información. Los puntos de sumatoria representan la suma algebraica de las flechas de entradas, $E(s) = R(s) - C(s)$. Un punto de bifurcación es la posición sobre una flecha en la que la información se ramifica para dirigirse de manera concurrente a otros puntos de sumatoria o bloques. Los bloques representan la operación matemática, en forma de función de transferencia tal como $G(s)$, la cual se realiza sobre la entrada para producir la salida. Las flechas y los bloques de la figura 3-5.1 representan la expresión matemática

$$M(s) = G_c(s)E(s) = G_c(s)[R(s) - C(s)]$$

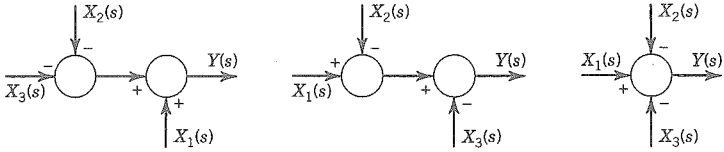
Cualquier diagrama de bloques se puede tratar, o manipular, algebraicamente. En la tabla 3-5.1 se muestran algunas reglas del álgebra de diagramas de bloques. Estas reglas son muy importantes y se deben utilizar siempre que se requiera simplificar un diagrama de bloques complicado. A continuación se explicarán algunos ejemplos del álgebra de diagramas de bloques.

Ejemplo 3-5.1 Trazar el diagrama de bloques que describa las ecuaciones 3-3.12 y 3-3.24.

La ecuación 3-3.12 se muestra en la figura 3-5.2. La ecuación 3-3.24 se puede representar de dos maneras diferentes, como se muestra en la figura 3-5.3. Es común inclinarse por la que tiene menos bloques debido a que es más simple.

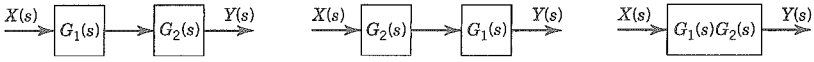
Tabla 3-5.1 Reglas para el álgebra de los diagramas de bloques

1. $Y(s) = X_1(s) - X_2(s) - X_3(s)$



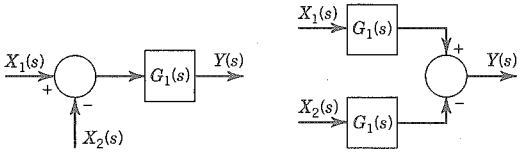
2. Propiedades asociativa y conmutativa:

$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)X(s) = G_2(s)G_1(s)X(s)$$



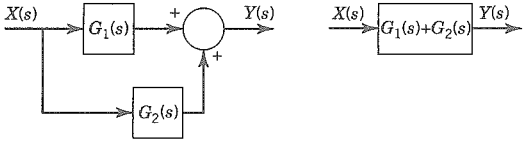
3. Propiedad distributiva:

$$Y(s) = G_1(s)[X_1(s) - X_2(s)] = G_1(s)X_1(s) - G_1(s)X_2(s)$$



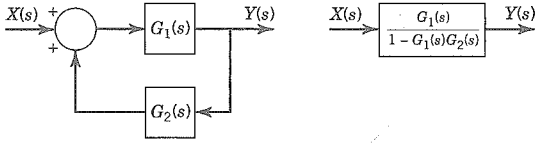
4. Bloques en paralelo:

$$Y(s) = [G_1(s) + G_2(s)]X(s) = G_1(s)X(s) + G_2(s)X(s)$$



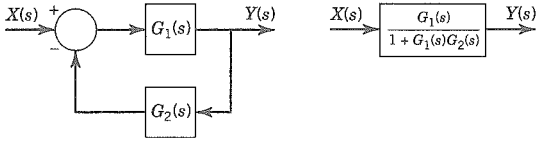
5. Lazo de retroalimentación positiva:

$$Y(s) = G_1(s)[X(s) + G_2(s)Y(s)] = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}X(s)$$



6. Lazo de retroalimentación negativa:

$$Y(s) = G_1(s)[X(s) - G_2(s)Y(s)] = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}X(s)$$



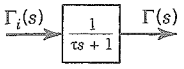


Figura 3-5.2 Diagrama de bloques de la ecuación 3-3.12.

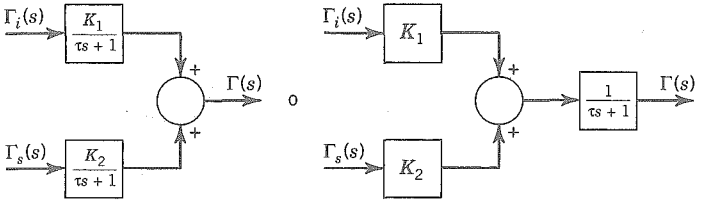


Figura 3-5.3 Diagrama de bloques de la ecuación 3-3.24.

En los diagramas de bloques de la ecuación 3-3.24 se ilustra gráficamente que la respuesta total del sistema puede obtenerse mediante la suma algebraica de la respuesta debida al cambio en la temperatura de entrada y la respuesta debida al cambio en la temperatura ambiente. Esta suma algebraica de las respuestas debidas a varias entradas para obtener la respuesta final es una propiedad particular de los sistemas lineales y se conoce como el principio de superposición. Este principio también sirve como base para definir sistemas lineales. Esto es, se dice que un sistema es lineal si cumple con el principio de superposición.

Ejemplo 3-5.2 Determinar las funciones de transferencia que relacionan $Y(s)$ con $X_1(s)$ y $X_2(s)$ a partir del diagrama de bloques de la figura 3-5.4*a*. Es decir, obtener

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} \quad \text{y} \quad \frac{Y(s)}{X_2(s)}$$

Al aplicar la regla 4, el diagrama de bloques de la figura 3-5.4*a* se puede reducir al de la figura 3-5.4*b* (nótese que la palabra "reducir" se utiliza en este contexto en el sentido de "simplificar" y que consiste en reducir el número de bloques). Al aplicar la regla 2, la figura 3-5.4*b* se puede reducir aún más al diagrama de la figura 3-5.4*c*. Entonces

$$Y(s) = G_3(G_1 - G_2)X_1(s) + (G_4 - 1)X_2(s)$$

a partir de la cual se pueden determinar las dos funciones de transferencia que se desean:

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = G_3(G_1 - G_2)$$

y

$$\frac{Y(s)}{X_2(s)} = G_4 - 1$$

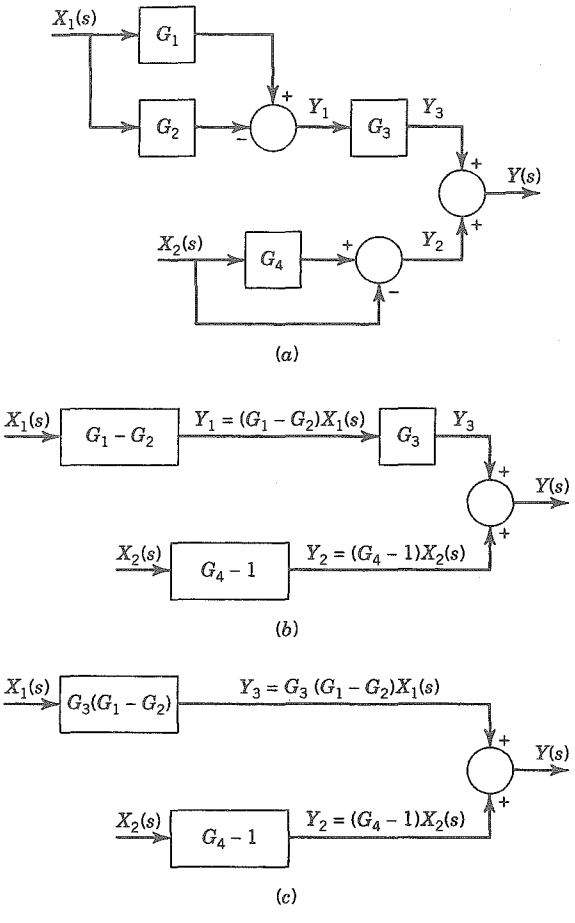


Figura 3-5.4 Diagrama de bloques del ejemplo 3-5.2.

Con este ejemplo se ilustra un procedimiento para reducir un diagrama de bloques a una función de transferencia. Esta reducción de los diagramas de bloques es necesaria en el estudio del control de procesos, como se verá en capítulos subsecuentes. En esos capítulos se desarrollarán numerosos ejemplos de diagramas de bloques de sistemas de control por retroalimentación, control en cascada, control feedforward y control multivariable. A continuación se estudia la reducción de algunos de estos diagramas de bloques a funciones de transferencia.

Ejemplo 3-5.3 En la figura 3-5.5*a* se ilustra el diagrama de bloques de un sistema de control por retroalimentación típico. A partir de este diagrama, determinar

$$\frac{C(s)}{L(s)} \quad \text{y} \quad \frac{C(s)}{C^{\text{set}}(s)}$$

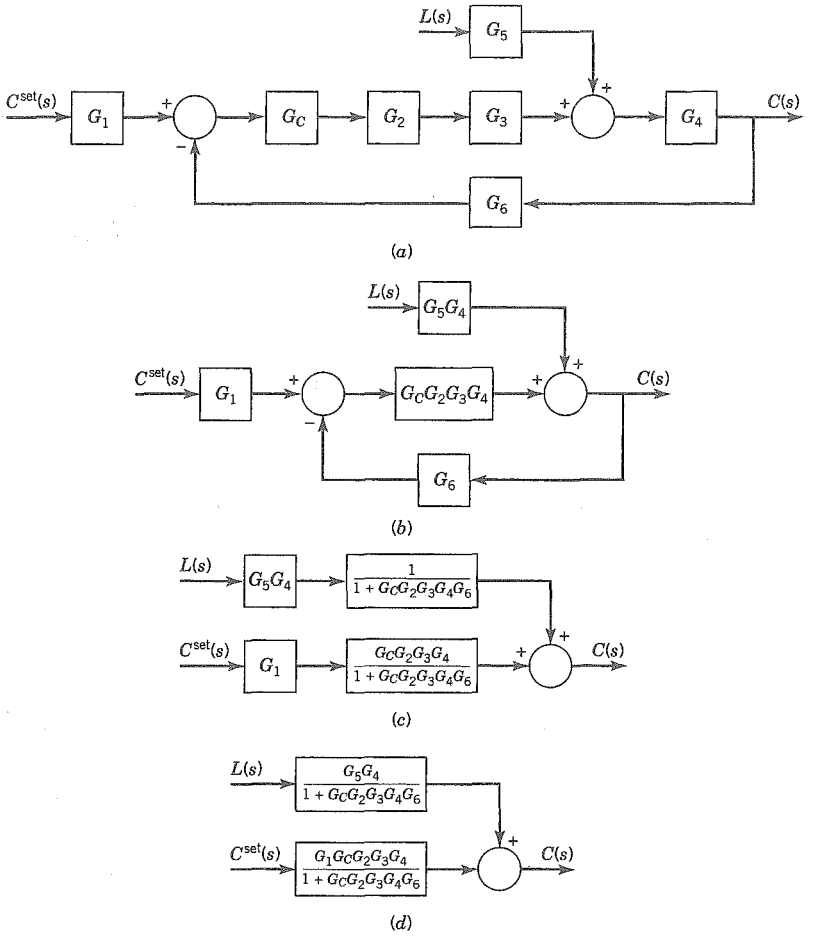


Figura 3-5.5 Diagrama de bloques de un sistema de control por retroalimentación.

Las figuras 3-5.5*b*, *c* y *d* muestran los diferentes pasos para reducir la figura inicial utilizando las reglas de la tabla 3-5.1. Por último, de la figura 3-5.5*d* se obtienen las funciones de transferencia deseadas

$$\frac{C(s)}{C^{\text{set}}(s)} = \frac{G_1 G_C G_2 G_3 G_4}{1 + G_C G_2 G_3 G_4 G_6} \tag{3-5.2}$$

y

$$\frac{C(s)}{L(s)} = \frac{G_5 G_4}{1 + G_C G_2 G_3 G_4 G_6} \tag{3-5.3}$$

En el ejemplo 3-5.3 se muestra cómo reducir el diagrama de bloques de un sistema de control por retroalimentación simple a funciones de transferencia. Este tipo de diagramas de bloques y de funciones de transferencia serán útiles en los capítulos 6, 7 y 8, donde se examina el control por retroalimentación.

Las funciones de transferencia dadas por las ecuaciones 3-5.2 y 3-5.3 se conocen como funciones de transferencia de lazo cerrado. La razón de este término se hará evidente en el capítulo 6. Al considerar la ecuación 3-5.2 se observa que el numerador es el producto de todas las funciones de transferencia en la trayectoria hacia adelante entre las dos variables relacionadas y la función de transferencia $C(s)$ y $C^{set}(s)$. El denominador de esta ecuación es uno (1) más el producto de todas las funciones de transferencia en el lazo de control de la figura 3-5.5*a*. El análisis de la ecuación 3-5.3 indica que el numerador es nuevamente el producto de las funciones de transferencia en la trayectoria hacia adelante entre $L(s)$ y $C(s)$. El denominador es el mismo que en la ecuación 3-5.2. Si hubiese más de una trayectoria hacia adelante entre la entrada y la salida, el desarrollo habría mostrado el numerador como la suma algebraica del producto de las funciones de transferencia en cada trayectoria hacia adelante.

Ejemplo 3-5.4 Considérese otro diagrama de bloques típico, como el de la figura 3-5.6*a*. En el capítulo 9 se establece que este diagrama de bloques describe un sistema de control en cascada. Por ahora, sencillamente determinar las siguientes funciones de transferencia:

$$\frac{C(s)}{R(s)} \quad \text{y} \quad \frac{C(s)}{L(s)}$$

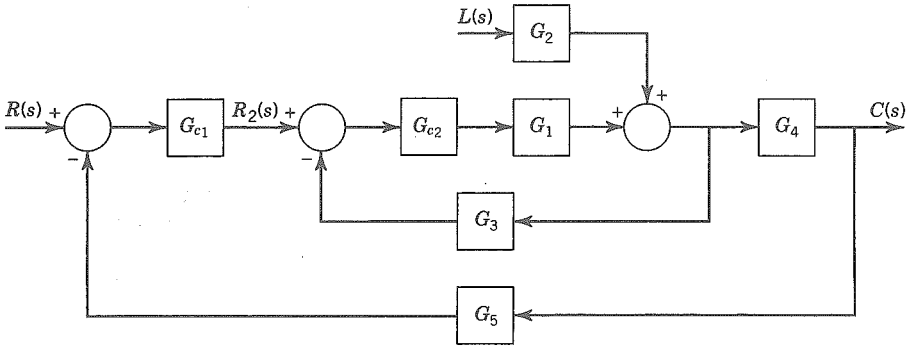
Se puede considerar que el diagrama de bloques de la figura 3-5.6*a* está compuesto de dos sistemas de lazo cerrado, uno dentro del otro (en la práctica, esto es exactamente lo que sucede). En las figuras 3-5.6*b* y *c* se muestran los pasos para reducir el diagrama de bloques de la figura 3-5.6*a*; la regla 6 se aplica dos veces. De la figura 3-5.6*d* se obtienen las siguientes funciones de transferencia:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1}G_{c2}G_1G_4}{1 + G_{c2}G_1G_3 + G_{c1}G_{c2}G_1G_4G_5} \tag{3-5.4}$$

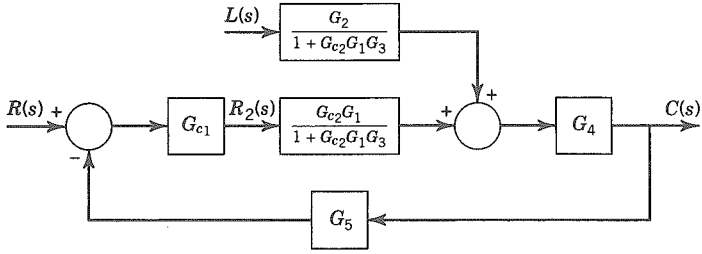
y

$$\frac{C(s)}{L(s)} = \frac{G_2G_4}{1 + G_{c2}G_1G_3 + G_{c1}G_{c2}G_1G_4G_5} \tag{3-5.5}$$

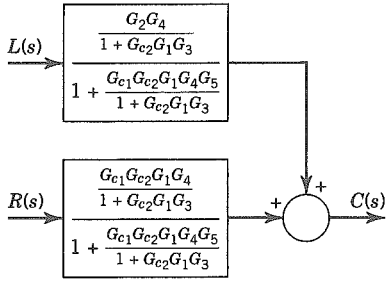
Se ha aprendido cómo desarrollar varias funciones de transferencia, ecuaciones 3-5.2, 3-5.3, 3-5.4 y 3-5.5, a partir de un diagrama de bloques. Sin embargo, no se ha tratado de explicar el significado de las mismas; esto se hará en los capítulos donde se presentan los sistemas de control.



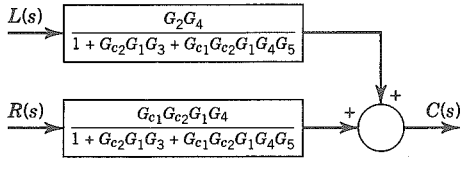
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3-5.6 Diagrama de bloques de un sistema de control en cascada.

Una recomendación útil es escribir enseguida de cada flecha las unidades de la variable del proceso o la señal de control a la que representa la flecha. Al proceder así, es bastante simple identificar las unidades de la ganancia de un bloque, las cuales son las unidades de la flecha de salida sobre las unidades de la flecha de entrada. Este procedimiento también ayuda a evitar la sumatoria algebraica de flechas con unidades diferentes; el procedimiento se muestra en detalle en los capítulos 6, 9, 10, 11 y 12.

Como se mencionó al principio de esta sección, los diagramas de bloques son una herramienta muy útil en el control de procesos. Muestran gráficamente el flujo de la información, identifican las señales (o variables) de entrada y de salida de un sistema, y muestran la presencia de lazos y trayectorias en paralelo. Se aprenderá y practicará más acerca de la lógica del trazo de diagramas de bloques conforme se avance en el estudio de la dinámica y control de procesos. Varios capítulos utilizan diagramas de bloques como auxiliares para el análisis y diseño de sistemas de control.

3-6 EJEMPLO DE UN PROCESO DE GAS

Considérese el tanque de gas que se muestra en la figura 3-6.1. Un ventilador sopla aire dentro del tanque, de donde el aire sale a través de una válvula. Para los fines de este ejemplo, se supone que el flujo de aire producido por el ventilador está dado por

$$f_i(t) = 0.16m_i(t)$$

donde:

$f_i(t)$ = flujo del gas en scf/min, donde scf son pies cúbicos a las condiciones estándar de 60°F y 1 atm.
$m_i(t)$ = señal al ventilador, %.

El flujo que pasa por la válvula está expresado por

$$f_o(t) = 0.00506m_o(t)\sqrt{p(t)[p(t) - p_1(t)]}$$

donde:

$f_o(t)$ = flujo del gas, en scf/min
$m_o(t)$ = señal a la válvula, %
$p(t)$ = presión en el tanque, psia (libras por pulgada cuadrada de presión absoluta)
$p_1(t)$ = presión a la salida de la válvula, psia.

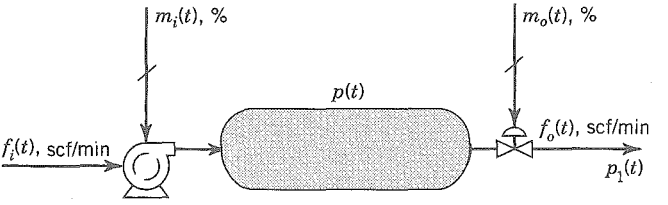


Figura 3-6.1 Tanque de gas.

El volumen del tanque es de 20 ft^3 y se puede suponer que el desarrollo del proceso es isotérmico a una temperatura de 60°F. Las condiciones iniciales de estado estacionario son

$$\bar{f}_i = \bar{f}_o = 8 \text{ scfm}; \quad \bar{p} = 40 \text{ psia}; \quad \bar{p}_1 = 1 \text{ atm}; \quad \bar{m}_i = \bar{m}_o = 50\%$$

Se quiere desarrollar el modelo matemático, las funciones de transferencia y el diagrama de bloques que relaciona la presión en el tanque con los cambios en la señal al ventilador, $m_i(t)$, en la señal a la válvula, $m_o(t)$, y en la presión a la salida, $p_1(t)$.

Primero debe desarrollarse el modelo matemático. Un balance molar de estado no estacionario alrededor del volumen de control, definido como el ventilador, el tanque y la válvula de salida, da lugar a la relación de partida. Es decir,

Tasa de moles que entra al volumen de control	—	Tasa de moles que sale del volumen de control	=	Tasa de cambio de moles acumulados en el volumen de control

o, en forma de ecuación,

$$\bar{\rho} f_i(t) - \bar{\rho} f_o(t) = \frac{dn(t)}{dt} \tag{3-6.1}$$

1 ec., 3 incóg. $[f_i(t), f_o(t), n(t)]$

donde:

$\bar{\rho}$ = densidad molar del gas en condiciones estándar, 0.00263 lbmol/scf
$n(t)$ = moles de gas en el tanque, lbmol.

El ventilador proporciona otra ecuación:

$$f_i(t) = 0.16 m_i(t) \tag{3-6.2}$$

2 ec., 3 incóg.

Nótese que como $m_i(t)$ es una variable de entrada, depende de nosotros decidir cómo va a cambiar. Por tanto, no se considera una incógnita.

La válvula proporciona una ecuación más:

$$f_o(t) = 0.00506 m_o(t)\sqrt{p(t)[p(t) - p_1(t)]} \qquad \textbf{(3-6.3)}$$

3 ec., 4 incóg. $[p(t)]$

La señal $m_o(t)$ y la presión a la salida $p_1(t)$ también son variables de entrada y por consiguiente no se consideran incógnitas.

Debido a que la presión en el tanque es baja, se puede usar la ecuación de estado de los gases ideales para relacionar los moles en el tanque con la presión:

$$p(t)V = n(t)RT \qquad \textbf{(3-6.4)}$$

4 ec., 4 incóg.

El sistema de ecuaciones 3-6.1 a 3-6.4 constituye el modelo matemático para este proceso. La solución de este conjunto de ecuaciones describe, considerando las suposiciones que se han hecho, la manera en que la presión en el tanque (la salida) responde a los cambios en $m_i(t)$, $m_o(t)$, y $p_1(t)$ (las entradas).

Hasta el momento se ha completado el primer paso del procedimiento descrito al final de la sección 3-3. Antes de continuar con el segundo paso, es necesario tener presente que la expresión para $f_o(t)$, ecuación 3-6.3, es una ecuación no lineal. Como la transformada de Laplace, sólo se puede aplicar a sistemas lineales. Por tanto, antes de continuar con el segundo paso, es necesario linealizar todos los términos no lineales. Esta linealización se hace utilizando expansión en la serie de Taylor que se presentó en el capítulo 2.

Como $f_o(t) = f_o[m_o(t), p(t), p_1(t)]$, su linealización se hace con respecto a $m_0(t)$, $p(t)$ y $p_1(t)$ alrededor de sus valores de estado estacionario $\bar{m}_o$, $\bar{p}$ y $\bar{p}_1$.

$$f_o(t) \approx \bar{f}_o + \left.\frac{\partial f_o(t)}{\partial m_o(t)}\right|_{ss} [m_o(t) - \bar{m}_o] + \left.\frac{\partial f_o(t)}{\partial p(t)}\right|_{ss} [p(t) - \bar{p}]$$

$$+ \left.\frac{\partial f_o(t)}{\partial p_1(t)}\right|_{ss} [p_1(t) - \bar{p}_1]$$

o bien,

$$f_o(t) \approx \bar{f}_o + C_1[m_o(t) - \bar{m}_o] + C_2[p(t) - \bar{p}] + C_3[p_1(t) - \bar{p}_1] \qquad \textbf{(3-6.5)}$$

donde

$$C_1 = \left.\frac{\partial f_o(t)}{\partial m_o(t)}\right|_{ss} = 0.00506\sqrt{\bar{p}(\bar{p} - \bar{p}_1)} \tag{3-6.6}$$

$$C_2 = \left.\frac{\partial f_o(t)}{\partial p(t)}\right|_{ss} = 0.00506\bar{m}_o(1/2)[\bar{p}(\bar{p} - \bar{p}_1)]^{-1/2}(2\bar{p} - \bar{p}_1) \tag{3-6.7}$$

$$C_3 = \left.\frac{\partial f_o(t)}{\partial p_1(t)}\right|_{ss} = 0.00506\bar{m}_o(1/2)[\bar{p}(\bar{p} - \bar{p}_1)]^{-1/2}(-\bar{p}) \tag{3-6.8}$$

y

$$\bar{f}_o = f_o[\bar{m}_o, \bar{p}, \bar{p}_1] \tag{3-6.9}$$

Las ecuaciones 3-6.1, 3-6.2, 3-6.4 y 3-6.5 conforman un sistema de ecuaciones lineales que describen el proceso alrededor de los valores de linealización $\bar{m}_o$, $\bar{p}$ y $\bar{p}_1$; se siguen teniendo cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Para simplificar el sistema, se despeja $n(t)$ en la ecuación 3-6.4 y se sustituye en la ecuación 3-6.1

$$\bar{\rho} f_1(t) - \bar{\rho} f_o(t) = \frac{V}{RT}\frac{dp(t)}{dt} \tag{3-6.10}$$

Con esta sencilla sustitución el sistema se reduce a tres ecuaciones, ecuaciones 3-6.10, 3-6.2 y 3-6.5, con tres incógnitas, $f_i(t)$, $f_o(t)$ y $p(t)$.

Ahora se puede proceder con los dos pasos siguientes del procedimiento, los cuales indican escribir las ecuaciones de estado estacionario, restarlas de sus respectivas contrapartes y definir las variables de desviación requeridas.

Primero se escribe el balance molar de estado estacionario alrededor del tanque.

$$\bar{\rho}\bar{f}_i - \bar{\rho}\bar{f}_o = 0$$

Restando esta ecuación de la ecuación 3-6.10 se obtiene

$$\bar{\rho}[f_i(t) - \bar{f}_i] - \bar{\rho}[f_o(t) - \bar{f}_o] = \frac{V}{RT}\frac{d[p(t) - \bar{p}]}{dt} \tag{3-6.11}$$

Definiendo las variables de desviación siguientes

$$F_i(t) = f_i(t) - \bar{f}_i; \qquad F_o(t) = f_o(t) - \bar{f}_o; \qquad P(t) = p(t) - \bar{p}$$

y sustituyendo estas variables en la ecuación 3-6.11 se obtiene

$$\bar{\rho}F_i(t) - \bar{\rho}F_o(t) = \frac{V}{RT}\frac{dP(t)}{dt} \tag{3-6.12}$$

Escribiendo la ecuación de estado estacionario para el ventilador y restándola de la ecuación 3-6.2 se obtiene

$$F_i(t) = 0.16\, M_i(t) \tag{3-6.13}$$

donde $M_i(t) = m_i(t) - \bar{m}_i$.

Por la ecuación 3-6.5, después de restar el valor de estado estacionario $\bar{f}_o$ de ambos lados de la ecuación

$$F_o(t) = C_1M_o(t) + C_2P(t) + C_3P_1(t) \tag{3-6.14}$$

donde:

$$M_o(t) = m_o(t) - \bar{m}_o$$
$$P_1(t) = p_1(t) - \bar{p}_1$$

Resumiendo lo que se ha hecho, se tienen ahora tres ecuaciones, las ecuaciones 3-6.12, 3-6.13 y 3-6.14, y tres incógnitas, $F_i(t)$, $F_o(t)$ y $P(t)$. Todas las ecuaciones y las variables están en la forma de desviaciones.

Se procede ahora con los dos últimos pasos del procedimiento para obtener las funciones de transferencia. Sustituyendo las ecuaciones 3-6.13 y 3-6.14 en la ecuación 3-6.12, tomando la transformada de Laplace y reordenando los términos se obtiene

$$P(s) = \frac{K_1}{\tau s + 1}M_i(s) - \frac{K_2}{\tau s + 1}M_o(s) - \frac{K_3}{\tau s + 1}P_1(s) \tag{3-6.15}$$

donde:

$$K_1 = \frac{0.16}{C_2}, \frac{psi}{\%}; \quad K_2 = \frac{C_1}{C_2}, \frac{psi}{\%}; \quad K_3 = \frac{C_3}{C_2}, \frac{psi}{psi}; \quad \tau = \frac{V}{RT\bar{\rho}C_2}, \text{min} \tag{3-6.16}$$

Ahora se pueden obtener las funciones de transferencia

$$\frac{P(s)}{M_i(s)} = \frac{K_1}{\tau s + 1} \tag{3-6.17}$$

$$\frac{P(s)}{M_o(s)} = \frac{-K_2}{\tau s + 1} \tag{3-6.18}$$

y

$$\frac{P(s)}{P_1(s)} = \frac{-K_3}{\tau s + 1} \tag{3-6.19}$$

Como se conocen los valores de estado estacionario y otra información del proceso, las ganancias y la constante de tiempo se pueden evaluar como

$$K_1 = 0.615\frac{psi}{\%}; \qquad K_2 = 0.619\frac{psi}{\%}; \qquad K_3 = -0.611\frac{psi}{psi}; \qquad \tau = 5.242 \text{ min}$$

Todas las funciones de transferencia son de primer orden. En la figura 3-6.2 se muestra el diagrama de bloques para este proceso.

Después de considerar la presentación del capítulo 2 acerca de las funciones de transferencia y sus respuestas a diferentes entradas, y después de lo que se ha presentado en este capítulo, deberá tenerse una buena idea de la respuesta completa de cualquier sistema de primer orden. Al analizar la ecuación 3-6.17 se sabe que si la señal al ventilador aumenta 10%, la presión en el tanque cambiará en última instancia $+(10)(K_1)$ psi. También se sabe que 63.2% de este cambio, o $0.632(10)(K_1)$, ocurrirá en una constante de tiempo. En la figura 3-6.3 se muestra la respuesta total. Recuerde que K_1 es la ganancia que $M_i(t)$ tiene sobre $P(t)$ y que τ proporciona la rapidez con que $P(t)$ responde al cambio en $M_i(t)$.

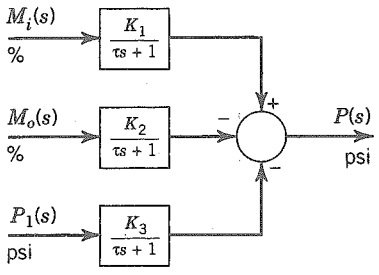


Figura 3-6.2 Diagramas de bloques para el proceso de gas.

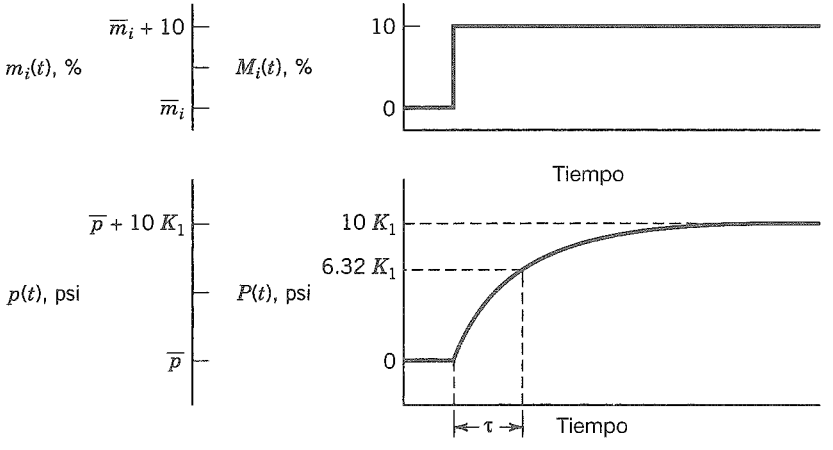


Figura 3-6.3 Respuesta de la presión a la señal al ventilador.

La ecuación 3-6.18 indica que si la señal a la válvula aumenta 5%, la presión en el tanque disminuirá $(5)K_2$ psi. El signo negativo antes de la ganancia indica este tipo de respuesta. Desde luego que tiene sentido que cuando la señal a la válvula aumenta, y la válvula se abre y permite extraer más gas del tanque, la presión en el tanque debe disminuir.

La ecuación 3-6.19 indica que si la presión a la salida de la válvula aumenta 3 psi, la presión en el tanque disminuirá $(3)K_3$ psi. Es decir, si $P_1(t)$ tiene un cambio de +3 psi, $P(t)$ cambiará $-(3)K_3$ psi. Sin embargo, desde el punto de vista físico esto no tiene sentido. Si la presión a la salida aumenta, entonces el flujo que pasa por la válvula disminuye, lo que aumenta la presión en el tanque. Entonces, ¿dónde está la discrepancia? Revisando la definición de K_3, se observa que depende de C_3 y, con base en la ecuación 3-6.8, resulta evidente que C_3 es negativa. Por tanto, K_3 es negativa ($K_3 = -0.611$), y por consiguiente la presión en el tanque en realidad aumenta.

En este punto es necesario reformular el procedimiento para obtener las funciones de transferencia. Esto es necesario porque ahora es claro que la linealización de términos no lineales es un paso importante en el procedimiento.

1. Se escribe el sistema de ecuaciones de estado no estacionario que describe al proceso. A esto se le llama modelaje.
2. Se hace la linealización del modelo si es necesario.
3. Se escriben las ecuaciones de estado estacionario para las condiciones iniciales.
4. Se restan los dos sistemas de ecuaciones y se definen las variables de desviación.
5. Se obtienen las transformadas de Laplace del modelo lineal en variables de desviación.
6. Se obtienen las funciones de transferencia resolviendo explícitamente la transformada de Laplace para la(s) variable(s) de salida transformada(s).

3-7 REACTORES QUÍMICOS

3-7.1 Notas introductorias

En el ejemplo que se presenta en esta sección ocurre una reacción química. Puesto que la estequiometría de las reacciones se indica en moles, los balances realizados en los reactores químicos por lo general son balances molares, sea en un componente específico i o en moles totales. Sin embargo, el problema es que los balances molares no se pueden escribir usando las ecuaciones presentadas en la introducción de este capítulo, es decir, tomando el reactor como el volumen de control:

$$\begin{array}{c}\text{Tasa del componente } i \\ \text{que entra al reactor}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Tasa del componente } i \\ \text{que sale del reactor}\end{array} \neq \begin{array}{c}\text{Tasa de cambio del componente } i \\ \text{acumulado en el reactor}\end{array}$$

En una reacción química, los moles no necesariamente se conservan. Considérese, por ejemplo, la reacción $2A + B \rightarrow 3S + P$. Operando en estado estacionario, los moles de A que salen del

reactor no son iguales a los que entran (¡el reactivo A se consume en la reacción!). Del mismo modo, se consumen 3 moles de reactivos, mientras que se forman 4 moles de productos, de tal modo que los moles totales tampoco se conservan. Sin embargo, recuérdese que la masa total siempre se conserva.

Por lo tanto, las ecuaciones del balance molar tienen que considerar la producción o reducción de moles debidas a la reacción. El balance molar de estado no estacionario (balance dinámico molar) de los componentes que toma en consideración esta producción o reducción se escribe como:

Tasa del componente i que entra al reactor	−	Tasa del componente i que sale del reactor	+	Tasa de producción del componente i	=	Tasa de cambio del componente i acumulado en el reactor

La tasa de producción del componente i en el reactor por lo general está dada por:

$$\text{Tasa de producción del componente } i = v_i r_k V, \text{ moles del componente } i/\text{tiempo}$$

donde:

v_i = coeficiente estequiométrico del componente i en la reacción
V = volumen de la mezcla de reacción
r_k = tasa de reacción del componente clave en la reacción. Esta tasa (siempre positiva) por lo general se da como $\dfrac{\text{moles del componente clave formado o con reacción}}{(\text{volumen de la mezcla de reacción})(\text{tiempo})}$

Un término importante en las definiciones anteriores es el *componente clave*. Éste puede ser cualquier componente —reactivo o producto— en la reacción. El coeficiente estequiométrico, v_i, del componente elegido se hace igual a 1. Un valor positivo v_i indica la producción del componente i, un valor negativo de v_i indica el consumo del componente i. Por tanto, la tasa de cambio de cualquier componente i está dada por el producto de la tasa de reacción del componente clave, el volumen de la mezcla de reacción y el número de moles del componente i que cambian por mol del componente clave que reacciona.

Para demostrar con mayor detalle la aplicación de este balance molar del componente, considérese la reacción antes dada. Supóngase que para esta reacción la tasa se determina experimentalmente como $r_B = kc_A(t)c_B(t)$, moles de B/(volumen)(tiempo), donde B es el componente clave. Por lo tanto, $v_A = -2$, $v_B = -1$, $v_P = 1$, $v_S = 3$.

Un balance molar de estado no estacionario del componente A se escribe como

$$\text{Tasa de moles de A que entra al reactor} - \text{Tasa de moles de A que sale del reactor} + (-2)r_B V = \frac{dn_A(t)}{dt}$$

donde $n_A(t)$ son los moles del componente A acumulados en el reactor.

Un balance molar de estado no estacionario del componente S se escribe como

$$\begin{matrix}\text{Tasa de moles de S}\\ \text{que entra al reactor}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Tasa de moles de S}\\ \text{que sale del reactor}\end{matrix} + 3r_B V = \frac{dn_S(t)}{dt}$$

donde $n_S(t)$ son los moles del componente S acumulados en el reactor.

El balance molar total de estado no estacionario del componente S se escribe como

$$\begin{matrix}\text{Tasa de moles}\\ \text{totales que entra}\\ \text{al reactor}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Tasa de moles}\\ \text{totales que sale}\\ \text{del reactor}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Tasa de producción}\\ \text{de los moles}\\ \text{totales}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Tasa de cambio de los}\\ \text{moles totales acumulados}\\ \text{en el reactor}\end{matrix}$$

y

$$\text{La tasa de producción de moles totales} = v_T r_k V, \text{ moles/tiempo}$$

donde:

$$v_T = \Sigma_i v_i. \text{ Para la reacción particular en cuestión,}$$
$$v_T = v_S + v_P - v_A - v_B = 3 + 1 - 2 - 1 = 1.$$

Asimismo, el balance de energía también tiene que considerar la energía perdida o ganada por la reacción. Es común escribir la ecuación del balance de energía como

$$\begin{matrix}\text{Tasa de energía}\\ \text{que entra al reactor}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Tasa de energía}\\ \text{que sale del reactor}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Tasa de energía}\\ \text{asociada con}\\ \text{la reacción}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Tasa de cambio de}\\ \text{la energía acumulada}\\ \text{en el reactor}\end{matrix}$$

Un estado de referencia común para las entalpías y la energía interna son los componentes puros en la fase (líquida, gaseosa, o sólida) en la que tiene lugar la reacción, la temperatura de 25°C y la presión del sistema. Utilizando este estado de referencia, se puede escribir

$$\text{Tasa de energía asociada con la reacción} = V_{r_k} \Delta H_r, \text{ energía/tiempo}$$

donde ΔH_r es la entalpía de la reacción evaluada a la temperatura de la reacción en energía/mol del componente clave. Nótese que, por convención, ΔH_r es negativa para reacciones exotérmicas y es positiva para reacciones endotérmicas.

3-7.2 Ejemplo de un reactor químico

Considérese el sistema del reactor químico que se muestra en la figura 3-7.1. El reactor es un recipiente en el que ocurre la "conocida" reacción A → B. Se supone que la reacción ocurre a volumen y temperatura constantes. Además, se supone que las propiedades físicas son

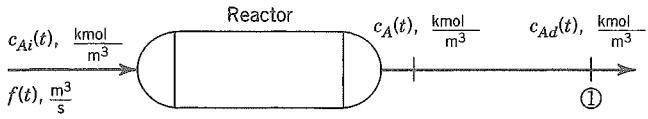


Figura 3-7.1 Reactor químico isotérmico y bien mezclado.

constantes y que el contenido del reactor está bien mezclado. La tasa de reacción está dada por la expresión

$$r_A(t) = kc_A^2(t)$$

donde:

$r_A(t)$ = tasa de reacción del componente A, kmol de A/m^3-s
k = constante de reacción, m^3/kmol-s
$c_A(t)$ = concentración del componente A en el reactor, kmol de A/m^3.

El objetivo es desarrollar el modelo matemático, las funciones de transferencia y trazar el diagrama de bloques que relacionen $c_A(t)$ y $c_{Ad}(t)$ con las entradas $f(t)$ y $c_{Ai}(t)$.

El procedimiento requiere desarrollar primero el modelo matemático. Recuérdese que en este desarrollo las variables de entrada, $f(t)$ y $c_{Ai}(t)$ en este caso, no se consideran incógnitas. El volumen de control es el reactor, específicamente el contenido del reactor. En este proceso, un balance molar de estado no estacionario para el componente A, como el presentado al principio de esta sección, proporciona la primera ecuación:

Tasa de moles del componente A que entra al volumen de control	−	Tasa de moles del componente A que sale del volumen de control	+	Tasa de cambio del componente A en el volumen de control	=	Tasa de cambio de los moles del componente A acumulados en el volumen de control

o, en forma de ecuación,

$$f(t)c_{Ai}(t) - f(t)c_A(t) + (-1)V_{r_A}(t) = V\frac{dc_A(t)}{dt} \qquad \textbf{(3-7.1)}$$

1 ec., 2 incóg. $[c_A(t), r_A(t)]$

La expresión de la tasa de reacción proporciona otra ecuación

$$r_A(t) = kc_A^2(t) \qquad \textbf{(3-7.2)}$$

2 ec., 2 incóg.

Las ecuaciones 3-7.1 y 3-7.2 constituyen el modelo matemático para este proceso. Escribir este módulo constituye el primer paso del procedimiento. El segundo paso requiere la linealización de los términos no lineales del modelo.

De la linealización de los dos primeros términos de las ecuaciones 3-7.1 y 3-7.2 alrededor de los valores de estado estacionario inicial $\bar{f}$, $\bar{c}_{Ai}$ y $\bar{c}_A$ se obtiene

$$f(t)c_{Ai}(t) \approx \bar{f}\bar{c}_{Ai} + \bar{c}_{Ai}(f(t) - \bar{f}) + \bar{f}(c_{Ai}(t) - \bar{c}_{Ai}) \tag{3-7.3}$$

$$f(t)c_A(t) \approx \bar{f}\bar{c}_A + \bar{c}_A(f(t) - \bar{f}) + \bar{f}(c_A(t) - \bar{c}_A) \tag{3-7.4}$$

$$r_A(t) \approx \bar{r}_A + 2k\bar{c}_A(c_A(t) - \bar{c}_A) \tag{3-7.5}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3-7.3, 3-7.4 y 3-7.5 en la ecuación 3-7.1 se obtiene

$$\begin{aligned} &\bar{f}\bar{c}_{Ai} + \bar{c}_{Ai}(f(t) - \bar{f}) + \bar{f}(c_{Ai}(t) - \bar{c}_{Ai}) - \bar{f}\bar{c}_A - \bar{c}_A(f(t) - \bar{f}) \\ &-\bar{f}(c_A(t) - \bar{c}_A) - V\bar{r}_A - 2Vk\bar{c}_A(c_A(t) - \bar{c}_A) = V\frac{dc_A(t)}{dt} \end{aligned} \tag{3-7.6}$$

La ecuación 3-7.6 describe el proceso alrededor de los valores de linealización. Ahora se puede proceder a obtener las funciones de transferencia. Escribiendo un balance molar de estado estacionario inicial y restándolo de la ecuación 3-7.6, se obtiene

$$\bar{c}_{Ai}F(t) + \bar{f}C_{Ai}(t) - \bar{c}_A F(t) - \bar{f}C_A(t) - 2k\bar{c}_A V C_A(t) = V\frac{dC_A(t)}{dt} \tag{3-7.7}$$

donde:

$$F(t) = f(t) - \bar{f}; \quad C_{Ai}(t) = c_{Ai}(t) - \bar{c}_{Ai}; \quad C_A(t) = c_A(t) - \bar{c}_A$$

Por la ecuación 3-7.7,

$$C_A(s) = \frac{K_1}{\tau s + 1}F(s) + \frac{K_2}{\tau s + 1}C_{Ai}(s) \tag{3-7.8}$$

donde:

$$K_1 = \frac{\bar{c}_{Ai} - \bar{c}_A}{\bar{f} + 2k\bar{c}_A V}, \text{ kmol-s/(m}^3)^2$$

$$K_2 = \frac{\bar{f}}{\bar{f} + 2k\bar{c}_A V}, \text{ adimensional}$$

$$\tau = \frac{V}{\bar{f} + 2k\bar{c}_A V}, \text{ segundos}$$

De la ecuación 3-7.8 se obtienen las funciones de transferencia deseadas. Éstas son

$$\frac{C_A(s)}{F(s)} = \frac{K_1}{\tau s + 1} \tag{3-7.9}$$

y

$$\frac{C_A(s)}{C_{Ai}(s)} = \frac{K_2}{\tau s + 1} \tag{3-7.10}$$

Para obtener las relaciones para $c_{Ad}(t)$, suponiendo un flujo pistón ideal y que no hay reacción en la tubería de salida, se puede establecer la igualdad

$$c_{Ad}(t) = c_A(t - t_o)$$

o, en términos de variables de desviación,

$$C_{Ad}(t) = C_A(t - t_o) \tag{3-7.11}$$

y

$$t_o = \frac{LA_p}{\bar{f}} \tag{3-7.12}$$

donde:

t_o = tiempo muerto entre la salida del reactor y el punto (1), segundos
L = distancia entre la salida del reactor y el punto (1), m
A_p = área transversal de la tubería, m^2

De la transformada de Laplace de la ecuación 3-7.11 se obtiene

$$C_{Ad}(s) = e^{-t_o s}\, C_A(s) \tag{3-7.13}$$

Así, por las ecuaciones 3-7.9, 3-7.10 y 3-7.13 las funciones de transferencia deseadas finales son

$$\frac{C_{Ad}(s)}{F(s)} = \frac{K_1 e^{-t_o s}}{\tau s + 1} \tag{3-7.14}$$

y

$$\frac{C_{Ad}(s)}{C_{Ai}(s)} = \frac{K_2 e^{-t_o s}}{\tau s + 1} \tag{3-7.15}$$

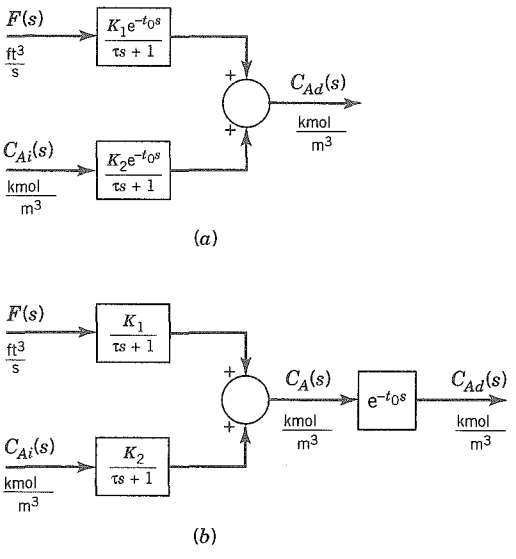


Figura 3-7.2 Diagrama de bloques para el reactor químico isotérmico y bien mezclado.

En la figura 3-7.2 se muestran dos maneras diferentes de trazar el diagrama de bloques para este reactor.

3-8 EFECTOS DE LAS NO LINEALIDADES EN LOS PROCESOS

Una de las características más importantes de los procesos es si su comportamiento es lineal o no lineal. Para entender mejor este concepto y apreciar su importancia, considérese el proceso térmico presentado en la sección 3-3. En este proceso particular, debido a que el flujo f se considera constante, las ganancias K_1 y K_2 también son constantes en todo el rango de operación del proceso. Es decir, su valor numérico, dado por las ecuaciones 3-3.22 y 3-3.23, nunca cambia, sin importar cuál sea la condición de operación del proceso. El valor numérico de la constante de tiempo τ, dado por la ecuación 3-3.21, también es constante para este sistema. El hecho de que los parámetros que describen las características de este proceso son constantes significa que el comportamiento del proceso también es constante. Es decir, el proceso siempre se comporta de la misma manera, con la misma sensibilidad y con la misma rapidez de respuesta en cualquier condición de operación. Procesos que presentan esta característica se denominan *procesos lineales*.

En la sección 3-1 se señaló que el controlador se debe sintonizar, o adaptar, al proceso para obtener un desempeño adecuado del sistema de control. Debido a que el comportamiento de un proceso lineal es el mismo en todo el rango de operación, si la sintonización del controlador en una condición de operación es óptima, en cualquier otra condición también será óptima. Se trata, desde luego, de una operación ideal, la que esperamos encontrar.

Sin embargo, considérese ahora el proceso de gas presentado en la sección 3-6. En ese proceso las ganancias K_1, K_2 y K_3 dadas por la ecuación 3-6.16 dependen de C_1, C_2 y C_3, y los

valores numéricos de estos términos dependen de los valores de $\bar{p}$, $\bar{p}_1$ y $\bar{m}_o$ alrededor de los cuales se llevó a cabo la linealizacion de la función no lineal $f_o(t)$. Por lo tanto, los valores numéricos de las ganancias K_1, K_2 y K_3 también dependen de dónde se haya hecho la linealización. El valor numérico de la constante de tiempo, dado también por la ecuación 3-6.16, también depende de C_2. Esto significa que los valores de los términos que describen las características del proceso, y en consecuencia el comportamiento del proceso mismo, dependen de la condición de operación. ¡El comportamiento del proceso cambia si las condiciones de operación cambian! Los procesos que presentan estas características se denominan *procesos no lineales*. La no linealidad es una característica de la mayoría de los procesos químicos.

A continuación se presentan dos casos diferentes para demostrar gráficamente el efecto de las no linealidades en los procesos. En el primer caso, se permitió que la presión en el tanque variara entre 25 psia y 70 psia, al tiempo que el flujo del proceso y otras condiciones de operación se mantuvieron en el estado estacionario. Se permitió que la señal a la válvula de salida variara para mantener constante el flujo del proceso. Éste es el caso cuando se quiere realizar el proceso a diferentes presiones aunque el flujo no haya cambiado. En la figura 3-8.1 se muestra cómo K_1, K_2, K_3 y τ varían cuando la presión en el tanque varía. La figura 3-8.1*a* muestra que K_1 varía por un factor de 4; la figura 3-8.1*b* muestra que K_2 varía por un factor de 10. Del mismo modo, la figura 3-8.1*d* muestra que τ varía por un factor de 5. K_3 no resulta tan afectada, como se muestra en la figura 3-8.1*c*.

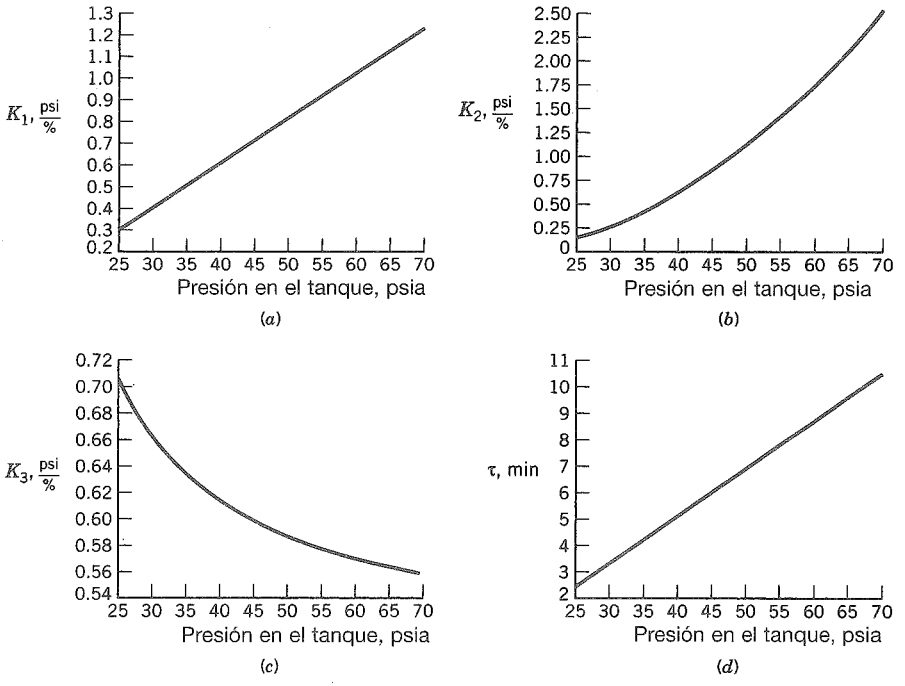


Figura 3-8.1 Ganancias y constante de tiempo como una función de la presión en el tanque.

Otro caso interesante ocurre cuando la señal al ventilador varía, con lo cual varía el flujo del proceso a través del tanque, al tiempo que la presión se mantiene constante. Éste podría ser el caso cuando un sistema de control de presión tiene que responder a perturbaciones, siendo aquí la perturbación la señal al ventilador. Se permitió que la señal a la válvula de salida variara para igualar el flujo del gas de salida con el flujo de entrada producido por el ventilador, y para mantener constante la presión en el tanque. En la figura 3-8.2 se muestra cómo K_1, K_2, K_3 y τ varían cuando la señal al ventilador varía. En todas estas figuras se muestran las características no lineales de este proceso simple.

El comportamiento no lineal de los procesos es muy adverso para su control. Cuando el comportamiento del proceso cambia con las condiciones de operación, el controlador se debe resintonizar, o readaptar, a fin de mantener el desempeño de control óptimo. A menudo, lo más que se puede hacer es sintonizar el controlador para que su comportamiento sea el mejor en el punto de operación de diseño y aceptable en el rango esperado de condiciones de operación; en el capítulo 6 se presentan varios métodos para sintonizar controladores. Se han desarrollado técnicas para permitir que el controlador se resintonice por sí mismo, automáticamente, cuando las características del proceso cambian. Estas técnicas se denominan de autosintonización, o sintonización adaptiva, y se remite al lector a la edición anterior de este libro para una breve introducción a las mismas.

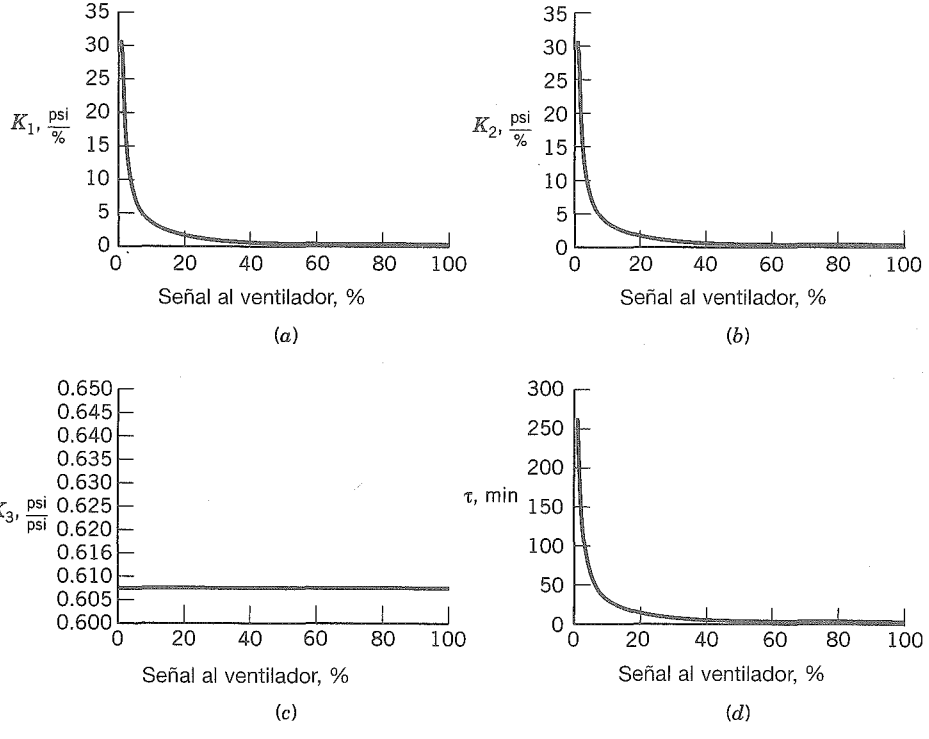


Figura 3-8.2 Ganancias y constante de tiempo como una función de la señal al ventilador.

Aunque no se ha presentado, el tiempo muerto también depende de las condiciones de operación. La ecuación 3-4.1 indica que si el flujo del proceso varía, el tiempo muerto también variará. Por lo tanto, todos los términos que describen el comportamiento del proceso son funciones de las condiciones de operación.

Las no linealidades en los procesos ciertamente no son características deseables, pero por desgracia son una realidad común.

3-9 COMENTARIOS ADICIONALES

En este punto es importante analizar desde un punto de vista más general lo que se ha examinado hasta ahora. Si se observa la forma de las funciones de transferencia que se han desarrollado en los diferentes ejemplos, ecuaciones 3-3.12, 3-3.25, 3-3.26, 3-6.17, 3-6.18, 3-6.19, 3-7.9 y 3-7.10, todas ellas son de la forma

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \tag{3-9.1}$$

donde:

$Y(s)$ = transformada de Laplace de la variable de salida
$X(s)$ = transformada de Laplace de la variable de entrada.

En la sección 2-4, la ecuación 3-9.1 se definió como la forma estándar de la función de transferencia de un sistema de primer orden. La característica distintiva de esta forma es que el segundo término del denominador es la unidad. Ésta es la forma de todos los sistemas de primer orden sin importar si son térmicos, de fluidos, reacciones químicas, mecánicos o eléctricos. Esto es importante porque indica que el comportamiento de cualquier sistema descrito por la ecuación 3-9.1, sin importar de qué tipo sea, es el mismo; todos responden de la misma manera a las funciones de forzamiento. El significado de la ganancia, K, y de la constante de tiempo, τ, es el mismo para todos ellos.

En ocasiones el tiempo muerto está presente, y en esos casos la función de transferencia viene a ser:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ke^{-t_o s}}{\tau s + 1} \tag{3-9.2}$$

La ecuación 3-9.2 es más general que la ecuación 3-9.1.

La constante de tiempo, τ, es uno de los términos más importantes en el estudio del control automático. En las secciones anteriores ya se han desarrollado varias expresiones, las ecuaciones 3-3.9, 3-3.21 y 3-6.16, para τ. Todas estas ecuaciones son análogas, es decir, todas son de la forma:

$$\tau = \frac{\text{capacitancia}}{\text{conductancia}} \tag{3-9.3}$$

La *capacitancia* es una medida de la habilidad del proceso para acumular la cantidad conservada (masa o energía). La *conductancia* es una medida de la habilidad del proceso para regularse a sí mismo.

Por ejemplo, para el sistema térmico de la sección 3-3, la constante de tiempo, dada por la ecuación 3-3.9, es

$$\tau = \frac{V\rho C_v}{f\rho C_p} = \frac{\text{capacitancia}}{\text{conductancia}}, \frac{\dfrac{\text{Joules}}{^\circ\text{C}}}{\dfrac{\text{Joules/seg}}{^\circ\text{C}}}$$

Suponiendo que $C_v = C_p$, que es una buena suposición para líquidos, la expresión para τ también puede escribirse como

$$\tau = \frac{V}{f}$$

Esta expresión muestra claramente los términos para la acumulación, V, y el flujo, f. En la tabla 3-9.1 se muestra la analogía de los procesos tratados en este capítulo. Un proceso que no se ha examinado aquí, pero que se da como ejercicio en el problema 3-1, es el de mezclado. Este proceso es similar al de una reacción química cuando no ocurre ninguna reacción. Lo anterior se expresa asignando el valor cero a la constante de reacción, k, en la expresión para la constante de tiempo de la sección 3-7. En este caso,

$$\tau = \frac{V}{\bar{f} + 2k\bar{C}_A V} = \frac{V}{\bar{f}}, \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3/\text{s}}$$

Otro comentario se refiere al método que se ha utilizado para obtener las funciones de transferencia y los diagramas de bloques deseados. Como el lector seguramente ya habrá notado, el procedimiento requiere, ante todo, del conocimiento adecuado de la ingeniería del proceso. Los pasos que se deben seguir para obtener las funciones de transferencia se describieron en la sección 3-6.

El lector habrá notado, asimismo, que en la mayoría de los casos las ecuaciones que describen el proceso son no lineales. Se hizo la linealización de las ecuaciones para poder obtener

Tabla 3-9.1 Analogía de la constante de tiempo para diferentes procesos

Proceso	Variable	Constante de tiempo	Capacitancia	Conductancia
Térmico	Temperatura	$\frac{V\rho C_v}{f\rho C_p}$ (Ec. 3-2.9)	$V\rho C_v$, $\frac{\text{J}}{^\circ\text{C}}$	$f\rho C_p$, $\frac{\text{J/s}}{^\circ\text{C}}$
Térmico	Temperatura	$\frac{V\rho C_v}{f\rho C_p + UA}$ (Ec. 3-2.21)	$V\rho C_v$, $\frac{\text{J}}{^\circ\text{C}}$	$f\rho C_p + UA$, $\frac{\text{J/s}}{^\circ\text{C}}$
Gas	Presión del gas, flujo	$\frac{V}{RT\bar{\rho}C_2}$ (Ec. 3-5.16)	$\frac{V}{RT}$, $\frac{\text{lbmol}}{\text{psia}}$	$\bar{\rho}C_2$, $\frac{\text{lbmol}}{\text{min-psia}}$
Reacción	Concentración	$\frac{V}{\bar{f} + 2k\bar{c}_A V}$ (Ec. 3-6.16)	V, m^3	$\bar{f} + 2k\bar{c}_A V$, m^3/s

las funciones de transferencia deseadas. Estas últimas funciones de transferencia describen el proceso en una región cerca de los valores de linealización. Fuera de esta región la linealización "se romperá" y dará resultados erróneos. El tamaño de la región donde las funciones de transferencia son válidas depende del grado de no linealidad del proceso. Para procesos con alto grado de no linealidad, la región válida estará muy cerca de los valores de linealización; la región "se abre" a medida que el grado de no linealidad del proceso disminuye. La única manera de obtener una solución precisa para el sistema de ecuaciones, el *modelo matemático*, en el rango de operación completo es por métodos numéricos, o solución de computadora. Sin embargo, esta técnica no permite un análisis general de la dinámica del proceso. En el capítulo 13 se examina con mayor detalle la simulación de procesos.

Para finalizar, un comentario en cuanto a la respuesta de los sistemas de primer orden a diferentes tipos de funciones de forzamiento; las respuestas a una función escalón, a una función rampa y a las funciones sinusoidales se examinan en el capítulo 2. La respuesta a una función escalón es de particular importancia en el estudio del control de procesos, y por lo tanto también se examinó en este capítulo. En la figura 3-3.2 se muestra claramente que la pendiente más pronunciada ocurre al principio de la respuesta. Esta característica es típica de los sistemas de primer orden.

Todas las respuestas presentadas en este capítulo alcanzan un nuevo valor de operación. Es decir, las respuestas a una entrada acotada también son acotadas; el sistema "se regula" a sí mismo en un nuevo valor. La mayoría de los procesos son de este tipo y en ocasiones se denominan procesos autorregulados. Sin embargo, hay procesos que no se regulan a sí mismos en un nuevo valor antes de alcanzar una condición de operación extrema. En este caso, se denominan procesos no autorregulados y en el capítulo 4 se presentan ejemplos de los mismos.

3-10 RESUMEN

El capítulo se inició explicando que desde el punto de vista del control, un "proceso" es todo excepto el controlador. Es decir, el proceso consiste en el medidor, el transmisor, la unidad de proceso, la válvula y el transductor, si están presentes. Se vio, asimismo, que en lo que al controlador se refiere, la variable controlada es la señal que recibe del transmisor. La variable manipulada es su propia señal de salida, es decir, la señal que el controlador envía al elemento final de control. También se examinó por qué es necesario estudiar las características del proceso.

El capítulo continuó con una introducción al modelaje de procesos dinámico y se discutió en particular por qué los balances de estado estacionario no producen modelos útiles para el control de procesos. Se estableció que los balances de estado no estacionario, llamados también balances dinámicos, son una extensión de los balances de estado estacionario cuando se les suma la tasa de cambio del término de acumulación. Se usaron varios procesos simples para ilustrar el desarrollo de los modelos matemáticos, las funciones de transferencia y los diagramas de bloques. Todos los procesos estudiados en el capítulo están descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. El punto de partida es por lo general una ecuación de balance. Para desarrollar el sistema de ecuaciones, deberá terminarse con el mismo número de ecuaciones independientes que de incógnitas. Es por ello que se han enfatizado las incógnitas enseguida de cada ecuación. Esto deberá ser de ayuda para llevar la cuenta de las ecuaciones necesarias para describir el proceso y desarrollar el modelo.

Se revisaron y explicaron con mayor detalle varios conceptos más. Las funciones de transferencia se definieron como el cociente de la transformada de Laplace de la variable de salida y la transformada de Laplace de la variable de entrada. Se explicó el significado de las funciones de transferencia: describen por completo el comportamiento de estado estacionario y el comportamiento dinámico del sistema. Las funciones de transferencia indican la magnitud del cambio en los procesos y la rapidez con que éste ocurre. Las variables usadas en las funciones de transferencia están en forma de desviaciones.

Las funciones de transferencia desarrolladas en este capítulo son de la forma general

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ke^{-t_o s}}{\tau s + 1} \tag{3-10.1}$$

las cuales se denominan funciones de transferencia de primer orden más tiempo muerto (FOPDT, por sus siglas en inglés), o retardos de primer orden. Esta función de transferencia tiene tres parámetros: la ganancia del proceso, K, la constante de tiempo del proceso, τ, y el tiempo muerto del proceso, t_o. La comprensión de estos parámetros es fundamental para el estudio del control de procesos. La ganancia del proceso, K, indica la magnitud del cambio de

la variable de salida por unidad de cambio en la variable de entrada; se define matemáticamente de la siguiente manera:

$$K = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\Delta \text{ variable de salida}}{\Delta \text{ variable de entrada}} \tag{3-10.2}$$

La constante de tiempo, τ, del proceso está relacionada con la rapidez de respuesta del proceso una vez que empieza a responder a una entrada. Se estableció que la constante de tiempo es, en el capítulo 2 y en la ecuación 3-3.13, el tiempo que requiere la variable de salida para alcanzar 63.2% del cambio total cuando la variable de entrada experimenta un cambio tipo escalón. Entre más lento sea un proceso para responder a una entrada, mayor será el valor de τ. El tiempo muerto del proceso, t_o, es el intervalo de tiempo entre el cambio en la variable de entrada y el tiempo en que la variable de salida empieza a responder. Por lo tanto, la constante de tiempo del proceso y el tiempo muerto del proceso son los términos que describen la dinámica del sistema; la ganancia del proceso describe las características de estado estacionario del sistema.

Es necesario recordar que estos tres parámetros, K, τ y t_o, son funciones de los parámetros físicos del proceso. Se vio que para un sistema lineal, estos parámetros son constantes en el rango de operación completo del proceso. Para un sistema no lineal, se vio que los valores de los parámetros son funciones de las condiciones de operación y, por consiguiente, no son constantes en el rango de operación. Esta característica no lineal de los procesos es una consideración de suma importancia para el control de los mismos. En este capítulo se indicó cómo obtener los parámetros antes mencionados a partir de ecuaciones de balance. En el capítulo 7 se examinará cómo evaluarlos a partir de los datos del proceso.

En el capítulo siguiente se presentará el desarrollo de las funciones de transferencia y los diagramas de bloques para procesos más complejos.

REFERENCIAS

1. Smith, C. A., y A. B. Corripio, *Control automático de procesos. Teoría y práctica,* primera edición, Editorial Limusa, México.

PROBLEMAS

3-1. Considérese el proceso de mezclado que se ilustra en la figura P3-1. Se puede suponer que la densidad de los caudales de entrada y de salida son muy similares y que los flujos f_1 y f_2 son constantes. Se desea saber cómo afecta cada concentración de entrada la concentración de salida. Desarrollar el modelo matemático, determinar las funciones de transferencia y trazar el diagrama de bloques para este proceso de mezclado. Indicar las unidades de todas las ganancias y las constantes de tiempo.

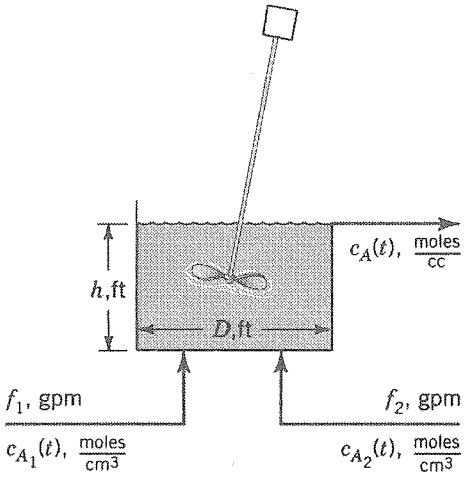


Figura P3-1 Diagrama para el problema 3-1.

Nota: la simulación de este proceso es el tema de los problemas 13-6 y 13-7.

3-2. Considérese el reactor isotérmico que se muestra en la figura P3-2. La tasa de reacción está dada por

$$r_A(t) = kc_A(t), \text{moles de A}/(ft^3 - \text{min})$$

donde k es una constante. Se puede suponer que la densidad y todas las otras propiedades físicas de los productos y los reactivos son similares. También se puede suponer que el régimen de flujo entre los puntos 2 y 3 es muy turbulento (flujo de pistón), con lo que se

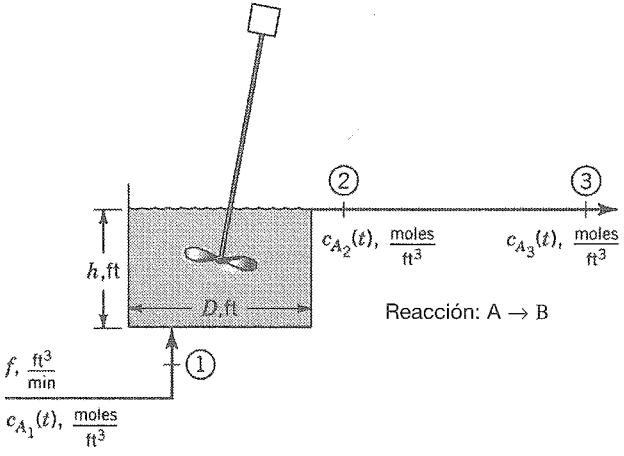


Figura P3-2 Diagrama para el problema 3-2.

minimiza la retromezcla. Desarrollar el modelo matemático y obtener las funciones de transferencia que relacionan:

a) La concentración de A en el punto 2 con la concentración de A en el punto 1.
b) La concentración de A en el punto 3 con la concentración de A en el punto 2.
c) La concentración de A en el punto 3 con la concentración de A en el punto 1.

Nota: la simulación de este proceso es el tema del problema 13-8.

3-3. El diámetro de un tanque de almacenamiento mide 20 ft y tiene una altura de 10 ft. El flujo volumétrico de salida del tanque está dado por

$$f_{sal}(t) = 2h(t)$$

donde $h(t)$ es la altura del líquido en el tanque. En un tiempo particular el tanque está en estado estacionario con un flujo de entrada de 10 ft^3/min.

a) ¿Cuál es la altura del líquido en el tanque en estado estacionario?
b) Si el flujo de entrada aumenta en forma de rampa a una velocidad de 0.1 ft^3/min, ¿en cuántos minutos el tanque se derramará?
(Copyright 1992, American Institute of Chemical Engineers; reproducido con permiso del Center for Chemical Process Safety of AIChE.)

3-4. Considérese el medidor de temperatura de la figura P3-3. El bulbo y el termopozo que lo rodea están a la misma temperatura uniforme, $T_b(t)$, y el ambiente alrededor está a una temperatura uniforme, $T_S(t)$. El intercambio de calor entre el ambiente y el bulbo está dado por

$$q(t) = hA[T_S(t) - T_b(t)]$$

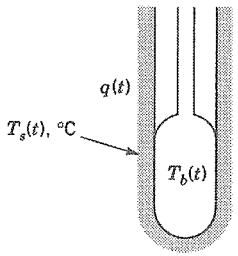


Figura P3-3 Diagrama para el problema 3-4.

donde:

$q(t)$ = tasa de transferencia de calor, J/s
h = coeficiente pelicular de transferencia de calor, J/s-m^2-°C
A = área de contacto entre el bulbo y el ambiente, m^2.

Sea M, kg, la masa del bulbo y del termopozo, y sea C_v, J/kg-°C, su capacidad calorífica. Obtener la función de transferencia que describe la respuesta de la temperatura del bulbo a un cambio en la temperatura ambiente. Enumerar todas las suposiciones hechas y trazar el diagrama de bloques para el bulbo. Expresar la constante de tiempo y la ganancia en términos de los parámetros del bulbo. *Nota:* la función de transferencia que se deriva aquí por lo general representa la respuesta dinámica de la mayoría de los sensores de temperatura sin importar su tipo.

3-5. Un caudal de 2 litros/min (constante) de agua caliente a una temperatura de $T_h(t)$ se mezcla con un caudal de 3 litros/min de agua fría a una temperatura constante de 20°C. Los dos caudales fluyen en una bañera, pero debido a un descuido el agua se derrama manteniendo la bañera llena de agua. El volumen de la bañera es de 100 litros. Suponiendo que el agua en la bañera está perfectamente mezclada, desarrollar la ecuación diferencial que relaciona la temperatura de la bañera, $T(t)$, con la temperatura del agua caliente, $T_h(t)$. Obtener la función de transferencia $\Gamma(s)/\Gamma_h(t)$ y calcular su ganancia y la constante de tiempo.

3-6. Un caudal de aguas residuales industriales (con una densidad de 1000 kg/m^3) fluye a 500 000 kg/h en un estanque séptico con un volumen de 5000 m^3, y después fluye del estanque a un río. Inicialmente el estanque se encuentra en estado estacionario con una concentración de contaminantes despreciable [$x(0) = 0$]. Debido a una falla en el proceso de tratamiento de las aguas residuales, la concentración de contaminantes en el caudal de entrada aumenta repentinamente a 500 ppm de masa (kilogramo de contaminantes por un millón de kilogramos de agua) y se mantiene constante en ese valor (cambio escalón).

a) Suponiendo que el contenido del estanque está perfectamente mezclado, obtener la función de transferencia que relaciona la concentración de contaminantes en el caudal de salida con la concentración de contaminantes en el caudal de entrada, y determinar durante cuánto tiempo puede pasar inadvertida la falla antes de que la concentración de salida de los contaminantes exceda el valor regulado máximo de 350 ppm.
b) Repetir el inciso a) suponiendo un flujo de pistón del agua (sin mezcla) a través del estanque. Nótese que esto significa que el estanque se comporta como una tubería y que la respuesta de la concentración es un retardo de transporte puro.
c) Tanto en el inciso a) como en el b) se supone que el volumen completo del estanque está activo. ¿Cómo cambiarían las respuestas del lector si algunas partes del estanque estuvieran estancadas y no fueran afectadas por el flujo de entrada y el de salida del agua?

3-7. En la casa del Dr. Corripio, la tubería de cobre para el agua caliente que va del calentador a la ducha tiene 1/2 pulgada de diámetro (área transversal = 0.00101 ft^2) y unos 30 ft de

largo. Una mañana fría en Baton Rouge, el Dr. Corripio abrió completamente la llave del agua caliente y obtuvo un caudal de 2 galones por minuto. ¿Cuánto tiempo tuvo que esperar para que el agua caliente llegara a la ducha (probablemente quemándolo)? Escribir la función de transferencia $\Gamma_s(s)/\Gamma_h(s)$ de la tubería del agua caliente donde $\Gamma_s(t)$ es la desviación de la temperatura en la ducha, y $\Gamma_h(t)$ es la desviación de la temperatura en el calentador del agua caliente cuando la llave está abierta. Trazar el diagrama de bloques para la tubería del agua caliente. ¿Cuál es la función de transferencia cuando la llave del agua caliente está cerrada? ¿Podría predecir esta función con base en la respuesta anterior?

3-8. Se bombea agua salada de un estanque a un proceso a 100 ft^3/min a través de una tubería que tiene dos diámetros diferentes, uno antes de la bomba y el otro después de ella. Los diámetros interiores y las longitudes de los tubos son los siguientes:

	Antes de la bomba	Después de la bomba
Diámetro interior, pulg	6.00	5.25
Longitud, ft	1000	2000

Se puede suponer que el agua salada no se mezcla en la tubería. Cuando la concentración del agua salada en el tanque cambia, ¿en cuánto tiempo cambia la concentración del caudal que entra al proceso? Escribir la función de transferencia que relaciona la concentración que sale de la tubería con la concentración en el estanque.

3-9. Se desea modelar la respuesta de la temperatura, $T(t)$, °C, en una pecera a los cambios en la entrada de calor del calentador eléctrico, $q(t)$, W; en la temperatura ambiente, $T_s(t)$, °C, y en la presión ambiental parcial del agua en el aire, $p_s(t)$, Pa, utilizando las siguientes suposiciones:

a) El agua en el tanque está perfectamente mezclada.
b) La transferencia de masa y calor al ambiente sucede nada más en la superficie libre del agua (la transferencia de calor a través de las paredes de vidrio es despreciable).
c) El coeficiente global de transferencia de calor al ambiente, U, W/m^2-°C, y el coeficiente global de transferencia de masa del vapor de agua, K_y, kg/s-m^2-Pa, son constantes.
d) Las propiedades físicas del agua, calor específico, C_p, J/kg-°C, y el calor latente, λ, J/kg, son constantes.
e) La tasa de vaporización del agua en la pecera es proporcional a la diferencia de las presiones parciales

$$w(t) = K_y A[p^o(T) - p_s(t)], \text{ kg/s}$$

donde:

$p^o(T)$, Pa es la presión de vapor del agua expresada por la ecuación de Antoine.
A, m^2, es el área de la superficie libre del agua.

f) La tasa de vaporización es tan pequeña que la masa total del agua en el tanque, M, kg, se puede suponer constante.

Obtener las funciones de transferencia que representan la repuesta de la temperatura en el tanque cuando la entrada de calor del calentador eléctrico, la temperatura ambiente y la presión ambiental parcial del agua cambian. Trazar el diagrama de bloques para este sistema.

3-10. Se vierte agua con un flujo $f_i(t)$, cm^3/s, en una copa de 6.5 cm de diámetro y 10 cm de altura. La copa tiene un agujero en el fondo de 0.2 cm de diámetro. La velocidad del agua que pasa por el agujero está dada, por la ecuación de Bernoulli, por

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

donde g es la aceleración local de la gravedad, 980 cm/s^2, y $h(t)$, cm, es el nivel del agua en la copa. Obtener la función de transferencia entre el nivel del agua en la copa, $H(s)$, y el flujo de entrada, $F_i(s)$, cuando la copa está llena a la mitad (h = 5 cm).

3-11. Considérese la vaporización instantánea de la figura P3-4. $z(t)$, $x(t)$ y $y(t)$ son las fracciones molares del componente más volátil en los caudales de entrada, del líquido y del vapor, respectivamente. Se suponen constantes la masa total del líquido y el vapor acumulado en la cámara, la temperatura y la presión. Si se supone un estado de equilibrio entre las fases de vapor y líquido que salen de la cámara, se puede establecer la siguiente relación de equilibrio entre $y(t)$ y $x(t)$

$$y(t) = \frac{\alpha\, x(t)}{1 + (\alpha - 1)x(t)}$$

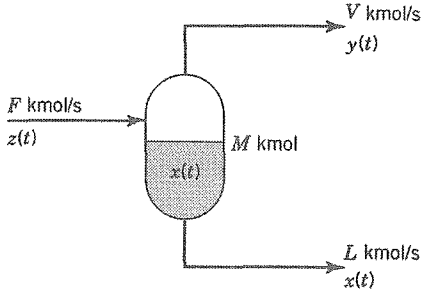


Figura P3-4 Diagrama para el problema 3-11.

El estado estacionario y otra información del proceso son:

$$M = 500 \text{ kmol}; \quad F = 10 \text{ kmol/s};$$
$$L = 5 \text{ kmol/s}; \quad \alpha = 2.5; \quad x(0) = 0.4$$

Obtener la función de transferencia que relaciona la composición del líquido de salida, $x(t)$, con la composición de entrada, $z(t)$. Determinar asimismo el valor numérico de todos los términos de la función de transferencia.

Nota: la simulación de este proceso es el tema del problema 13-9.

3-12. En la figura P3-5 se muestra un plato de una columna de destilación. La fórmula para el vertedero de Francis permite calcular el flujo de salida del plato (adaptada de Perry's Chemical Engineering Handbook, 6a ed., 1984, pp. 5-19).

$$f_o(t) = 0.415wh^{1.5}(t)\sqrt{2g}$$

donde:

$h(t)$ = nivel del líquido en el plato por encima del vertedero, ft
w = ancho del vertedero por donde fluye el líquido, ft
g = aceleración de la gravedad local (32.2 ft/s^2).

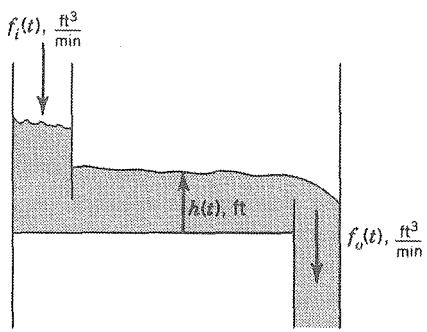


Figura P3-5 Diagrama para el problema 3-12.

El caudal de entrada en estado estacionario y los parámetros del proceso son: área transversal del plato = 11.2 ft^2, w = 3.0 ft, $f_i(0)$ = 30 ft^3/min.

Obtener la función de transferencia que relaciona la altura del líquido por encima del vertedero y el flujo del plato con el flujo de entrada al plato. Especificar todas las

suposiciones y calcular el valor numérico de la constante de tiempo y de la ganancia del plato. Dibujar el diagrama de bloques completo que relaciona las variables.

Nota: la simulación de este proceso es el tema del problema 13-10.

3-13. Considérese un reactor químico adiabático, exotérmico, perfectamente mezclado (¿y qué más?) donde ocurre la reacción $A + B \rightarrow C$ (¿y qué más?). Sea

ρ = densidad de los reactivos y del producto (constante), kmol/m^3
f = flujo de los caudales de entrada y salida (constante), m^3/s
$T_i(t)$ = temperatura del caudal de entrada, K
$T(t)$ = temperatura en el reactor, K
ΔH_r = calor de reacción (constante y negativo), J/kmol
c_p, c_v = capacidades caloríficas (constantes), J/kmol-K
V = volumen de líquido en el tanque (constante), m^3.

La cinética de la reacción está dada por la siguiente expresión de orden cero

$$r_A = -k_o e^{-E/RT(t)}$$

donde:

k_o = factor de frecuencia, kmol/m^3-s
E = energía de activación, J/kmol
R = constante de los gases ideales, J/kmol-K.

Determinar la función de transferencia $\Gamma(s)/\Gamma_i(s)$ del reactor. Expresar la constante de tiempo y la ganancia en términos de los parámetros físicos. ¿Bajo qué condiciones la constante de tiempo puede ser negativa? ¿Cuáles podrían ser las consecuencias de una constante de tiempo negativa?

3-14. Considérese el proceso mostrado en la figura P3-6. El tanque es esférico con un radio de 4 ft. El flujo de masa nominal de entrada y de salida del tanque es de 30 000 lbm/h, la densidad del líquido es de 70 lbm/ft^3, y el nivel de estado estacionario es de 5 ft. El volumen de una esfera es $4\pi r^3/3$. La relación entre el volumen y la altura está dada por

$$V(t) = V_T\left[\frac{h^2(t)[3r - h(t)]}{4r^3}\right]$$

y el flujo a través de las válvulas está dado por

$$\dot{m}(t) = 500 C_v vp(t)\sqrt{G_f \Delta P(t)}$$

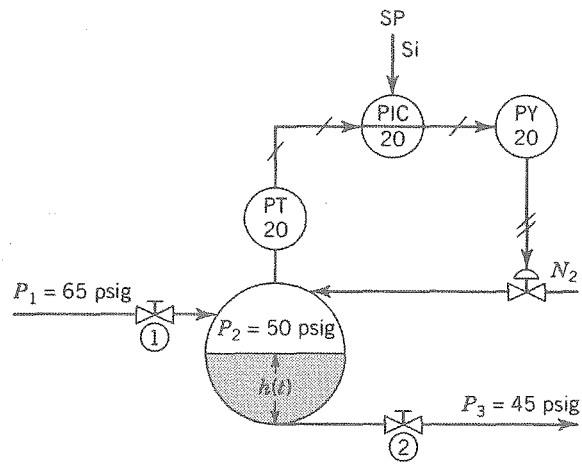


Figura P3-6 Diagrama para el problema 3-14.

donde:

r = radio de la esfera, ft
$V(t)$ = volumen del líquido en el tanque, ft^3
V_T = volumen total del tanque, ft^3
$h(t)$ = altura del líquido en el tanque, ft
$\dot{m}(t)$ = flujo másico, lbm/h
C_v = coeficiente de la válvula, $gpm/(psi^{1/2})$
C_{v1} = 20.2 $gpm/(psi^{1/2})$ y
C_{v2} = 28.0 $gpm/(psi^{1/2})$
$\Delta P(t)$ = caída de presión a través de la válvula, psi
G_f = gravedad específica del fluido
$vp(t)$ = posición de la válvula, una fracción de la abertura de la válvula.

La presión por encima del nivel del líquido se mantiene constante en un valor de 50 psig. Obtener las funciones de transferencia que relacionan el nivel del líquido en el tanque con los cambios en las posiciones de las válvulas 1 y 2. Asimismo, graficar las ganancias y las constantes de tiempo contra los diferentes niveles de operación cuando se mantienen constantes las posiciones de las válvulas.

3-15. Considérese el tanque de calentamiento que se muestra en la figura P3-7. Un fluido del proceso se calienta en el tanque mediante un calentador eléctrico. La tasa de transferencia de calor, $q(t)$, al fluido del proceso se relaciona con la señal, $m(t)$, por

$$q(t) = am(t)$$

Se puede suponer que el tanque de calentamiento está bien aislado, que el fluido está bien mezclado en el tanque, y que la capacidad calorífica y la densidad del fluido son cons-

tantes. Desarrollar el modelo matemático que describe cómo la temperatura de entrada, $T_i(t)$, el flujo del proceso, $f(t)$, y la señal, $m(t)$, afectan la temperatura de salida, $T(t)$. Determinar después las funciones de transferencia y trazar el diagrama de bloques para este proceso.

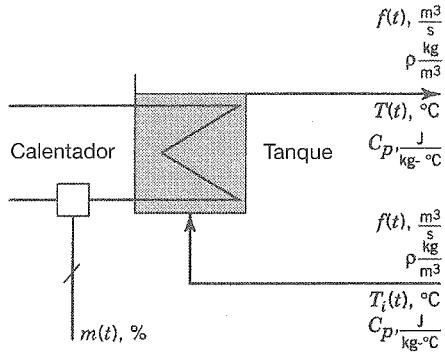


Figura P3-7 Diagrama para el problema 3-15.

3-16. Considérese el proceso de mezclado que se muestra en la figura P3-8. La finalidad de este proceso es mezclar un caudal, bajo en contenido del componente A, con otro caudal de A puro. La densidad del caudal 1, ρ_1, se puede considerar constante, ya que la cantidad de A en este caudal es pequeña. La densidad del caudal de salida es, desde luego, una función de la concentración y está dada por

$$\rho_3(t) = a_3 + b_3 c_{A3}(t)$$

El flujo a través de la válvula 1 está dado por

$$f_1(t) = C_{v1} v p_1(t) \sqrt{\frac{\Delta P_1}{G_1}}$$

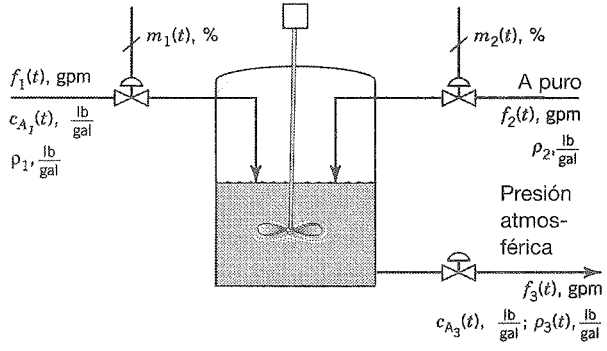


Figura P3-8 Diagrama para el problema 3-16.

El flujo a través de la válvula 2 está dado por

$$f_2(t) = C_{v2} vp_2(t) \sqrt{\frac{\Delta P_2}{G_2}}$$

Finalmente, el flujo a través de la válvula 3 está dado por

$$f_3(t) = C_{v3} \sqrt{\frac{\Delta P_3(t)}{G_3(t)}}$$

La relación entre la posición de la válvula y la señal está dada por

$$vp_1(t) = a_1 + b_1(m_1(t) - d_1)$$

y

$$vp_2(t) = a_2 + b_2\,(m_2(t) - d_2)$$

donde:

$a_1, b_1, d_1, a_2, b_2, d_2, a_3, b_3$ = constantes conocidas
C_{v1}, C_{v2}, C_{v3} = coeficientes de las válvulas 1, 2 y 3, respectivamente, $m^3/(s\text{-}psi^{1/2})$
$vp_1(t), vp_2(t)$ = posición de las válvulas 1 y 2, respectivamente, una fracción adimensional
$\Delta P_1, \Delta P_2$ = caída de presión a través de las válvulas 1 y 2, respectivamente (constantes), psi
$\Delta P_3(t)$ = caída de presión a través de la válvula 3, psi
G_1, G_2 = gravedad específica de los caudales 1 y 2, respectivamente (constantes), adimensional
$G_3(t)$ = gravedad específica del caudal 3, adimensional.

Desarrollar el modelo matemático que describe cómo las funciones de forzamiento $m_1(t)$, $m_2(t)$ y $c_{Ai}(t)$ afectan a $h(t)$ y $c_{A3}(t)$; determinar las funciones de transferencia, y trazar el diagrama de bloques. Asegurarse de indicar las unidades de todas las ganancias y las constantes de tiempo.

3-17. Considérese el tanque que se muestra en la figura P3-9. Una solución al 10% (±0.2%) del peso de NaOH se utiliza en un proceso de limpieza con sosa cáustica. Se usa un tanque de 8000 galones como tanque de compensación para moderar las variaciones en el flujo y la concentración.

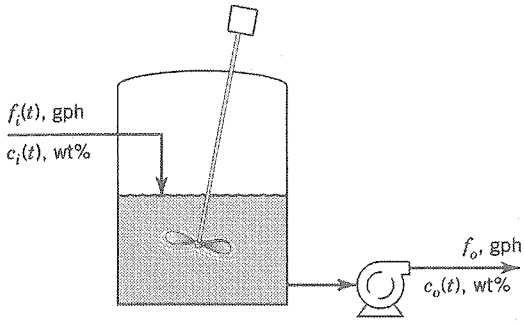


Figura P3-9 Diagrama para el problema 3-17.

Las condiciones de estado estacionario son las siguientes:

$$\overline{V} = 4000 \text{ gal}; \qquad \overline{f}_i = \overline{f}_o = 2500 \text{ gph};$$
$$\overline{c}_i = \overline{c}_o = 10\% \text{ del peso}$$

El contenido del tanque está bien mezclado, y la densidad de todos los caudales es de 8.8 lbm/gal.

a) Una alarma suena cuando la concentración de salida disminuye a 9.8% del peso (o aumenta a 10.2% del peso). Supóngase que todos los flujos son constantes.
   i) Obtener la función de transferencia que relaciona la concentración de salida con la concentración de entrada. Obtener los valores numéricos de todas las ganancias y constantes de tiempo.
   ii) Debido a una perturbación, la concentración de entrada, $c_i(t)$, disminuye a 8% de NaOH instantáneamente. Determinar en cuánto tiempo sonará la alarma.

b) Considérese ahora la posibilidad de que el flujo de entrada, $f_i(t)$, varíe mientras que el flujo de salida se mantiene constante en 2500 gph. Por lo tanto, el volumen en el tanque también podría variar.
   iii) Desarrollar la ecuación diferencial que relaciona el volumen en el tanque con los flujos de entrada y de salida.
   iv) Desarrollar la ecuación diferencial que relaciona la masa de NaOH en el tanque con el flujo y la concentración de entrada.
   v) Obtener la función de transferencia que relaciona el volumen en el tanque con el flujo de entrada.
   vi) Obtener la función de transferencia que relaciona la concentración de salida con el flujo y la concentración de entrada. Obtener los valores numéricos de todas las ganancias y las constantes de tiempo.
   vii) Supóngase ahora que el flujo de entrada al tanque disminuye a 1000 gph. Determinar en cuánto tiempo se vacía el tanque.

3-18. En el tanque de mezclado de la figura P3-10 se tiene una mezcla perfecta. Las variables de entrada son las concentraciones del soluto y los flujos de los caudales de entrada, $c_1(t)$, $c_2(t)$ [kg/m^3], $f_1(t)$ y $f_2(t)$ [m^3/min]. El volumen de líquido en el tanque, V [m^3], se puede suponer constante, y la variación de la densidad de los caudales con la composición se puede despreciar.

a) Obtener la función de transferencia que relacione la concentración de salida, $C(s)$, kg/m^3, y el flujo de salida, $F(s)$, m^3/min, con las cuatro variables de entrada, y escribir las expresiones para la constante de tiempo y las ganancias del tanque de mezclado en términos de los parámetros del sistema.
b) Trazar el diagrama de bloques del tanque de mezclado, mostrando todas las funciones de transferencia.
c) Calcular los valores numéricos de las constantes de tiempo y las ganancias del proceso cuando inicialmente se mezcla un caudal que contiene 80 kg/m^3 de soluto con un segundo caudal que contiene 30 kg/m^3 del soluto para producir 4.0 m^3/min de una solución que contiene 50 kg/m^3 del soluto. El volumen del tanque es 40 m^3.

Nota: la simulación de este proceso es el tema del problema 13-11.

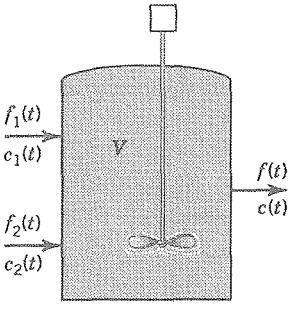


Figura P3-10 Diagrama para el problema 3-18.

3-19. Trazar el diagrama de bloques que representa cada una de las siguientes funciones de transferencia. En cada caso, no haga ninguna manipulación algebraica para simplificar las funciones de transferencia, pero utilice las reglas del álgebra de diagramas de bloques para simplificar la figura si es posible.

a) $Y(s) = \dfrac{K_1}{\tau_1 s + 1} X(s) + \dfrac{K_2}{\tau_2 s + 1} X(s)$

b) $Y(s) = \dfrac{1}{\tau s + 1}[K_1 F_1(s) - K_2 F_2(s)]$

c) $Y_1(s) = G_1(s) X(s) + G_3(s) Y_2(s)$

$Y_2(s) = G_2(s) Y_1(s)$

3-20. Determinar la función de transferencia $C(s)/R(s)$ para el sistema que se muestra en la figura P3-11.

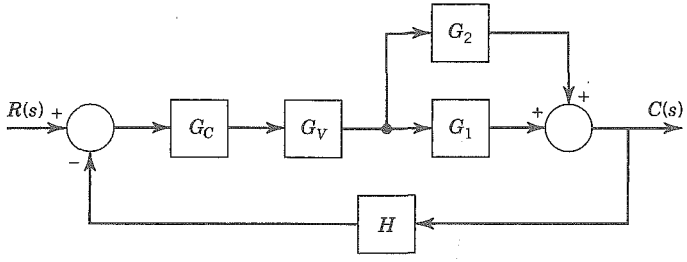


Figura P3-11 Diagrama para el problema 3-20.

3-21. Determinar la función de transferencia $C(s)/R(s)$ para el sistema que se muestra en la figura P3-12.

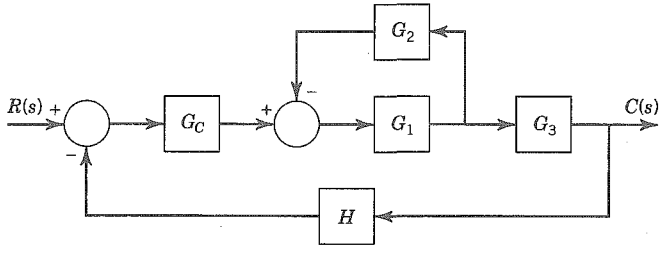


Figura P3-12 Diagrama para el problema 3-21.

3-22. Determinar la función de transferencia $C(s)/L(s)$ para el sistema que se muestra en la figura P3-13.

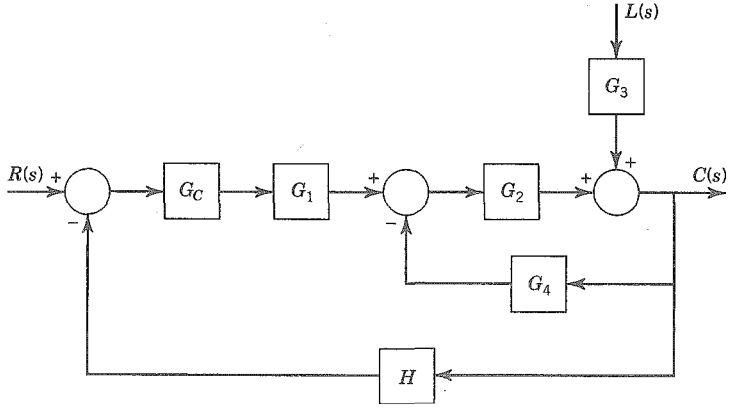


Figura P3-13 Diagrama para el problema 3-22.

3-23. Obtener la respuesta del proceso descrito por una función de transferencia de primer orden más tiempo muerto para la función de forzamiento que se muestra en la figura P3-14.

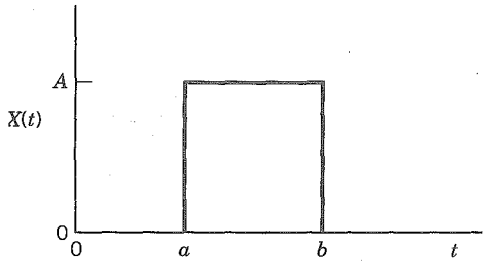


Figura P3-14 Diagrama para el problema 3-23.

3-24. Supóngase que la siguiente ecuación describe cierto proceso:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3e^{-0.5s}}{5s + 0.2}$$

a) Obtener la ganancia de estado estacionario, la constante de tiempo y el tiempo muerto de este proceso.
b) La condición inicial de la variable y es $y(0) = 2$. ¿Cuál es el valor final de $y(t)$ para una función de forzamiento como la que se muestra en la figura P3-15?

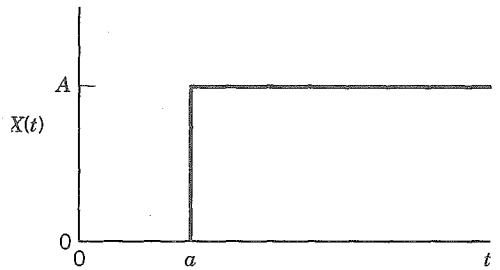


Figura P3-15 Diagrama para el problema 3-24.

3-25. Obtener la respuesta de un proceso descrito por una función de transferencia de primer orden para una función de forzamiento tipo impulso.

3-26. Se usa un detector de gas para determinar la concentración de un gas flamable en una corriente gaseosa. La concentración normal del gas es de 1% por volumen, muy por abajo del límite de alarma de 4% y del límite inferior de inflamabilidad de 5%. El gas es flamable cuando su concentración está por encima del límite inferior de inflamabilidad. Un detector de gas particular presenta un comportamiento de primer orden con una constante de tiempo de 5 s. En un tiempo particular, la corriente gaseosa fluye a 1 m^3/s a través de un ducto con un área transversal de 1 m^2. Si la concentración del gas aumentara de pronto de 1% a 7% por volumen, ¿cuántos metros cúbicos del gas flamable pasarán a

través del detector antes de que suene la alarma? ¿Es posible que una cantidad de gas flamable pase en forma de pistón a través del detector sin que suene la alarma? (Copyright 1992, American Institute of Chemical Engineers; reproducido con permiso del Center for Chemical Process Safety of AIChE.)

3-27. Considérese el reactor químico que se muestra en la figura P3-16. En este reactor tiene lugar una reacción endotérmica del tipo A + 2B → C. La tasa de formación de A está dada por

$$r_A(t) = k_o e^{-E/RT(t)} c_A(t) c_B(t)$$

donde:

$r_A(t)$ = tasa de formación de A, kmol de A/(m^3-s)
k_o = factor de frecuencia (constante), m^3/(kmol-s)
E = energía de activación (constante), cal/gmol
R = constante de la ley de gases ideales, 1.987 cal/(gmol-K)
$T(t)$ = temperatura en el reactor, K
$c_A(t)$ = concentración de A en el reactor, kmol/m^3
$c_B(t)$ = concentración de B en el reactor, kmol/m^3
ΔH_r = calor de reacción, J/kmol.

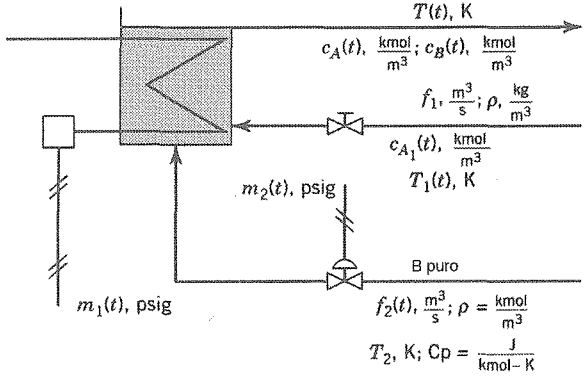


Figura P3-16 Diagrama para el problema 3-27.

La entrada de calor al reactor se relaciona con la señal al calentador mediante la siguiente expresión

$$q(t) = rm_1(t)$$

donde:

$q(t)$ = entrada de calor al reactor, J/s
r = constante

El flujo de B puro a través de la válvula está dado por

$$f_2(t) = C_{v2} vp_2(t) \sqrt{\frac{\Delta P_2}{G_2}}$$

donde:

C_{v2} = coeficiente de la válvula (constante), $m^3/(s\text{-}psi^{1/2})$
ΔP_2 = caída de presión a través de la válvula (constante), psi
G_2 = gravedad específica de B (constante), adimensional
$vp_2(t)$ = posición de la válvula, una fracción.

Se puede suponer que el reactor está bien aislado y que las propiedades físicas de los reactivos y los productos son similares. Se supone que el flujo f_1 es constante. La posición de la válvula $vp_2(t)$ se relaciona linealmente con la señal $m_2(t)$. Desarrollar el modelo matemático que describe las interacciones de las variables de entrada $m_1(t)$, $m_2(t)$, $c_{Ai}(t)$, y la temperatura de salida $T(t)$. Determinar las funciones de transferencia y trazar el diagrama de bloques. Indicar las unidades de todas las ganancias y las constantes de tiempo.

Capítulo 4

Sistemas dinámicos de orden superior

En el capítulo anterior se investigó las respuestas de estado estacionario y dinámica de procesos simples, los cuales se describieron con ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. El objetivo en este capítulo es investigar las características de estado estacionario y dinámicas de los procesos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior. Por tanto, los procesos que se presentan en este capítulo son más complejos; sin embargo, también representan mejor los procesos industriales.

Es importante recordar por qué nos estamos ocupando de este procedimiento de modelaje y análisis. No se deje llevar por las matemáticas; no es ésta la razón. Antes de diseñar e implementar un sistema de control, es imperativo entender las características y el comportamiento del proceso. Infundir este conocimiento es el objetivo de ambos capítulos. Los métodos matemáticos permiten cuantificar las características de los procesos.

4-1 SISTEMAS NO INTERACTIVOS

Los sistemas y procesos de orden superior se clasifican como interactivos o no interactivos. En esta sección se presentan dos ejemplos de sistemas no interactivos, y en la sección 4-2 se presentan tres ejemplos de sistemas interactivos. El significado de estos términos se explica en cada sección.

4-1.1 Proceso de nivel no interactivo

Considérese el conjunto de tanques que se muestra en la figura 4-1.1. En este proceso todos los tanques están abiertos a la atmósfera y la temperatura del líquido es constante. La abertura de las válvulas permanece constante y el flujo de líquido a través de las válvulas está dado por

$$f(t) = C_v \sqrt{\frac{\Delta P(t)}{G_f}}$$

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

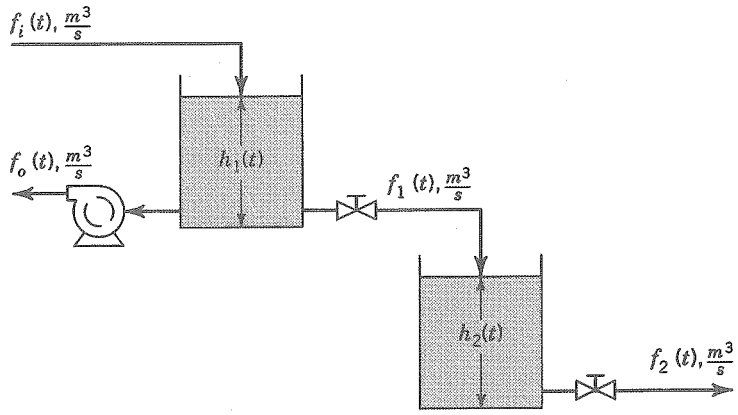


Figura 4-1.1 Tanques en serie: sistema no interactivo.

donde:

$f(t)$ = flujo a través de la válvula, m^3/s
C_v = coeficiente de la válvula, $m^3/s\text{-}kPa^{1/2}$
$\Delta P(t)$ = caída de presión a través de la válvula, kPa
G_f = gravedad específica del líquido, adimensional.

Debido a que los tanques están abiertos a la atmósfera y la descarga de las válvulas se hace a presión atmosférica, la caída de presión a través de cada válvula está dada por

$$\Delta P(t) = P_u(t) - P_d = P_a + \rho g h(t) - P_a = \rho g h(t)$$

donde:

$P_u(t)$ = presión corriente arriba de la válvula, kPa
P_d = presión corriente abajo de la válvula, kPa
P_a = presión atmosférica, kPa
ρ = densidad del líquido, kg/m^3
g = aceleración debida a la gravedad, $9.8\ m/s^2$
$h(t)$ = nivel del líquido en el tanque, m.

Por tanto, la ecuación de la válvula para este proceso es

$$f(t) = C_v \sqrt{\frac{\Delta P(t)}{G_f}} = C_v \sqrt{\frac{\rho g h(t)}{G_f}} = C_v' \sqrt{h(t)}$$

donde $C_v' = C_v \sqrt{\dfrac{\rho g}{G_f}}$

Se desea conocer la manera en que el nivel en el segundo tanque, $h_2(t)$, está afectado por el flujo de entrada al primer tanque, $f_i(t)$, y por el flujo de la bomba, $f_o(t)$. El objetivo es desarrollar el modelo matemático, determinar las funciones de transferencia que relacionan $h_2(t)$ con $f_i(t)$ y $f_o(t)$, y trazar el diagrama de bloques.

Escribiendo un balance de masa de estado no estacionario para el primer tanque (volumen de control) se obtiene

$$\begin{array}{c}\text{Tasa de la masa}\\ \text{que entra al tanque}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Tasa de la masa}\\ \text{que sale del tanque}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Tasa de cambio de la masa}\\ \text{acumulada en el tanque}\end{array}$$

o, en forma de ecuación,

$$\rho f_i(t) - \rho f_1(t) - \rho f_o(t) = \frac{dm_1(t)}{dt}$$

donde $m_1(t)$ = masa de líquido acumulada en el primer tanque, kg. Esta masa está dada por

$$m_1(t) = \rho A_1 h_1(t)$$

donde:

A_1 = área transversal del primer tanque totalmente uniforme, m^2
$h_1(t)$ = nivel del líquido en el primer tanque, m.

Después, sustituyendo la expresión para $m_1(t)$ en el balance de masa se obtiene

$$\rho f_i(t) - \rho f_1(t) - \rho f_o(t) = \rho A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} \qquad \textbf{(4-1.1)}$$

1 ec., 2 incóg. $[f_1(t), h_1(t)]$

Como se hizo en el capítulo 3, las variables de entrada $f_i(t)$ y $f_o(t)$ no se consideran incógnitas; depende de nosotros especificar cómo van a cambiar.

De la expresión de la válvula se obtiene otra ecuación

$$f_1(t) = C'_{v_1}\sqrt{h_1(t)} \qquad \textbf{(4-1.2)}$$

2 ec., 2 incóg.

Las ecuaciones 4-1.1 y 4-1.2 describen el primer tanque. Se procede ahora con el segundo tanque. El balance de masa de estado no estacionario alrededor del segundo tanque da como resultado

$$\rho f_1(t) - \rho f_2(t) = \rho A_2(t)\frac{dh_2(t)}{dt} \qquad \textbf{(4-1.3)}$$

3 ec., 4 incóg. $[f_2(t), h_2(t)]$

De nueva cuenta, de la expresión de la válvula se obtiene otra ecuación

$$f_2(t) = C'_{v_2}\sqrt{h_2(t)} \tag{4-1.4}$$

4 ec., 4 incóg.

El sistema de ecuaciones 4-1.1 a 4-1.4 describe el proceso; este sistema es el modelo matemático del proceso.

El siguiente paso es obtener las funciones de transferencia. Debido a que las ecuaciones 4-1.2 y 4-1.4 son no lineales, primero es necesario linealizarlas. Se obtiene

$$f_1(t) \approx \bar{f}_1 + C_1[h_1(t) - \bar{h}_1] \tag{4-1.5}$$

y

$$f_2(t) \approx \bar{f}_2 + C_2[h_2(t) - \bar{h}_2] \tag{4-1.6}$$

donde:

$$C_1 = \left.\frac{\partial f_1(t)}{\partial h_1(t)}\right|_{SS} = \frac{1}{2}C'_{v_1}(\bar{h}_1)^{-1/2}, \frac{\text{m}^3/\text{s}}{\text{m}}, \text{y}$$

$$C_2 = \left.\frac{\partial f_2(t)}{\partial h_2(t)}\right|_{SS} = \frac{1}{2}C'_{v_2}(\bar{h}_2)^{-1/2}, \frac{\text{m}^3/\text{s}}{\text{m}}$$

Las ecuaciones 4-1.1, 4-1.3, 4-1.5 y 4-1.6 forman un sistema de ecuaciones lineales que describe el proceso alrededor de los valores de linealización $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$. Sustituyendo la ecuación 4-1.5 en la ecuación 4-1.1, sustituyendo la ecuación 4-1.6 en la ecuación 4-1.3, escribiendo los balances de masa de estado estacionario, definiendo las variables de desviación y reordenando términos

$$\tau_1 \frac{dH_1(t)}{dt} + H_1(t) = K_1F_i(t) - K_1F_o(t) \tag{4-1.7}$$

y

$$\tau_2 \frac{dH_2(t)}{dt} + H_2(t) = K_2H_1(t) \tag{4-1.8}$$

donde:

$$H_1(t) = h_1(t) - \bar{h}_1;\ H_2(t) = h_2(t) - \bar{h}_2;\ F_i(t) = f_i(t) - \bar{f}_i;$$
$$F_o(t) = f_o(t) - \bar{f}_0;\ F_1(t) = f_1(t) - \bar{f}_1$$

y

$$\tau_1 = \frac{A_1}{C_1}, \text{segundos}; \tau_2 = \frac{A_2}{C_2}, \text{segundos}; K_1 = \frac{1}{C_1}, \frac{\text{m}}{\text{m}^3/\text{s}}; K_2 = \frac{C_1}{C_2}, \text{adimensional}$$

La ecuación 4-1.7 relaciona el nivel en el primer tanque con los flujos de entrada y de la bomba. La ecuación 4-1.8 relaciona el nivel en el segundo tanque con el nivel en el primer tanque.

Tomando la transformada de Laplace de las ecuaciones 4-1.7 y 4-1.8 y reordenando términos se obtiene

$$H_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} F_i(s) - \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} F_o(s) \tag{4-1.9}$$

$$H_2(s) = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} H_1(s) \tag{4-1.10}$$

Para determinar las funciones de transferencia que se desean, se sustituye la ecuación 4-1.9 en la ecuación 4-1.10 para obtener

$$H_2(s) = \frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} [F_i(s) - F_o(s)] \tag{4-1.11}$$

de donde se obtienen las funciones de transferencia individuales deseadas

$$\frac{H_2(s)}{F_i(s)} = \frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \tag{4-1.12}$$

y

$$\frac{H_2(s)}{F_o(s)} = \frac{-K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \tag{4-1.13}$$

Cuando el denominador de estas dos funciones de transferencia se expande en forma de polinomio, la potencia del operador s es dos. Por tanto, estas funciones de transferencia se conocen como *funciones de transferencia de segundo orden* o *retardos de segundo orden*. Su desarrollo indica que están "formadas" por dos funciones de transferencia, o ecuaciones diferenciales, de primer orden en serie.

Como se muestra en la figura 4-1.2, el diagrama de bloques de este sistema se puede representar en diferentes formas. El diagrama de bloques de la figura 4-1.2*a* se desarrolla "encadenando" las ecuaciones 4-1.9 y 4-1.10. El diagrama indica que los flujos de entrada y de la bomba afectan inicialmente el nivel del primer tanque. Un cambio en este nivel afecta el nivel del segundo tanque. En la figura 4-1.2*b* se muestra un diagrama más compacto. Aunque el diagrama de bloques de la figura 4-1.2*a* proporciona una mejor descripción de la física del proceso (cómo ocurren realmente las cosas), los dos diagramas se utilizan sin ningún tipo de preferencia.

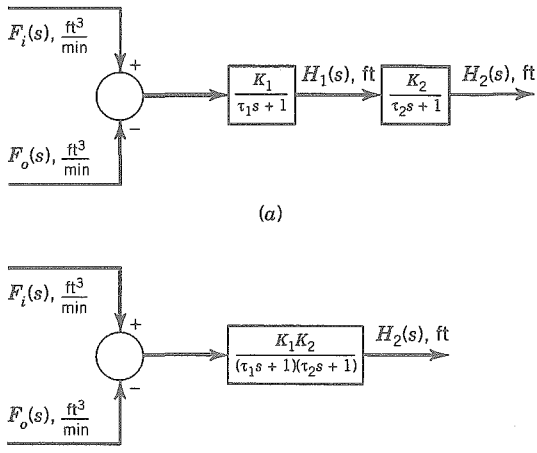


Figura 4-1.2 Diagramas de bloques para dos tanques no interactivos.

Ahora se extiende el proceso ilustrado en la figura 4-1.1 con un tanque más, como se muestra en la figura 4-1.3. El objetivo en este nuevo proceso es desarrollar el modelo matemático, determinar las funciones de transferencia que relacionan el nivel del tercer tanque con el flujo de entrada al primer tanque y el flujo de la bomba, y trazar el diagrama de bloques.

Puesto que ya se ha hecho el modelaje de los dos primeros tanques, ecuaciones 4-1.1 a 4-1.4, ahora se hará el modelo del tercer tanque. Al escribir el balance de masa de estado no estacionario alrededor del tercer tanque, se obtiene

$$\rho f_2(t) - \rho f_3(t) = \rho A_3 \frac{dh_3(t)}{dt} \tag{4-1.14}$$

5 ec., 6 incóg. $[f_3(t), h_3(t)]$

La expresión de la válvula proporciona la siguiente ecuación que se necesita:

$$f_3(t) = C'_{v3}\sqrt{h_3(t)} \tag{4-1.15}$$

6 ec., 6 incóg.

Con las ecuaciones 4-1.1 a 4-1.4, 4-1.14 y 4-1.15 se tiene el modelo para el nuevo proceso de la figura 4-1.3.

Procediendo como antes, de la ecuación 4-1.14 y de la forma linealizada de la ecuación 4-1.15 se obtiene la ecuación

$$\tau_3 \frac{dH_3(t)}{dt} + H_3(t) = K_3 H_2(t) \tag{4-1.16}$$

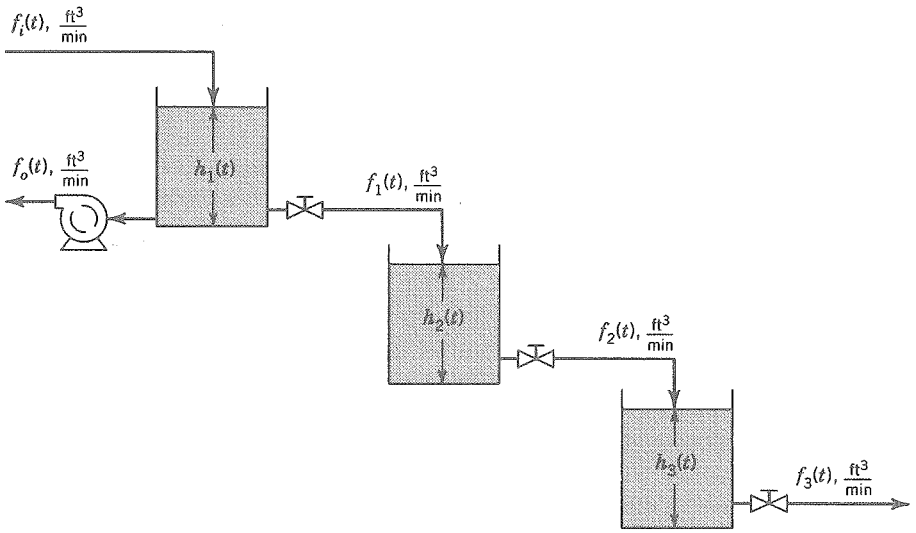


Figura 4-1.3 Tanques en serie: sistema no interactivo.

donde:

$$H_3(t) = h_3(t) - \bar{h}_3; C_3 = \left.\frac{\partial f_3(t)}{\partial h_3(t)}\right|_{ss} = \frac{1}{2} C'_{v3} (\bar{h}_3)^{-1/2}, \frac{m^3/s}{m}$$

$$\tau_3 = \frac{A_3}{C_3}, \text{ segundos; } K_3 = \frac{C_2}{C_3}, \text{ adimensional}$$

Obteniendo la transformada de Laplace de la ecuación 4-1.16 y reordenando términos, se obtiene

$$H_3(s) = \frac{K_3}{\tau_3 s + 1} H_2(s) \tag{4-1.17}$$

Por último, sustituyendo la ecuación 4-1.11 en la ecuación anterior, se obtiene

$$H_2(s) = \frac{K_1 K_2 K_3}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} [F_i(s) - F_o(s)] \tag{4-1.18}$$

a partir de la cual se determinan las siguientes funciones de transferencia:

$$\frac{H_3(s)}{F_i(s)} = \frac{K_1 K_2 K_3}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \tag{4-1.19}$$

y

$$\frac{H_2(s)}{F_o(s)} = \frac{-K_1K_2K_3}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)} \tag{4-1.20}$$

Cuando el denominador de estas dos funciones de transferencia se expande en forma de polinomio, la potencia del operador s es tres. Por tanto, estas funciones de transferencia se conocen como *funciones de transferencia de tercer orden* o *retardos de tercer orden*. En la figura 4-1.4 se muestra un diagrama de bloques para este proceso.

Los procesos ilustrados en las figuras 4-1.1 y 4-1.3 se conocen como *sistemas no interactivos* porque no hay interacción completa entre las variables. Es decir, el nivel del primer tanque afecta el nivel del segundo, pero el nivel del segundo tanque no afecta el nivel del primero. El nivel del segundo tanque no tiene un efecto de "retroalimentación" para afectar el nivel del primer tanque. La relación de causa y efecto es en un solo sentido. Lo mismo se cumple para los niveles del segundo y del tercer tanques.

Es importante recordar lo que se dijo acerca de las funciones de transferencia en los capítulos 2 y 3. Las funciones de transferencia describen completamente las características de los procesos lineales y las características de los procesos no lineales alrededor de los valores de linealización. Por ejemplo, la ecuación 4-1.20 indica que si el flujo de la bomba aumenta en 10 m^3/s, entonces el nivel del tercer tanque cambiará por $-10K_1K_2K_3$ m; es decir, bajará $10K_1K_2K_3$ m. La dinámica del cambio dependerá de los valores de τ_1, τ_2 y τ_3. En la sección 4-3 se analiza con mayor detalle esta dinámica. Las funciones de transferencia cuantifican las características, o comportamiento, del proceso.

Nótese que las funciones de transferencia presentadas en esta sección se obtuvieron multiplicando funciones de transferencia de primer orden en serie. Por ejemplo,

$$\frac{H_2(s)}{F_i(s)} = \frac{H_1(s)}{F_i(s)} \cdot \frac{H_2(s)}{H_1(s)}$$

y

$$\frac{H_3(s)}{F_o(s)} = \frac{H_1(s)}{F_o(s)} \cdot \frac{H_2(s)}{H_1(s)} \cdot \frac{H_3(s)}{H_2(s)}$$

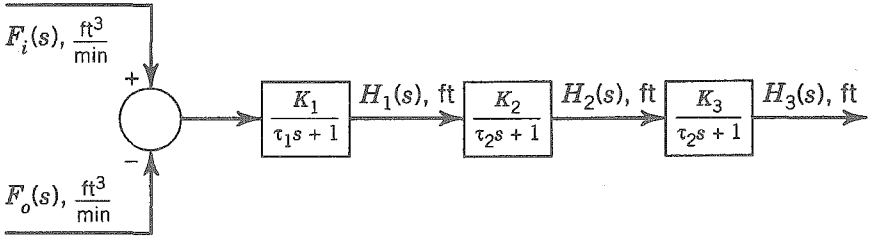


Figura 4-1.4 Diagrama de bloques para tres tanques no interactivos.

En general éste sólo es el caso para sistemas no interactivos. Se puede generalizar escribiendo

$$G(s) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s) \tag{4-1.21}$$

donde:

n = número de sistemas no interactivos en serie
$G(s)$ = función de transferencia que relaciona la salida del último sistema, el sistema n, con la entrada del primer sistema
$G_i(s)$ = función de transferencia individual de cada sistema.

Recuérdese: la ecuación 4-1.21 sólo es válida para sistemas no interactivos.

4-1.2 Tanques térmicos en serie

Considérese el conjunto de tanques que se muestra en la figura 4-1.5. El primer tanque ofrece cierta mezcla y tiempo de residencia para el caudal A. En el segundo tanque se mezclan los caudales A y B. Supóngase que el flujo volumétrico de cada caudal, f_A y f_B, es constante; que la densidad y la capacidad calorífica, ρ y C_p, de cada caudal son iguales entre sí y constantes; que debido a que los fluidos son líquidos, $C_p = C_v$; que los dos tanques están uno enseguida del otro, y finalmente, que las pérdidas de calor en el ambiente y el trabajo de los agitadores son despreciables. Los volúmenes de los tanques 1 y 2 son V_1 y V_2, respectivamente.

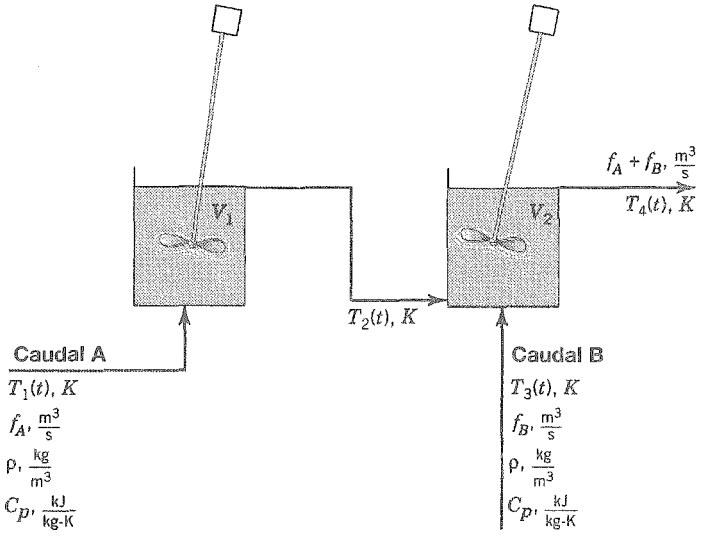


Figura 4-1.5 Tanques térmicos en serie: sistema no interactivo.

Se desea conocer la forma en que la temperatura de salida del líquido del segundo tanque, $T_4(t)$, es afectada por la temperatura de entrada del caudal A, $T_1(t)$, y por la del caudal B, $T_3(t)$. Para ello, se desarrolla el modelo matemático, se determinan las funciones de transferencia que relacionan $T_4(t)$ con $T_1(t)$ y $T_3(t)$, y se traza el diagrama de bloques del proceso.

Como los flujos y las densidades son constantes, la masa acumulada en cada tanque también es constante. Por lo tanto, un balance de masa total alrededor de ambos tanques indica que el caudal de salida del segundo tanque es igual a la suma de los dos caudales de entrada, o $f_A + f_B$.

Se empieza escribiendo un balance de energía de estado no estacionario del contenido del primer tanque:

$$f_A \rho h_1(t) - f_A \rho h_2(t) = V_1 \rho \frac{du_2(t)}{dt}$$

donde:

$h(t)$ = entalpía específica, kJ/kg
$u(t)$ = energía interna específica, kJ/kg.

O, en términos de la temperatura, tomando como estado de referencia para $h(t)$ y $u(t)$ los componentes en la fase líquida a 0 K,

$$f_A \rho C_p T_1(t) - f_A \rho C_p T_2(t) = V_1 \rho C_p \frac{dT_2(t)}{dt} \qquad \textbf{(4-1.22)}$$

1 ec., 1 incóg. $[T_2(t)]$

Otro balance de energía de estado no estacionario del contenido del segundo tanque resulta en

$$f_A \rho C_p T_2(t) + f_B \rho C_p T_3(t) - (f_A + f_B) \rho C_p T_4(t) = V_2 \rho C_p \frac{dT_4(t)}{dt} \qquad \textbf{(4-1.23)}$$

2 ec., 2 incóg. $[T_4(t)]$

Las ecuaciones 4-1.22 y 4-1.23 son el modelo matemático que relaciona la variable de salida, $T_4(t)$, con las entradas de interés, $T_1(t)$ y $T_3(t)$.

Para desarrollar las funciones de transferencia y los diagramas de bloques, se empieza observando que este modelo está formado por un sistema de ecuaciones lineales y que, por consiguiente, no es necesaria la linealización. Se procede entonces a escribir los balances de energía de estado estacionario, a definir las variables de desviación, a obtener la transformada de Laplace y a reordenar términos para obtener, a partir de la ecuación 4-1.22,

$$\Gamma_2(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1} \Gamma_1(s) \qquad \textbf{(4-1.24)}$$

y a partir de la ecuación 4-1.23

$$\Gamma_4(s) = \frac{K_1}{\tau_2 s + 1}\Gamma_2(s) + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}\Gamma_3(s) \tag{4-1.25}$$

donde:

$$K_1 = \frac{f_A}{f_A + f_B}, \text{ adimensional} \qquad K_2 = \frac{f_B}{f_A + f_B}, \text{ adimensional}$$

$$\tau_1 = \frac{V_1}{f_A}, \text{ segundos} \qquad \tau_2 = \frac{V_2}{f_A + f_B}, \text{ segundos}$$

Sustituyendo la ecuación 4-1.24 en la ecuación 4-1.25 se obtiene

$$\Gamma_4(s) = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}\Gamma_1(s) + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}\Gamma_3(s) \tag{4-1.26}$$

de donde se obtienen las dos funciones de transferencia requeridas:

$$\frac{\Gamma_4(s)}{\Gamma_1(s)} = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \tag{4-1.27}$$

y

$$\frac{\Gamma_4(s)}{\Gamma_3(s)} = \frac{K_2}{(\tau_2 s + 1)} \tag{4-1.28}$$

La ecuación 4-1.27 es la función de transferencia que relaciona la temperatura de salida con la temperatura de entrada del caudal A; es una función de transferencia de segundo orden. La ecuación 4-1.28 es la función de transferencia que relaciona la temperatura de salida con la temperatura de entrada del caudal B; es una función de transferencia de primer orden. El diagrama de bloques se muestra en la figura 4-1.6.

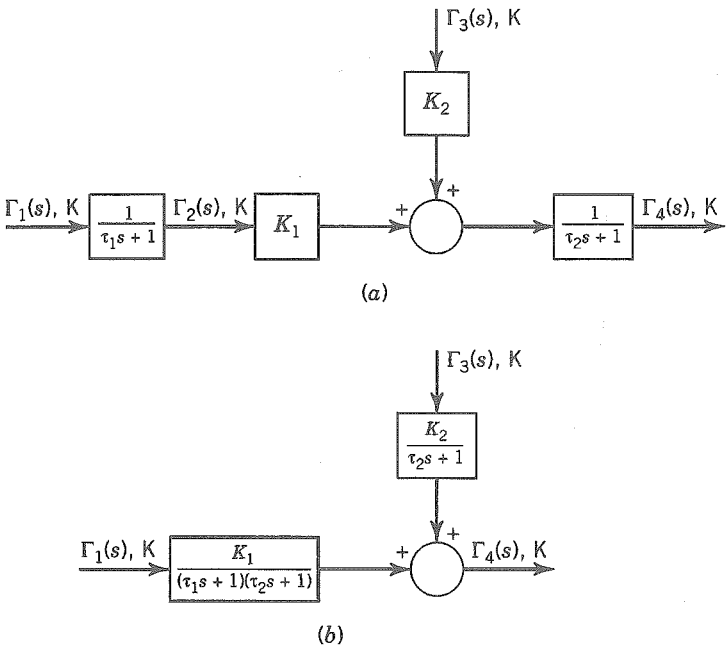


Figura 4-1.6 Diagramas de bloques para tanques térmicos en serie.

Con base en lo que se aprendió en los capítulos 2 y 3, se sabe que la respuesta de $\Gamma_4(t)$ a los cambios en $\Gamma_1(t)$, expresada por la ecuación 4-1.27, es diferente a la respuesta de $\Gamma_4(t)$ a los cambios en $\Gamma_3(t)$, expresada por la ecuación 4-1.28. El lector debe tratar de entender también esta diferencia "mirando" el sistema físico. Cuando $\Gamma_1(t)$ cambia, tiene que afectar a $\Gamma_2(t)$ antes de que $\Gamma_4(t)$ empiece a registrar el efecto; en la figura 4-1.6*a* se ilustra lo anterior. Sin embargo, si $\Gamma_3(t)$ cambia, empezará a afectar a $\Gamma_4(t)$ enseguida. $\Gamma_4(t)$ responderá con mayor lentitud a los cambios en $\Gamma_1(t)$ que a los cambios en $\Gamma_3(t)$. La lentitud particular de la respuesta está dada por la constante de tiempo τ_1, la cual, con base en su definición, está relacionada con el volumen y el flujo del tanque.

El proceso se ha simplificado por las suposiciones que se han hecho. Sin embargo, el lector puede pensar en cómo el desarrollo –y de hecho la forma final– de las funciones de transferencia resultaría afectado si se suprimen algunas de las suposiciones. Por ejemplo, ¿qué sucedería si hubiera una tubería larga entre los dos tanques? ¿Y qué sucedería si se permiten variaciones en el flujo de los caudales A y B?

4-2 SISTEMAS INTERACTIVOS

En la industria es más común encontrar sistemas interactivos que no interactivos; en esta sección se presentan tres ejemplos. También se presentan las diferencias en la respuesta dinámica entre los dos tipos de sistemas.

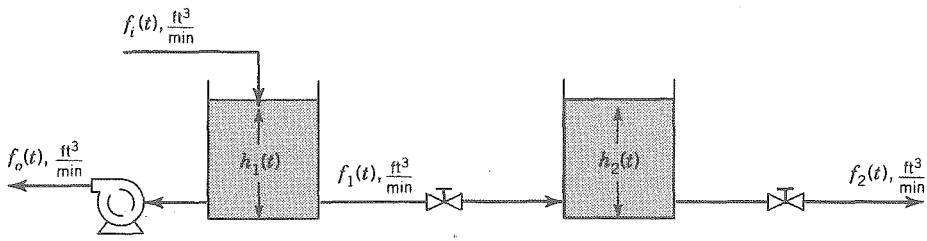


Figura 4-2.1 Tanques en serie: sistema interactivo.

4-2.1 Proceso de nivel interactivo

Si los tanques de la figura 4-1.1 se redistribuyen, el resultado es el nuevo proceso ilustrado en la figura 4-2.1. En este caso, la caída de presión, $\Delta P(t)$, a través de la válvula entre los dos tanques está dada por

$$\Delta P(t) = P_u(t) - P_d(t) = [P_a + \rho g h_1(t)] - [P_a + \rho g h_2(t)] = \rho g[h_1(t) - h_2(t)]$$

Sustituyendo esta expresión para la caída de presión en la ecuación de la válvula resulta en

$$f_1(t) = C_{v1}\sqrt{\frac{\Delta P(t)}{G_f}} = C_{v1}\sqrt{\frac{\rho g[h_1(t) - h_2(t)]}{G_f}}$$

$$f_1(t) = C'_{v1}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}$$

Se hace referencia a este nuevo proceso como un sistema interactivo. La ecuación de la válvula indica que el flujo entre los dos tanques depende de los niveles de *ambos* tanques, cada uno de los cuales afecta al otro. Es decir, el nivel del primer tanque afecta el nivel del segundo tanque y, al mismo tiempo, el nivel del segundo tanque afecta el del primero. Todos los elementos del proceso se afectan unos a otros. La relación de causa y efecto es en dos sentidos.

El objetivo sigue siendo determinar la forma en que el nivel del segundo tanque es afectado por el flujo que entra al primer tanque y por el flujo de la bomba. Para ello, se escribirá el modelo matemático, se determinarán las funciones de transferencia y se trazará el diagrama de bloques de este nuevo proceso.

Se empieza escribiendo el balance de masa de estado no estacionario alrededor del primer tanque, el cual está dado por la ecuación 4-1.1:

$$\rho f_i(t) - \rho f_1(t) - \rho f_o(t) = \rho A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} \qquad \textbf{(4-1.1)}$$

1 ec., 2 incóg. $[f_1(t), h_1(t)]$

La ecuación de la válvula proporciona la siguiente ecuación:

$$f_1(t) = C'_{v_1}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \tag{4-2.1}$$

2 ec., 3 incóg. $[h_2(t)]$

Aún se necesita otra ecuación independiente. Un balance de masa de estado no estacionario para el segundo tanque proporciona la ecuación que se necesita, ésta es la ecuación 4-1.3:

$$\rho f_1(t) = \rho f_2(t) = \rho A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} \tag{4-1.3}$$

3 ec., 4 incóg. $[f_2(t)]$

La expresión para el flujo $f_2(t)$ está dada por la ecuación 4-1.4:

$$f_2(t) = C'_{v_2}\sqrt{h_2(t)} \tag{4-1.4}$$

4 ec., 4 incóg.

Las ecuaciones 4-1.1, 4-2.1, 4-1.3 y 4-1.4 constituyen el modelo matemático.

Se continúa con el procedimiento usual para obtener las funciones de transferencia y el diagrama de bloques. Debido a que la ecuación 4-2.1 es no lineal, se linealiza de la siguiente manera

$$f_1(t) \approx \bar{f}_1 + C_4[h_1(t) - \bar{h}_1] - C_4[h_2(t) - \bar{h}_2] \tag{4-2.2}$$

donde

$$C_4 = \left.\frac{\partial f_1(t)}{\partial h_1(t)}\right|_{SS} = -\left.\frac{\partial f_1(t)}{\partial h_2(t)}\right|_{SS} = \frac{1}{2}C'_{v_1}(\bar{h}_1 - \bar{h}_2)^{-1/2}, \frac{\text{m}^3/\text{s}}{\text{m}}$$

La linealización de la ecuación 4-1.4 se hace como en la ecuación 4-1.6:

$$f_2(t) \approx \bar{f}_2 + C_2[h_2(t) - \bar{h}_2] \tag{4-1.6}$$

Las ecuaciones 4-1.1, 4-1.3, 4-2.2 y 4-1.6 proporcionan el sistema de ecuaciones lineales que describen el proceso alrededor de los valores de linealización $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$.

Sustituyendo la ecuación 4-2.2 en la ecuación 4-1.1, escribiendo el balance de masa de estado estacionario alrededor del primer tanque, definiendo las variables de desviación, obteniendo la transformada de Laplace y reordenando términos se obtiene

$$H_1(s) = \frac{K_4}{\tau_4 s + 1}[F_i(s) - F_o(s)] + \frac{1}{\tau_4 s + 1}H_2(s) \tag{4-2.3}$$

donde

$$K_4 = \frac{1}{C_4}, \quad \frac{\text{m}}{\text{m}^3/\text{s}}; \quad \tau_4 = \frac{A_1}{C_4}, \text{segundos}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el segundo tanque, se obtiene

$$H_2(s) = \frac{K_5}{\tau_5 s + 1} H_1(s) \tag{4-2.4}$$

donde

$$K_5 = \frac{C_4}{C_4 + C_2}, \text{adimensional} \qquad \tau_5 = \frac{A_2}{C_4 + C_2}, \text{segundos}$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación 4-2.3 en la ecuación 4-2.4

$$H_2(s) = \frac{K_4 K_5}{(\tau_4 s + 1)(\tau_5 s + 1)}[F_i(s) - F_o(s)] + \frac{K_5}{(\tau_4 s + 1)(\tau_5 s + 1)} H_2(s)$$

y reordenando términos

$$H_2(s) = \frac{\dfrac{K_4 K_5}{1 - K_5}}{\left(\dfrac{\tau_4 \tau_5}{1 - K_5}\right)s^2 + \left(\dfrac{\tau_4 + \tau_5}{1 - K_5}\right)s + 1}[F_i(s) - F_o(s)] \tag{4-2.5}$$

de donde se obtienen las funciones de transferencia deseadas

$$\frac{H_2(s)}{F_i(s)} = \frac{\dfrac{K_4 K_5}{1 - K_5}}{\left(\dfrac{\tau_4 \tau_5}{1 - K_5}\right)s^2 + \left(\dfrac{\tau_4 + \tau_5}{1 - K_5}\right)s + 1} \tag{4-2.6}$$

y

$$\frac{H_2(s)}{F_o(s)} = \frac{-\dfrac{K_4 K_5}{1 - K_5}}{\left(\dfrac{\tau_4 \tau_5}{1 - K_5}\right)s^2 + \left(\dfrac{\tau_4 + \tau_5}{1 - K_5}\right)s + 1} \tag{4-2.7}$$

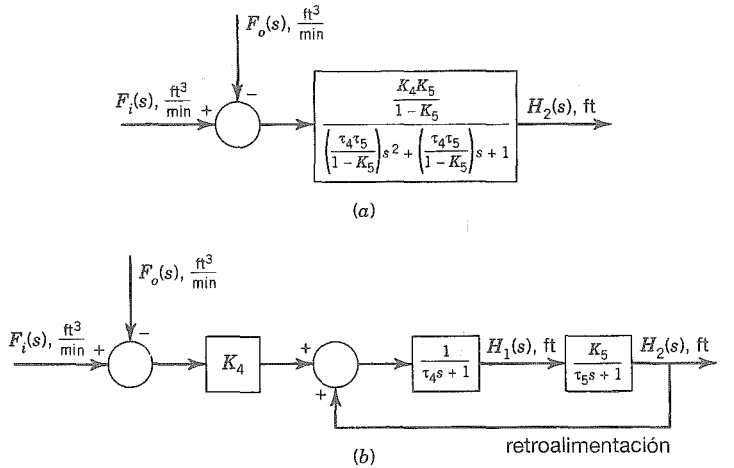


Figura 4-2.2 Diagramas de bloques para un sistema interactivo de dos tanques.

Estas funciones de transferencia son de segundo orden. Los diagramas de bloques que describen este proceso interactivo se muestran en la figura 4-2.2. La figura 4-2.2*a* se hace directamente a partir de la ecuación 4-2.5. La figura 4-2.2*b* se hace "encadenando" las ecuaciones 4-2.3 y 4-2.4. Nótese asimismo que la figura 4-2.2*a* se pudo haber obtenido directamente de la figura 4-2.2*b* aplicando la regla de "retroalimentación positiva" de los diagramas de bloques que se presentó en el capítulo 3. La figura 4-2.2*b* muestra con claridad el carácter interactivo de este proceso. La figura muestra que $H_1(s)$ es la entrada para obtener $H_2(s)$, pero a su vez $H_2(s)$ es una entrada para obtener $H_1(s)$, como lo indica la "trayectoria de retroalimentación". Con frecuencia se hará referencia a estos sistemas como "retardos interactivos".

En este punto, son varias las cosas que se pueden aprender comparando las funciones de transferencia de los sistemas interactivos y no interactivos. Considérese la figura 4-2.3, donde se

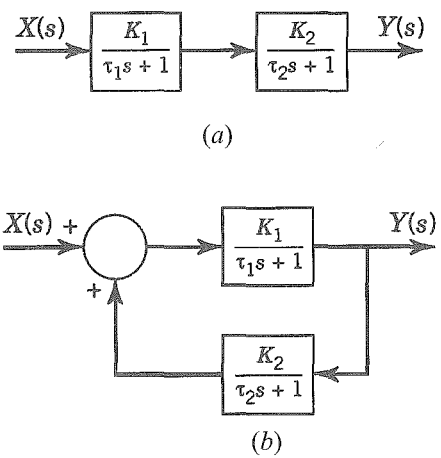


Figura 4-2.3 (*a*) Diagrama de bloques de un sistema no interactivo. (*b*) Diagrama de bloques de un sistema interactivo.

muestra un diagrama de bloques para un sistema no interactivo y un diagrama para un sistema interactivo. La función de transferencia para el sistema no interactivo es

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \tag{4-2.8}$$

Como se vio en la sección 2-5, las constantes de tiempo "efectivas" son el negativo del recíproco de las raíces del denominador de la función de transferencia. Para la función de transferencia anterior, las constantes de tiempo efectivas son iguales a los valores τ individuales, es decir, $\tau_{1_{eff}} = \tau_1$ y $\tau_{2_{eff}} = \tau_2$.

La función de transferencia para el sistema interactivo es

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\dfrac{K_1}{(\tau_1 s + 1)}}{1 - \dfrac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}} \tag{4-2.9}$$

o bien,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_1(\tau_2 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) - K_1 K_2} = \frac{K_1(\tau_2 s + 1)}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + (1 - K_1 K_2)} \tag{4-2.10}$$

Las raíces del denominador son

$$\text{Raíces} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1 \tau_2 (1 - K_1 K_2)}}{2\tau_1 \tau_2} \tag{4-2.11}$$

o, haciendo uso de la suposición de que $\tau_1 = \tau_2 = \tau$,

$$\text{Raíces} = \frac{-(1 + \sqrt{K_1 K_2})}{\tau}, \quad \frac{-(1 - \sqrt{K_1 K_2}}{\tau}$$

de donde las constantes de tiempo "efectivas" para el sistema interactivo se obtienen como

$$\tau_{1_{eff}} = \frac{\tau}{1 + \sqrt{K_1 K_2}} \quad \text{y} \quad \tau_{2_{eff}} = \frac{\tau}{1 - \sqrt{K_1 K_2}}$$

El cociente de estos dos términos es

$$\frac{\tau_{2\,eff}}{\tau_{1\,eff}} = \frac{1 + \sqrt{K_1 K_2}}{1 - \sqrt{K_1 K_2}}$$

que es un número mayor que uno ¡aun cuando $\tau_1 = \tau_2$! Este resultado indica con toda claridad que a mayor constante de tiempo, τ, que experimente un sistema interactivo, $\tau_{2_{eff}}$, es mayor que cualquier τ individual.

Las siguientes observaciones, conclusiones y comentarios se relacionan con el análisis anterior y con el tema general de los sistemas de orden superior.

1. Las constantes de tiempo "efectivas" son reales la mayoría de las veces, lo cual produce una respuesta no oscilatoria a un cambio escalón en la entrada. Las raíces son reales si, en la ecuación 4-2.11,

$$(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1 - K_1K_2) > 0$$

o bien,

$$\tau_1^2 + 2\tau_1\tau_2 + \tau_2^2 - 4\tau_1\tau_2 + 4\tau_1\tau_2K_1K_2 > 0$$

o bien,

$$\tau_1^2 - 2\tau_1\tau_2 + \tau_2^2 + 4\tau_1\tau_2K_1K_2 > 0$$

o bien,

$$(\tau_1 - \tau_2)^2 + 4\tau_1\tau_2K_1K_2 > 0$$

y esto se cumple si $\tau_1\tau_2K_1K_2 > 0$. Como en la mayoría de los casos $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ y $K_1K_2 > 0$, entonces las raíces son reales.

La excepción de la afirmación anterior es el reactor exotérmico con tanque de agitación continua en el que en ocasiones una de las constantes de tiempo es negativa. Remitirse a la sección 4-2.3, donde se presenta un reactor con una constante de tiempo negativa. En la sección 4-4.2 también se presenta otro reactor donde se muestra la respuesta oscilatoria.

Shinskey (1988) señaló que, para sistemas interactivos, mientras mayor sea la interacción, más diferentes serán las dos constantes de tiempo efectivas, y, por lo tanto, el proceso será más controlable.

2. En el capítulo 2 y en este capítulo se ha definido y utilizado varias veces el término constante de tiempo "efectiva". A continuación se examina este término con mayor detalle.

   En los capítulos 2 y 3 se vio que cuando la entrada a un sistema de primer orden sufre un cambio escalón, la constante de tiempo (τ) es el tiempo requerido por el sistema para alcanzar 63.2% de su cambio total. Esta definición se aplica a sistemas de primer orden. En los sistemas de orden superior no hay una constante de tiempo como la antes definida. Es decir, no es posible decir que alguno de los valores de τ en un sistema de orden superior representa el tiempo para alcanzar 63.2% del cambio total. Sin embargo, los valores de τ en las funciones de transferencia de estos sistemas siguen siendo una indicación de la dinámica del sistema. Entre más lento sea el sistema, mayores serán los valores de τ; y entre más rápido sea el sistema, menores serán los valores de τ. A esto se debe que se use el término *constante de tiempo efectiva* en vez de sólo *constante de tiempo*; se sigue usando la misma representación. Lo que sucede es que a menudo en la conversación diaria se omite la palabra *efectiva* y se usa únicamente constante de tiempo. Lo importante es recordar que τ es un parámetro del sistema relacionado con su dinámica; que para un sistema de primer orden tiene una definición precisa y que para un sistema de orden superior es tan sólo una indicación.

4-2.2 Tanques térmicos con reciclado

Considérese el proceso que se muestra en la figura 4-2.4. Este proceso es en esencia el mismo que se describió en la sección 4-1.2 excepto porque se ha agregado un caudal de reciclado al primer tanque. Se supone que este caudal de reciclado es una constante de 20% del flujo total que sale del proceso. Además, se aceptan las mismas suposiciones que se hicieron en la sección 4-1.2.

Se requiere saber la forma en que la temperatura de salida del segundo tanque, $T_4(t)$, responde a los cambios en la temperatura de entrada de los caudales A y B. Desarrollar el modelo matemático, determinar las funciones de transferencia que relacionan $T_4(t)$ con $T_1(t)$ y $T_3(t)$, y trazar el diagrama de bloques para este proceso.

Como en la sección 4-1.2, se empieza escribiendo un balance de energía de estado no estacionario del contenido del primer tanque:

$$f_A\rho C_p T_1(t) + 0.2(f_A + f_B)\rho C_p T_4(t) - [f_A + 0.2(f_A + f_B)]\rho C_p T_2(t)$$

$$= V_1 \rho C_p \frac{dT_2(t)}{dt} \qquad \textbf{(4-2.12)}$$

1 ec., 2 incóg. [$T_2(t)$, $T_4(t)$]

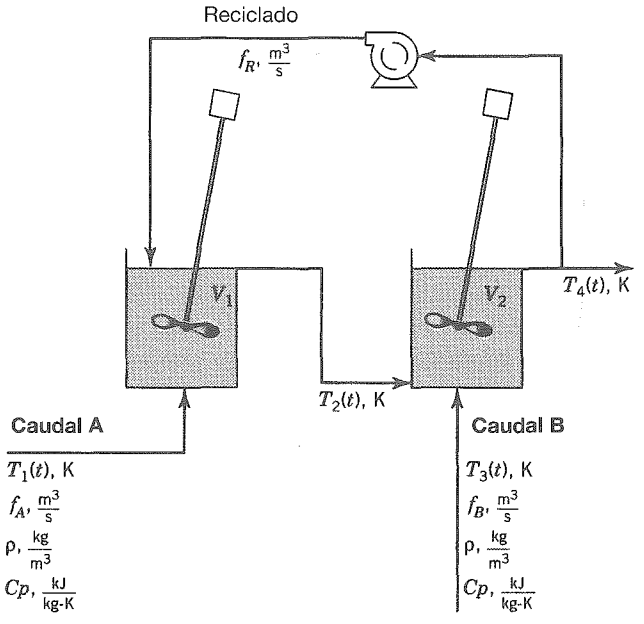


Figura 4-2.4 Tanques térmicos con reciclado.

Después se escribe un balance de energía de estado no estacionario del contenido del segundo tanque:

$$[f_A + 0.2(f_A + f_B)]\rho C_p T_2(t) + f_B \rho C_p T_B(t) - 1.2(f_A + f_B)\rho C_p T_4(t) = V_2 \rho C_p \frac{dT_4(t)}{dt} \tag{4-2.13}$$

2 ec., 2 incóg.

Las ecuaciones 4-2.12 y 4-2.13 constituyen el modelo matemático de este proceso.

Para obtener las funciones de transferencia y el diagrama de bloques requeridos, se procede de la manera usual y a partir de la ecuación 4-2.12 se obtiene

$$\Gamma_2(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1}\Gamma_1(s) + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}\Gamma_4(s) \tag{4-2.14}$$

y a partir de la ecuación 4-2.13,

$$\Gamma_4(s) = \frac{K_3}{\tau_2 s + 1}\Gamma_2(s) + \frac{K_4}{\tau_2 s + 1}\Gamma_3(s) \tag{4-2.15}$$

donde:

$$K_1 = \frac{f_A}{f_A + 0.2(f_A + f_B)}, \text{adimensional;}$$

$$K_2 = \frac{0.2(f_A + f_B)}{f_A + 0.2(f_A + f_B)}, \text{adimensional;}$$

$$K_3 = \frac{f_A + 0.2(f_A + f_B)}{1.2(f_A + f_B)}, \text{adimensional;} \quad K_4 = \frac{f_B}{1.2(f_A + f_B)}, \text{adimensional;}$$

$$\tau_1 = \frac{V_1}{f_A + 0.2(f_A + f_B)}, \text{segundos;} \quad \tau_2 = \frac{V_2}{1.2(f_A + f_B)}, \text{segundos.}$$

Sustituyendo la ecuación 4-2.14 en la ecuación 4-2.15 y despejando $T_4(t)$, se obtiene

$$\Gamma_4(s) = \frac{K_3 K_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) - K_2 K_3} \Gamma_1(s) + \frac{K_4(\tau_1 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) - K_2 K_3} \Gamma_3(s) \qquad \textbf{(4-2.16)}$$

de donde se obtienen las dos funciones de transferencia requeridas:

$$\frac{\Gamma_4(s)}{\Gamma_1(s)} = \frac{K_3 K_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) - K_2 K_3} \qquad \textbf{(4-2.17)}$$

y

$$\frac{\Gamma_4(s)}{\Gamma_3(s)} = \frac{K_4(\tau_1 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) - K_2 K_3} \qquad \textbf{(4-2.18)}$$

En la figura 4-2.5 se muestran dos maneras diferentes de trazar el diagrama de bloques. La figura 4-2.5*a* se traza encadenando las ecuaciones 4-2.14 y 4-2.15, y la figura 4-2.5*b* es la representación gráfica de la ecuación 4-2.16. La trayectoria de retroalimentación que se muestra en la figura 4-2.5*a* indica gráficamente el carácter interactivo de este proceso.

Los términos del denominador de las ecuaciones 4-2.17 y 4-2.18 indican que estas dos funciones de transferencia son de segundo orden. Aunque ambos denominadores son iguales, la respuesta dinámica de $\Gamma_4(t)$ a un cambio en $\Gamma_1(t)$ es diferente de la respuesta a un cambio en $\Gamma_3(t)$. Esta diferencia se debe al hecho de que el término $(\tau_1 s + 1)$ aparece en el numerador de la ecuación 4-2.18 pero no en el de la ecuación 4-2.17. La presencia de este término, como se demuestra en la sección 4-4.1, resulta en una respuesta dinámica más rápida. Por tanto, las ecuaciones 4-2.17 y 4-2.18 indican que $\Gamma_4(t)$ responde más rápido a un cambio en $\Gamma_3(t)$ que a un cambio en $\Gamma_1(t)$. Esto tiene sentido desde el punto de vista físico. En la figura 4-2.4 se observa que un cambio en $\Gamma_1(t)$ afecta primero a la temperatura en el primer tanque, $\Gamma_2(t)$, y que después afecta la temperatura en el segundo tanque, $\Gamma_4(t)$. Sin embargo, un cambio en $\Gamma_3(t)$ afecta directamente a $\Gamma_4(t)$.

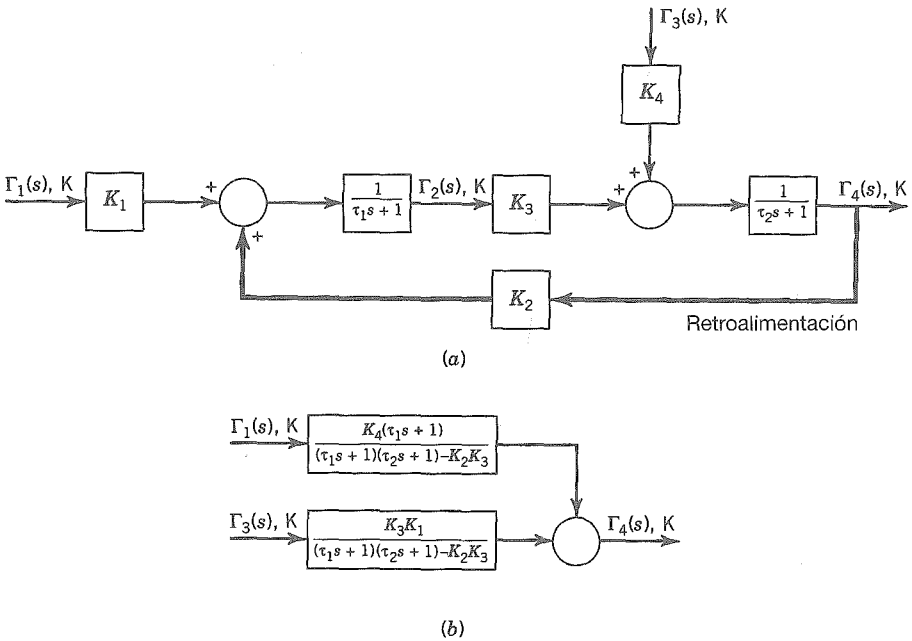


Figura 4-2.5 Diagramas de bloques para tanques térmicos con reciclado.

El párrafo anterior plantea una consideración de suma importancia. En el curso de un análisis matemático nunca debe olvidarse la física del proceso. El análisis no sirve si no describe lo que sucede en la realidad. La matemática es una "herramienta" para describir la naturaleza.

4-2.3 Reacción química no isotérmica

Considérese el reactor que se muestra en la figura 4-2.6. El reactor es un tanque de agitación donde ocurre la reacción exotérmica A → B. Para remover el calor de la reacción, el reactor se cubre con una camisa por la que circula un líquido de enfriamiento. Supóngase que las pérdidas de calor en el ambiente son despreciables, y que las propiedades termodinámicas, la densidad y la capacidad calorífica de los reactivos y del producto son iguales y constantes. El calor de reacción es constante y está dado por ΔH_r en unidades Btu/lbmol de A reaccionado. Supóngase asimismo que el nivel del líquido en el tanque del reactor es constante; es decir, la tasa de masa que entra al tanque es igual a la tasa de masa que sale del tanque. Por último, la tasa de reacción está dada por

$$r_A(t) = k_o e^{-E/RT(t)} c_A^2(t), \quad \frac{\text{lb moles de A producidos}}{\text{ft}^3 - \text{min}}$$

donde el factor de frecuencia, k_o, y la energía de activación, E, son constantes. En la tabla 4-2.1 se presentan los valores de estado estacionario de las variables y otras especificaciones del proceso.

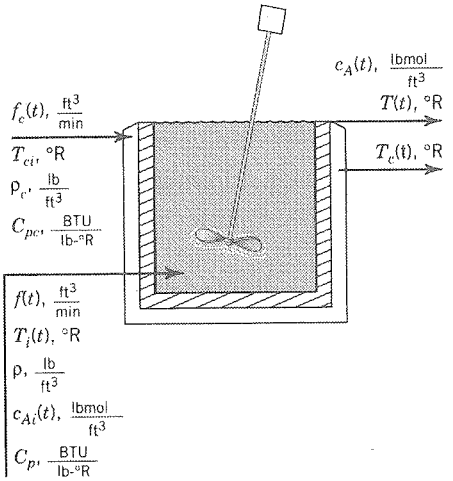


Figura 4-2.6 Reactor químico no isotérmico.

Tabla 4-2.1 Información y valores de estado estacionario del proceso

Información del proceso

$V = 13.26$ ft^3 $\quad k_o = 8.33 \times 10^8$ ft^3/(lbmol-min)
$E = 27{,}820$ Btu/lbmol $\quad R = 1.987$ Btu/(lbmol-°R)
$\rho = 55$ lbm/ft^3 $\quad C_p = 0.88$ Btu/(lbm-°F)
$\Delta H_r = -12{,}000$ Btu/lbmol $\quad U = 75$ Btu/(h-ft^2-°F)
$A = 36$ ft^2; $\rho_c = 62.4$ lbm/ft^3 $\quad C_{pc} = 1.0$ Btu/lbm-°F) $\quad V_c = 1.56$ ft^3

Valores de estado estacionario

$c_{Ai}(t) = 0.5975$ lbmol/ft^3 $\quad T_i(t) = 635$°R
$T_c = 602.7$°R $\quad f = 1.3364$ ft^3/min
$c_A(t) = 0.2068$ lbmol/ft^3 $\quad T(t) = 678.9$°R
$T_{ci}(t) = 540$°R $\quad f_c(t) = 0.8771$ ft^3/min

Se desea conocer la forma en que la concentración de salida de A, $c_A(t)$, y la temperatura de salida, $T(t)$, responden a los cambios en la concentración de entrada de A, $c_{A_i}(t)$; a la temperatura de entrada del reactivo, $T_i(t)$; a la temperatura de entrada del líquido de enfriamiento, $T_{c_i}(t)$; y a los flujos $f(t)$ y $f_c(t)$. El objetivo, por tanto, es desarrollar el modelo matemático, determinar las funciones de transferencia que relacionan $c_A(t)$ y $T(t)$ con $c_{A_i}(t)$, $T_i(t)$, $T_{c_i}(t)$, $f(t)$ y $f_c(t)$, y trazar el diagrama de bloques para este proceso.

Antes de alcanzar los objetivos, sería conveniente examinar el porqué del interés en saber cómo responde la temperatura de salida a las diferentes entradas. En la mayoría de los casos,

esta temperatura carece de importancia económica; sin embargo, está muy relacionada con la seguridad, la tasa de producción, el rendimiento y con otros objetivos de operación. Debido a que la temperatura es muy fácil de medir, es común utilizarla para poder controlar el desempeño del reactor.

Volviendo a los objetivos planteados, se empieza considerando el reactor como el volumen de control y escribiendo un balance molar de estado no estacionario del componente A como el que se examinó en la sección 3-7.1:

Tasa del componente A que entra al reactor	−	Tasa del componente A que sale del reactor	+	Tasa de producción del componente A	=	Tasa de cambio del componente A acumulado en el reactor

o bien,

$$f(t)c_{Ai}(t) - f(t)c_A(t) - Vr_A(t) = V\frac{dc_A(t)}{dt} \qquad \textbf{(4-2.19)}$$

1 ec., 2 incóg. $[r_A(t), c_A(t)]$

donde V = volumen del líquido en el reactor, ft^3. La expresión para la tasa de reacción proporciona otra ecuación

$$r_A(t) = k_o e^{-E/RT(t)} c_A^2(t) \qquad \textbf{(4-2.20)}$$

2 ec., 3 incóg. $[T(t)]$

Aún se necesita otra ecuación, específicamente una ecuación para obtener la temperatura. Por tanto, escribiendo un balance de energía de estado no estacionario del contenido del reactor, como el que se examinó también en la sección 3-7.1, se obtiene

Tasa de energía que entra al reactor	−	Tasa de energía que sale del reactor	−	Tasa de energía asociada con la reacción	=	Tasa de cambio de la energía acumulada en el reactor

$$f(t)\rho C_p T_i(t) - UA[T(t) - T_c(t)] - f(t)\rho C_p T(t) - Vr_A(\Delta H_r)$$

$$= V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt} \qquad \textbf{(4-2.21)}$$

3 ec., 4 incóg. $[T_c(t)]$

donde:

U = coeficiente global de transferencia de calor, supuesto constante, Btu/ft^2-°R-min
A = área de transferencia de calor, ft^2
ΔH_r = calor de reacción, Btu/lbmol de A reaccionado
C_v = capacidad calorífica a volumen constante, Btu/lb-°R.

Escribiendo un balance de energía de estado no estacionario del contenido de la camisa de enfriamiento –como un nuevo volumen de control– se obtiene otra ecuación

$$f_c(t)\rho_c C_{p_c} T_{c_i}(t) + UA[T(t) - T_c(t)] - f_c(t)\rho_c C_{p_c} T_c(t)$$

$$= V_c \rho_c C_{v_c} \frac{dT_c(t)}{dt} \qquad \textbf{(4-2.22)}$$

4 ec., 4 incóg.

donde:

V_c = volumen de la camisa de enfriamiento, m^3
C_{v_c} = capacidad calorífica a volumen constante del líquido de enfriamiento, supuesto constante, Btu/lb-°R.

Las ecuaciones 4-2.19 a 4-2.22 constituyen el modelo del proceso.

Para obtener las funciones de transferencia y el diagrama de bloques, se observa que este sistema de ecuaciones es no lineal, por lo que primero es necesario linealizar los términos no lineales. Al hacerlo, y definiendo las siguientes variables de desviación,

$$C_{A_i}(t) = c_{A_i}(t) - \bar{c}_{A_i};\ C_A(t) = c_A(t) - \bar{c}_A;\ \Gamma(t) = T(t) - \bar{T};\ F(t) = f(t) - \bar{f}$$
$$\Gamma_i(t) = T_i(t) - \bar{T}_i;\ F_c(t) = f_c(t) - \bar{f}_c;\ \Gamma_c(t) = T_c(t) - \bar{T}_c;\ \Gamma_{c_i}(t) = T_{c_i}(t) - \bar{T}_{c_i}$$

se obtiene, por la ecuación 4-2.19,

$$C_A(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} C_{A_i}(s) + \frac{K_2}{\tau_1 s + 1} F(s) - \frac{K_3}{\tau_3 s + 1} \Gamma(s) \qquad \textbf{(4-2.23)}$$

donde:

$$\tau_1 = \frac{V}{\bar{f} + 2Vk_o e^{-E/R\bar{T}}\bar{c}_A} = 2.07\,\text{min}; \qquad K_1 = \frac{\bar{f}}{\bar{f} + 2Vk_o e^{-E/R\bar{T}}\bar{c}_A} = 0.209$$

$$K_2 = \frac{\bar{c}_{Ai} - \bar{c}_A}{\bar{f} + 2Vk_o e^{-E/R\bar{T}}\bar{c}_A} = 0.0612\,\frac{\text{lbmol/ft}^3}{\text{ft}^3/\text{min}}; \qquad K_3 = \frac{V\dfrac{E}{R\bar{T}^2}\bar{r}_A}{\bar{f} + 2Vk_o e^{-E/R\bar{T}}\bar{c}_A}$$

$$= 0.00248\,\frac{\text{lbmol/ft}^3}{\text{°R}}$$

Por la ecuación 4-2.21,

$$\Gamma(s) = \frac{K_4}{\tau_2 s + 1} F(s) + \frac{K_5}{\tau_2 s + 1} \Gamma_i(s) - \frac{K_6}{\tau_2 s + 1} C_A(s) + \frac{K_7}{\tau_2 s + 1} \Gamma_c(s) \tag{4-2.24}$$

donde:

$$\tau_2 = \frac{V\rho C_v}{V(\Delta H_r)\bar{r}_A \frac{E}{R\bar{T}^2} + UA + \bar{f}\rho C_p} = -7.96 \text{ min}$$

$$K_4 = \frac{\rho C_p (\bar{T}_i - \bar{T})}{V(\Delta H_r)\bar{r}_A \frac{E}{R\bar{T}^2} + UA + \bar{f}\rho C_p} = 26.35 \frac{^\circ R}{\text{ft}^3/\text{min}}$$

$$K_5 = \frac{\bar{f}\rho C_p}{V(\Delta H_r)\bar{r}_A \frac{E}{R\bar{T}^2} + UA + \bar{f}\rho C_p} = -0.802$$

$$K_6 = \frac{2V(\Delta H_r)k_o e^{-E/R\bar{T}_{c_A}}}{V(\Delta H_r)\bar{r}_A \frac{E}{R\bar{T}^2} + UA + \bar{f}\rho C_p} = 751.48 \frac{^\circ\text{R}}{\text{lbmol/ft}^3}$$

$$K_7 = \frac{UA}{V(\Delta H_r)\bar{r}_A \frac{E}{R\bar{T}^2} + UA + \bar{f}\rho C_p} = -0.558$$

Finalmente, de la ecuación 4-2.22 se obtiene

$$\Gamma_c(s) = \frac{K_8}{\tau_3 s + 1} F_c(s) + \frac{K_9}{\tau_3 s + 1} \Gamma_{c_i}(s) + \frac{K_{10}}{\tau_3 s + 1} \Gamma(s) \tag{4-2.25}$$

donde:

$$\tau_3 = \frac{V_c \rho_c C_{p_c}}{UA + \bar{f}_c \rho_c C_{p_c}} = 0.976 \text{ min} \quad K_8 = \frac{\rho_c C_{p_c} (\bar{T}_{c_i} - \bar{T}_c)}{UA + \bar{f}_c \rho_c C_{p_c}} = -39.23 \frac{^\circ\text{R}}{\text{ft}^3/\text{min}}$$

$$K_9 = \frac{\bar{f}_c \rho_c C_{p_c}}{UA + \bar{f}_c \rho_c C_{p_c}} = 0.5488 \quad K_{10} = \frac{UA}{UA + \bar{f}_c \rho_c C_{p_c}} = 0.4512$$

Sustituyendo la ecuación 4-2.25 en la ecuación 4-2.24 se obtiene

$$\Gamma(s) = \frac{(\tau_3 s+1)}{(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7 K_{10}}[K_4 F(s) + K_5 \Gamma_i(s) - K_6 C_A(s)] + \frac{K_7}{(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7 K_{10}}[K_8 F_c(s) + K_9 \Gamma_{c_i}(s)] \tag{4-2.26}$$

Sustituyendo la ecuación 4-2.26 en la ecuación 4-2.23 se obtiene

$$\begin{aligned} C_A(s) = {} & \frac{K_1[(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7 K_{10}]}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7 K_{10}(\tau_1 s+1) - K_3 K_6(\tau_3 s+1)} C_{A_i}(s) \\ & + \frac{K_2[(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7 K_{10}] - K_3 K_4(\tau_3 s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7 K_{10}(\tau_1 s+1) - K_3 K_6(\tau_3 s+1)} F(s) \\ & - \frac{K_3 K_5(\tau_3 s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7 K_{10}(\tau_1 s+1) - K_3 K_6(\tau_3 s+1)} \Gamma_i(s) \\ & - \frac{K_3 K_7}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7 K_{10}(\tau_1 s+1) - K_3 K_6(\tau_3 s+1)} \\ & \times [K_8 F_c(s) + K_9 \Gamma_{c_i}(s)] \end{aligned} \tag{4-2.27}$$

y de la ecuación 4-2.27 se obtienen las siguientes funciones de transferencia

$$\frac{C_A(s)}{C_{A_i}(s)} = \frac{K_1[(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7 K_{10}]}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7 K_{10}(\tau_1 s+1) - K_3 K_6(\tau_3 s+1)} \tag{4-2.28}$$

o bien,

$$\frac{C_A(s)}{C_{A_i}(s)} = \frac{0.427(0.95s+1)(1-6.54s)}{26.27s^3 + 36.31s^2 + 10.14s + 1} \tag{4-2.29}$$

$$\frac{C_A(s)}{F(s)} = \frac{K_2[(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7 K_{10}] - K_3 K_4(\tau_3 s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7 K_{10}(\tau_1 s+1) - K_3 K_6(\tau_3 s+1)} \tag{4-2.30}$$

o bien,

$$\frac{C_A(s)}{F(s)} = \frac{0.0182(0.95s+1)(1-44.75s)}{26.27s^3 + 36.31s^2 + 10.14s + 1} \tag{4-2.31}$$

$$\frac{C_A(s)}{\Gamma_i(s)} = \frac{-K_3K_5(\tau_3 s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7K_{10}(\tau_1 s+1) - K_3K_6(\tau_3 s+1)} \tag{4-2.32}$$

o bien,

$$\frac{C_A(s)}{\Gamma_i(s)} = \frac{-0.0032(0.976s+1)}{26.27s^3+36.31s^2+10.14s+1} \tag{4-2.33}$$

$$\frac{C_A(s)}{F_c(s)} = \frac{-K_3K_7K_8}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7K_{10}(\tau_1 s+1) - K_3K_6(\tau_3 s+1)} \tag{4-2.34}$$

o bien,

$$\frac{C_A(s)}{F_c(s)} = \frac{0.0887}{26.27s^3+36.31s^2+10.14s+1} \tag{4-2.35}$$

$$\frac{C_A(s)}{\Gamma_{ci}(s)} = \frac{-K_3K_7K_9}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) - K_7K_{10}(\tau_1 s+1) - K_3K_6(\tau_3 s+1)} \tag{4-2.36}$$

o bien,

$$\frac{C_A(s)}{\Gamma_{c_i}(s)} = \frac{-0.00124}{26.27s^3+36.31s^2+10.14s+1} \tag{4-2.37}$$

De las ecuaciones 4-2.23, 4-2.24 y 4-2.25 también se obtiene:

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma_i(s)} = \frac{1.31(2.07s+1)(0.976s+1)}{26.27s^3+36.31s^2+10.14s+1} \tag{4-2.38}$$

$$\frac{\Gamma(s)}{F(s)} = \frac{31.79(0.976s+1)(1-2.77s)}{26.27s^3+36.31s^2+10.14s+1} \tag{4-2.39}$$

$$\frac{\Gamma(s)}{C_{A_i}(s)} = \frac{256(0.976s+1)}{26.27s^3+36.31s^2+10.14s+1} \tag{4-2.40}$$

$$\frac{\Gamma(s)}{F_c(s)} = \frac{-35.77(2.07s+1)}{26.27s^3+36.31s^2+10.14s+1} \tag{4-2.41}$$

y

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma_{c_i}(s)} = \frac{0.5(2.07s+1)}{26.27s^3 + 36.31s^2 + 10.14s + 1} \tag{4-2.42}$$

Todas las funciones de transferencia desarrolladas son de tercer orden. Sin embargo, el comportamiento dinámico de las variables de respuestas varía de manera muy significativa dependiendo de la función de forzamiento. Las diferencias se deben a los términos del numerador. Las ecuaciones 4-2.35 y 4-2.37 indican que el comportamiento dinámico de $C_A(t)$ a los cambios en $F_c(t)$ y $\Gamma_{c_i}(t)$ es el mismo pero que es diferente del comportamiento debido a los cambios en $C_{A_i}(t)$, $F(t)$ o $\Gamma_i(t)$. Además, las ecuaciones 4-2.29, 4-2.31 y 4-2.33 también indican un comportamiento dinámico diferente. Del mismo modo, las ecuaciones 4-2.41 y 4-2.42 indican el mismo comportamiento dinámico de $\Gamma(t)$ a los cambios en $F_c(t)$ y $\Gamma_{c_i}(t)$. Nótese que la respuesta dinámica de $C_A(t)$ a un cambio en $\Gamma_i(t)$ es la misma respuesta dinámica de $\Gamma(t)$ a un cambio en $C_{A_i}(t)$, como lo indican las ecuaciones 4-2.33 y 4-2.40. En la sección 4-3 se explica en detalle el efecto del término $(\tau s + 1)$ del numerador de la función de transferencia, y en la sección 4-4.2 se explica la importancia del término similar, pero claramente diferente, $(\tau s - 1)$.

En las figuras 4-2.7*a* y 4-2.7*b* se muestran varias maneras de trazar el diagrama de bloques para este reactor. Aunque la figura 4-2.7*b* parece ser un poco menos compleja, la figura 4-2.7*a* muestra con claridad todas las trayectorias de retroalimentación que indican las interacciones.

Las características no lineales de los procesos se presentaron y se examinaron en el capítulo 3. Los reactores químicos son no lineales en su comportamiento, por lo que es apropiado utilizar este reactor para examinar de nueva cuenta las características no lineales del proceso. En la figura 4-2.8 se muestra la manera en que varían cuatro de los términos que describen el proceso cuando la concentración en el reactor, $c_A(t)$, se opera en diferentes condiciones. Para obtener estas condiciones diferentes, se hizo variar el flujo del caudal de enfriamiento, $f_c(t)$, lo que también resultó en cambios en las temperaturas, $T(t)$ y $T_c(t)$, en el reactor. En la figura 4-2.8*a* se muestra cómo varía la ganancia en la ecuación 4-2.29. Esta ganancia se calcula con la ecuación 4-2.28 como $(K_1 - K_1K_7K_{10})/(1 - K_7K_{10} - K_3K_6)$. En la condición de estado estacionario original, el valor de esta ganancia es de −0.427. [*Nota: la ecuación 4-2.29 muestra un valor de +0.427 para la constante en el sitio donde suele ir la ganancia. Sin embargo, recuérdese que la ganancia de una función de transferencia se calcula con* $\lim_{s\to 0} G(s)$. *Cuando este límite se aplica a la ecuación 4-2.29, la ganancia resulta en −0.427. El término (6.54s − 1), el cual se explica con mayor detalle en la sección 4-4.2, cambia de signo.*] La figura muestra que en ocasiones la variación puede ser hasta por un factor de 2. La figura también muestra que después de un mínimo la ganancia empieza a aumentar de nuevo. La figura 4-2.8*b* muestra la ganancia de la ecuación 4-2.35, la cual se calcula con la ecuación 4-2.34 como $(-K_3K_7K_8)/(1 - K_7K_{10} - K_3K_6)$. La figura muestra un cambio por un factor mayor que 10. La figura 4-2.8*c* muestra cómo varía el primer término del denominador, el cual se denomina D_1, de todas las funciones de transferencia desarrolladas. Este término se calcula como $(\tau_1\tau_2\tau_3)/(1 - K_7K_{10} - K_3K_6)$, y tiene un valor de 26.27 min^3 en el estado estacionario original. La figura 4-2.8*d* muestra el segundo término del denominador, el cual se denomina D_2, de las funciones de transferencia. A su vez, este término se calcula como $(\tau_1\tau_2 + \tau_1\tau_3 + \tau_2\tau_3)/(1 - K_7K_{10} - K_3K_6)$, y tiene un valor de 36.31 min^2 en el estado estacionario original. Como se vio en el capítulo 3, las variaciones en el comportamiento del proceso, es decir, las no linealidades, tienen un efecto significativo sobre el control del proceso.

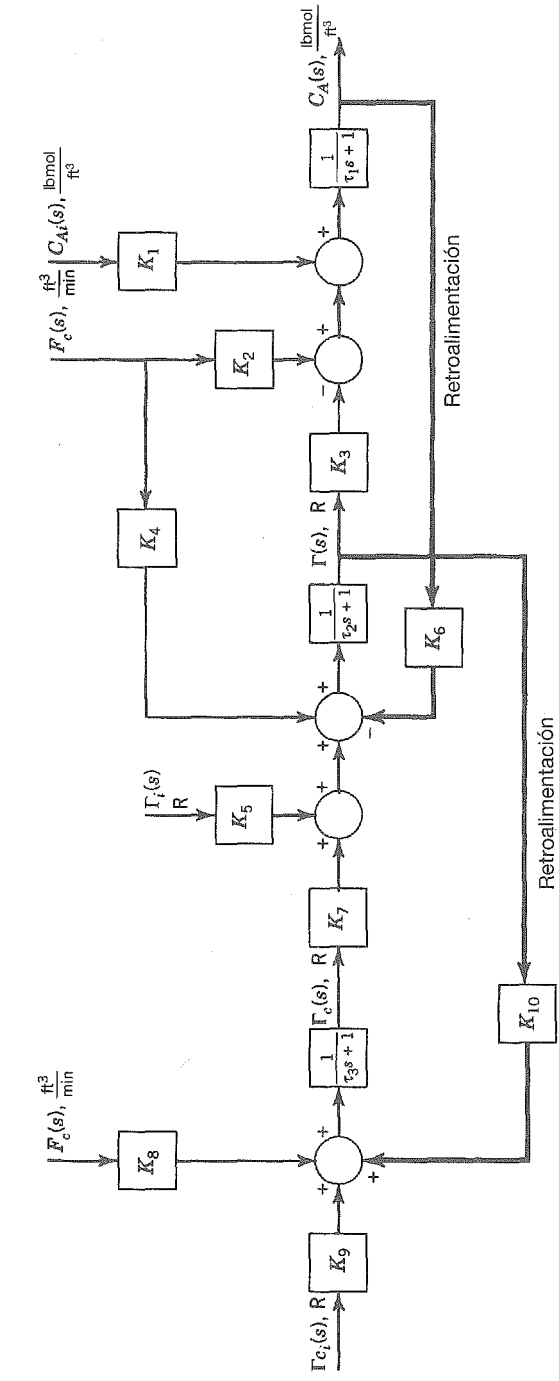
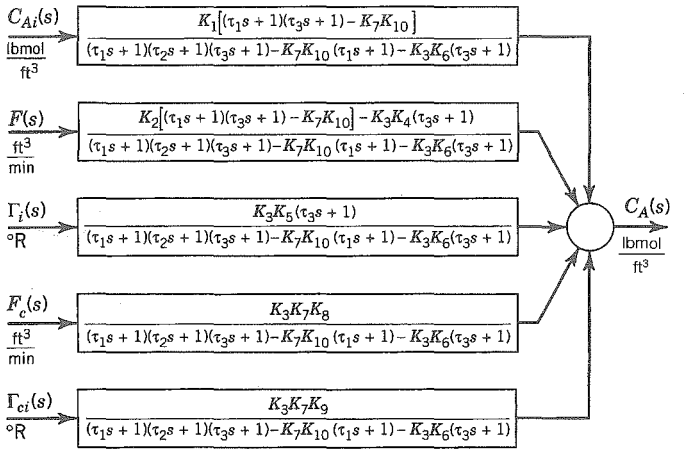


Figura 4-2.7*a* Diagrama de bloques para el reactor químico no isotérmico.



(*b*)

Figura 4-2.7*b* Diagrama de bloques para el reactor químico no isotérmico.

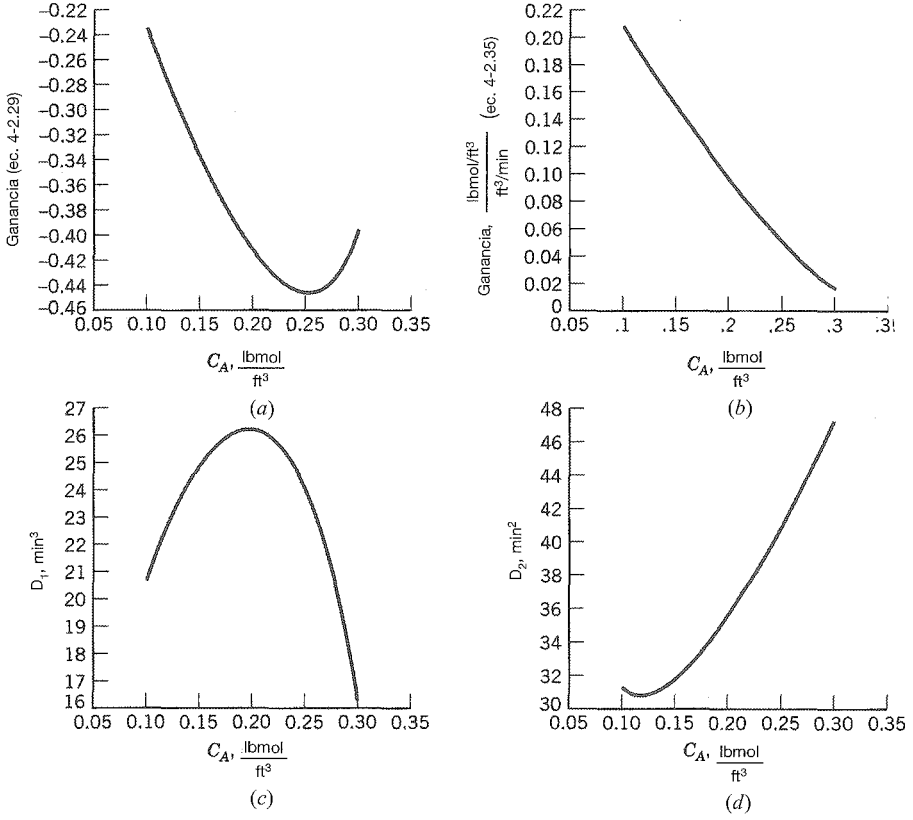


Figura 4-2.8 Variaciones de los parámetros del proceso con las condiciones de operación.

En este ejemplo de reactor se ha usado la expresión para la tasa de transferencia de calor $UA[T(t) - T_c(t)]$ Esta expresión indica que cuando cambia la temperatura del agua de enfriamiento, $T_c(t)$, el contenido del reactor de inmediato comienza a experimentar un cambio en la transferencia de calor. Por lo tanto, la dinámica de la pared se ha despreciado. Sin embargo, en la realidad esta dinámica puede ser importante. Cuando la temperatura del agua de enfriamiento cambia, la transferencia de calor hacia la pared cambia. Cuando la temperatura de la pared cambia, la transferencia de calor de la pared a los reactivos cambia. Por lo tanto, es sólo después de que la temperatura de la pared registra el cambio que la transferencia de calor a la masa de reacción comienza a cambiar. Por lo tanto, la pared representa otra capacitancia en el sistema, cuya magnitud depende del espesor, de la densidad, de la capacidad calorífica y de otras propiedades físicas del material de construcción de la pared.

Al tomar en consideración la pared esta capacitancia se entiende con mayor claridad. Se supondrá que la temperatura de la pared es uniforme, $T_m(t)$, debido a que la resistencia a la transferencia de calor de la pared es pequeña en comparación con las resistencias que hay a cada lado de la misma. En ocasiones, una de las dos resistencias es mucho mayor que la otra. En este caso, la capacitancia de la pared se puede englobar con la resistencia del lado que tiene la menor resistencia, y se supone que están a la misma temperatura.

Cuando se toma en consideración la pared del reactor, el balance molar de estado no estacionario del componente A y la tasa de reacción siguen siendo los mismos y, por tanto, dan lugar a dos ecuaciones, las ecuaciones 4-2.19 y 4-2.20, con tres incógnitas, $r_A(t)$, $c_A(t)$ y $T(t)$. El balance de energía de estado no estacionario del contenido del reactor cambia a

$$f(t)\rho C_p T_i(t) - h_i A_i [T(t) - T_m(t)] - f(t)\rho C_p T(t) - V r_A(t)(\Delta H_r) = V\rho C_p \frac{dT(t)}{dt} \quad \textbf{(4-2.43)}$$

3 ec., 4 incóg. $[T_m(t)]$

donde:

h_i = coeficiente de transferencia de calor de la película interior, supuesto constante, Btu/ft^2-min-°R
A_i = área interior de transferencia de calor, ft^2
$T_m(t)$ = temperatura de la pared de metal, °R.

Al procederse con un balance de energía de estado no estacionario de la pared, se puede escribir

$$h_i A_i [T(t) - T_m(t)] - h_o A_o [T_m(t) - T_c(t)] = V_m \rho_m C_{vm} \frac{dT_m(t)}{dt} \quad \textbf{(4-2.44)}$$

4 ec., 5 incóg. $[T_c(t)]$

donde:

h_o = coeficiente de transferencia de calor de la película exterior, supuesto constante, Btu/ft^2-min-°R
A_o = área exterior de transferencia de calor, ft^2
V_m = volumen de la pared metálica, ft^3

ρ_m = densidad de la pared metálica, lb/ft^3
C_{vm} = capacidad a volumen constante de la pared metálica, Btu/lb-°R.

Finalmente, un balance de energía de estado no estacionario del agua de enfriamiento da la otra ecuación requerida:

$$f_c(t)\rho_c C_{p_c} T_{c_i}(t) + h_o A_o [T_m(t) - T_c(t)] - f_c(t)\rho_c C_{p_c} T_c(t) = V_c \rho_c C_{v_c} \frac{dT_c(t)}{dt} \tag{4-2.45}$$

5 ec., 5 incóg.

Ahora se necesitan cinco ecuaciones para describir el reactor. La ecuación 4-2.44 es la nueva ecuación que describe la dinámica de la pared.

A partir de las ecuaciones 4-2.19 y 4-2.20 se obtiene la ecuación 4-2.23 como ya se indicó. Se escribe de nuevo esta ecuación por conveniencia

$$C_A(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} C_{A_i}(s) + \frac{K_2}{(\tau_1 s + 1)} F(s) - \frac{K_3}{(\tau_3 s + 1)} \Gamma(s) \tag{4-2.23}$$

Por la ecuación 4-2.43 y utilizando el procedimiento que se vio antes, se obtiene

$$\Gamma(s) = \frac{K_{11}}{\tau_4 s + 1} F(s) + \frac{K_{12}}{\tau_4 s + 1} \Gamma_i(s) - \frac{K_{13}}{\tau_4 s + 1} C_A(s) + \frac{K_{14}}{\tau_4 s + 1} \Gamma_m(s) \tag{4-2.46}$$

donde:

$$\tau_4 = \frac{V\rho C_v}{V(\Delta H_r)\bar{r}_A \dfrac{E}{R\bar{T}^2} + h_i A_i + \bar{f}\rho C_p}, \quad \text{minutos}$$

$$K_{11} = \frac{\rho C_p (\bar{T}_i - \bar{T})}{V(\Delta H_r)\bar{r}_A \dfrac{E}{R\bar{T}^2} + h_i A_i + \bar{f}\rho C_p}, \quad \frac{°\text{R}}{\text{ft}^3/\text{min}}$$

$$K_{12} = \frac{\bar{f}\rho C_p}{V(\Delta H_r)\bar{r}_A \dfrac{E}{R\bar{T}^2} + h_i A_i + \bar{f}\rho C_p}, \quad \text{adimensional}$$

$$K_{13} = \frac{V(\Delta H_r) k_o e^{-E/R\bar{T}}}{V(\Delta H_r)\bar{r}_A \dfrac{E}{R\bar{T}^2} + h_i A_i + \bar{f}\rho C_p}, \quad \frac{°\text{R}}{\text{lbmol/ft}^3}$$

$$K_{14} = \frac{h_i A_i}{V(\Delta H_r)\bar{r}_A \dfrac{E}{R\bar{T}^2} + h_i A_i + \bar{f}\rho C_p}, \quad \text{adimensional}$$

De la ecuación 4-2.44 y con el procedimiento usual, se obtiene

$$\Gamma_m(s) = \frac{K_{15}}{\tau_5 s + 1} \Gamma(s) + \frac{K_{16}}{\tau_5 s + 1} \Gamma_c(s) \tag{4-2.47}$$

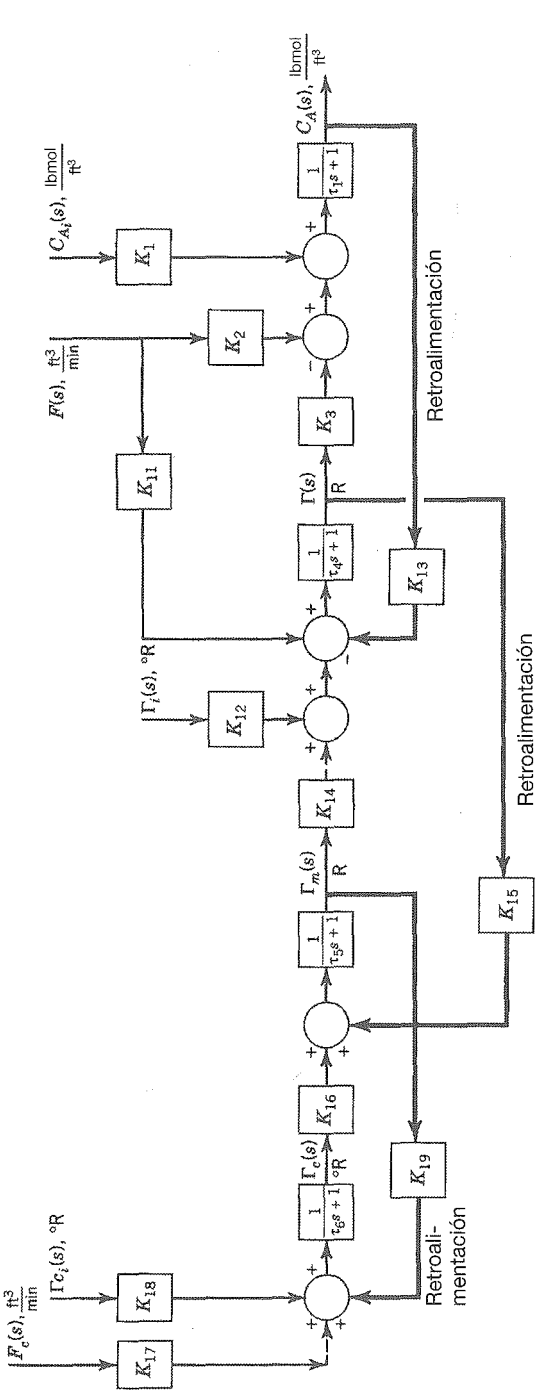


Figura 4-2.9 Diagrama de bloques para el reactor químico no isotérmico: se considera la pared.

donde:

$$\tau_5 = \frac{V_m \rho_m C_{vm}}{h_i A_i + h_o A_o}, \quad \text{minutos} \qquad K_{15} = \frac{h_i A_i}{h_i A_i + h_o A_o}, \quad \text{adimensional}$$

$$K_{16} = \frac{h_o A_o}{h_i A_i + h_o A_o}, \quad \text{adimensional}$$

Finalmente, de la ecuación 4-2.45 se obtiene,

$$\Gamma_c(s) = \frac{K_{17}}{\tau_6 s + 1} F_c(s) + \frac{K_{18}}{\tau_6 s + 1} \Gamma_{c_i}(s) + \frac{K_{19}}{\tau_6 s + 1} \Gamma_m(s) \tag{4-2.48}$$

donde:

$$\tau_6 = \frac{V_c \rho_c C_{v_c}}{h_o A_o + \bar{f}_c \rho_c C_{p_c}}, \quad \text{minutos} \qquad K_{17} = \frac{\rho_c C_{p_c} (\bar{T}_{c_i} - \bar{T}_c)}{h_o A_o + \bar{f}_c \rho_c C_{p_c}}, \quad \frac{^\circ\text{R}}{\text{ft}^3/\text{min}}$$

$$K_{18} = \frac{\bar{f}_c \rho_c C_{p_c}}{h_o A_o + \bar{f}_c \rho_c C_{p_c}}, \quad \text{adimensional} \qquad K_{19} = \frac{h_o A_o}{h_o A_o + \bar{f}_c \rho_c C_{p_c}}, \quad \text{adimensional}$$

El diagrama de bloques para este proceso se puede desarrollar con las ecuaciones 4-2.23, 4-2.46, 4-2.47 y 4-2.48. En este diagrama de bloques, el cual se muestra en la figura 4-2.9, se observa que ahora hay tres trayectorias de retroalimentación que indican el carácter interactivo del proceso.

Por último, como seguramente el lector habrá advertido, el desarrollo de las funciones de transferencia de este sistema es más complejo (aunque sólo se necesitan manipulaciones algebraicas) que en el caso anterior. Como se diría en todo buen libro de texto, el desarrollo de estas funciones de transferencia a partir de las ecuaciones anteriores "se deja como ejercicio para el lector".

4-3 RESPUESTA DE LOS SISTEMAS DE ORDEN SUPERIOR

En las secciones anteriores se desarrollaron varios tipos de funciones de transferencia de orden superior. Dos de las más comunes son

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \prod_{i=1}^{n} G_i(s) = \frac{K}{\prod_{i=1}^{n} (\tau_i s + 1)} \tag{4-3.1}$$

y

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K \prod_{j=1}^{m} (\tau_{ld_j} s + 1)}{\prod_{i=1}^{n} (\tau_{lg_i} s + 1)}; \quad n > m \tag{4-3.2}$$

Una tercera función de transferencia que se desarrolló es la que contiene el término $(\tau s - 1)$ en el numerador. En la sección 4-4.3 se examina este tipo de función de transferencia.

En el capítulo 2 se examinó la respuesta de los sistemas de orden superior. En esta sección se presenta un breve repaso de las respuestas de las ecuaciones 4-3.1 y 4-3.2 a un cambio escalón en la entrada. Consideramos que esta breve presentación ayuda a entender mejor la diferencia en la respuesta dinámica entre los diferentes sistemas que se estudian en el presente capítulo y el anterior.

Considérese la función de transferencia dada por la ecuación 4-3.1 con raíces reales y diferentes. En el dominio del tiempo, la respuesta a un cambio escalón de magnitud unitaria está dada por la ecuación 4-3.3

$$Y(t) = K \left[1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_i^{n-1} e^{-t/\tau_i}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\tau_i - \tau_j)} \right] \tag{4-3.3}$$

En el capítulo 2 se presenta el método general para resolver las funciones de transferencia con otros tipos de raíces.

En la figura 4-3.1 se muestra la respuesta de un sistema descrito por la ecuación 4-3.1 para $n = 2$ a $n = 6$ a un cambio escalón de magnitud unitaria en la función de forzamiento, $X(s) = 1/s$, donde todas las constantes de tiempo son iguales a 1 minuto (la ecuación 4-3.3 no se aplica en este caso porque las raíces no son diferentes). Por la figura, es claro que a medida que el orden del sistema se incrementa, la respuesta inicial del sistema se hace cada vez más lenta. Es decir, hay un tiempo muerto "aparente" que también parece incrementarse. Esto es importante en el estudio del control automático de procesos porque la mayoría de los procesos industriales están formados por sistemas de primer orden en serie. Al analizar la figura 4-3.1 con mayor atención, se puede observar que la respuesta de los sistemas de tercer orden y orden superior se parece a la respuesta de un sistema sobreamortiguado de segundo orden con una cierta cantidad de tiempo muerto. Debido a este parecido, la respuesta de estos sistemas se puede aproximar con la de un sistema de segundo orden más tiempo muerto (SOPDT, por sus siglas en inglés). Lo anterior se representa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\prod_{i=1}^{n} (\tau_i s + 1)} \approx \frac{K e^{-t_o s}}{(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1)} \tag{4-3.4}$$

para $n > 2$.

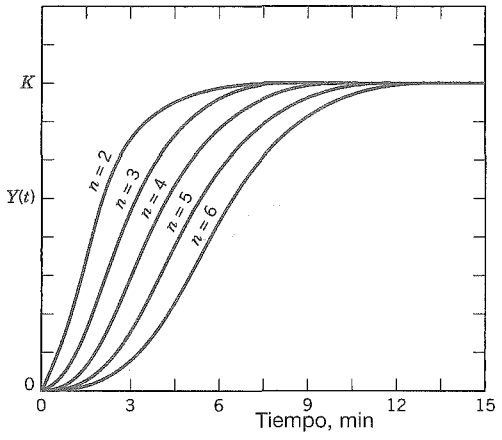


Figura 4-3.1 Respuesta de sistemas sobreamortiguados de orden superior a un cambio escalón unitario en la entrada.

La respuesta de un proceso descrito por la ecuación 4-3.2, con raíces reales y diferentes, a un cambio escalón de magnitud unitaria en la función de forzamiento está dada por la ecuación 4-3.5:

$$Y(t) = K\left[1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{m} (\tau_{\lg_i} - \tau_{ld_j})\tau_{\lg_i}^{n-m-1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\tau_{\lg_i} - \tau_{ld_i})} e^{-\frac{t}{\tau_{\lg_i}}}\right] \tag{4-3.5}$$

Para entender mejor el término $(\tau_{ld}\, s + 1)$, se compara la respuesta de los dos procesos siguientes a un cambio escalón de magnitud unitaria en $X(s)$.

$$\frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+1)(2s+1)(3s+1)} \tag{4-3.6}$$

$$\frac{Y_2(s)}{X(s)} = \frac{(0.5s+1)}{(s+1)(2s+1)(3s+1)} \tag{4-3.7}$$

En la figura 4-3.2 se muestran las dos respuestas. El efecto del término $(\tau_{ld}\, s + 1)$ es "acelerar" la respuesta del sistema. Esto es lo contrario del efecto del término $1/(\tau_{\lg}\, s + 1)$. En el capítulo 3 se hizo referencia al término $1/(\tau_{\lg}\, s + 1)$ como un *retardo de primer orden.* Por consiguiente, se hace referencia al término $(\tau_{ld}\, s + 1)$ como un *adelanto de primer orden.* A esto se debe el uso de la notación $\tau_{\lg}$, que indica una constante de tiempo de "retardo" (*lag,* en inglés), y τ_{ld}, que indica una constante de tiempo de "adelanto" (*lead,* en inglés). Nótese que cuando τ_{ld} es igual a $\tau_{\lg}$, el orden de la función de transferencia disminuye en una unidad. En el capítulo 2 también se presentaron los conceptos de adelanto y retardo utilizando la respuesta a una función rampa.

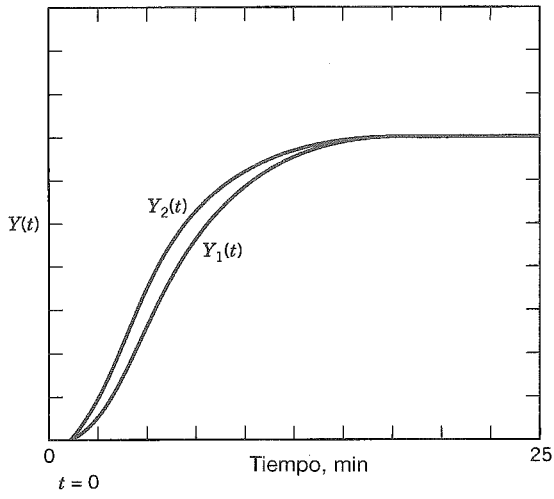


Figura 4-3.2 Comparación de las respuestas de las ecuaciones 4-3.6 y 4-3.7.

Una característica común de todas las respuestas que se han presentado hasta el momento es que todas ellas alcanzan un nuevo estado estacionario, o condición de operación. Los procesos que presentan esta característica –es decir, los procesos que después de un cambio escalón en la entrada alcanzan un nuevo estado estacionario– en ocasiones se clasifican como *procesos autorregulados*; la mayoría de los procesos son de este tipo. En la sección 4-4 se presentan dos ejemplos de *procesos no autorregulados.*

4-4 OTROS TIPOS DE RESPUESTAS DE PROCESOS

En esta sección se presentan algunos sistemas que no se pueden clasificar en alguna de las categorías vistas hasta el momento. Los dos primeros sistemas que se presentan en ocasiones se clasifican bajo el encabezado general de no autorregulados; en esta sección se explica la razón de este término. El tercer sistema que se presenta, aunque es del tipo autorregulado, tiene una respuesta diferente a los sistemas que se han visto en el presente capítulo y en el anterior.

4-4.1 Procesos integrantes: proceso de nivel

Considérese el tanque de proceso de la figura 4-4.1. Un caudal de entrada llega al tanque libremente, mientras que el caudal de salida depende de la velocidad de la bomba. La velocidad de la bomba está regulada por la señal $m(t)$, %. La relación entre el flujo de salida y la señal a la bomba está dada por

$$\tau_p \frac{df_o(t)}{dt} + f_o(t) = K_p m(t)$$

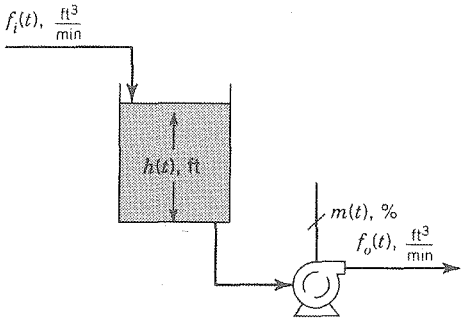


Figura 4-4.1 Tanque de proceso con una bomba que manipula el flujo de salida.

Es decir, el flujo de la bomba no responde instantáneamente a un cambio en la señal, sino como una respuesta de primer orden con constante de tiempo τ_p (min) y ganancia K_p (ft^3/min/%). Es importante tener presente que el flujo de la bomba no depende del nivel en el tanque sino sólo de la señal de entrada $m(t)$.

Desarrollar el modelo matemático, obtener las funciones de transferencia y trazar los diagramas de bloques que relacionen el nivel del líquido en el tanque, $h(t)$, con el flujo de entrada, $f_i(t)$, y con la señal de entrada, $m(t)$.

Un balance de masa de estado no estacionario alrededor del tanque proporciona la primera ecuación que se necesita:

$$\rho f_i(t) - \rho f_o(t) = \rho A \frac{dh(t)}{dt} \tag{4-4.1}$$

1 ec., 2 incóg. [$f_o(t)$, $h(t)$]

donde:

ρ = densidad del líquido, supuesto constante, lbm/ft^3
A = área transversal del tanque, ft^2.

La bomba proporciona la segunda ecuación:

$$\tau_p \frac{df_o(t)}{dt} + f_o(t) = K_p m(t) \tag{4-4.2}$$

2 ec., 2 incóg.

Solamente se necesitan dos ecuaciones para modelar este proceso simple.

Siguiendo el procedimiento usual, a partir de la ecuación 4-4.1 se obtiene

$$H(s) = \frac{1}{As}[F_i(s) - F_o(s)] \tag{4-4.3}$$

donde las variables de desviación son

$$H(t) = h(t) - \bar{h}; \quad F_i(t) = f_i(t) - \bar{f}_1; \quad F_o(t) = f_o(t) - \bar{f}_o$$

De la ecuación 4-4.2 se obtiene

$$F_o(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} M(s) \tag{4-4.4}$$

donde la nueva variable de desviación es $M(t) = m(t) - \bar{m}$.

Sustituyendo la ecuación 4-4.4 en la ecuación 4-4.3 se obtiene

$$H(s) = \frac{1}{As} F_i(s) - \frac{K_p}{As(\tau_p s + 1)} M(s) \tag{4-4.5}$$

de donde se pueden escribir las siguientes funciones de transferencia:

$$\frac{H(s)}{F_i(s)} = \frac{1}{As} \tag{4-4.6}$$

y

$$\frac{H(s)}{M(s)} = \frac{-K_p}{As(\tau_p s + 1)} \tag{4-4.7}$$

Estas dos funciones de transferencia son diferentes a las que se han obtenido anteriormente. El término s en el denominador indica el carácter "integrante" del proceso. A continuación se desarrolla la respuesta del sistema a un cambio de –B% en la señal $m(t)$. Es decir,

$$M(t) = -Bu(t)$$

$$M(s) = -\frac{B}{s}$$

y aplicando las técnicas que se vieron en el capítulo 2, se encuentra que

$$H(s) = \frac{K_p B}{As^2(\tau_p s + 1)}$$

y al invertir esta ecuación de nuevo al dominio del tiempo, se obtiene

$$H(t) = \frac{K_p B}{A}(t - \tau_p + \tau_p e^{-t/\tau_p}) \tag{4-4.8}$$

Esta ecuación indica que, a medida que el tiempo aumenta, el término exponencial decae a cero pero que el primer término continúa aumentando; esto da lugar a una respuesta del nivel del tipo rampa. En teoría, el nivel debería continuar aumentando, "integrándose", sin límites. De manera realista, el nivel dejará de aumentar una vez que el tanque empiece a derramarse, que es una condición de operación extrema. Si la señal hubiera aumentado, incrementando la velocidad de la bomba, el análisis habría indicado el mismo tipo de respuesta pero en la dirección contraria. Es decir, en teoría el nivel disminuiría sin límites. De manera realista, el nivel habría dejado de descender cuando estuviera muy cerca del fondo del tanque o cuando la bomba empezara a formar burbujas de aire. Sin embargo, en la práctica los tanques están equipados con alarmas de nivel alto/bajo y con interruptores diseñados especialmente para evitar estas condiciones de operación extremas. Estos controles de seguridad son necesarios en cualquier proceso bien diseñado. En la figura 4-4.2 se muestra la respuesta del sistema y en la figura 4-4.3 se muestra el diagrama de bloques.

El carácter integrante de este sistema se desarrolla porque el flujo de salida, $f_o(t)$, no está en función del nivel en el tanque sino que sólo está en función de la señal a la bomba, como lo expresa la ecuación 4-4.2. Es decir, no hay "retroalimentación del proceso" que proporcione regulación. Es común usar válvulas de control para manipular el flujo de salida. La figura 4-4.4 muestra dos configuraciones posibles. La figura 4-4.4*a* es igual que la figura 4-4.1, es decir, la presión corriente arriba de la válvula la proporciona la bomba y, por consiguiente, es independiente del nivel en el tanque. En la figura 4-4.4*b* la presión corriente arriba depende del nivel y, por consiguiente, el flujo también depende del nivel. Esta dependencia proporciona la "retroalimentación del proceso" necesaria para la autorregulación. En este caso, las funciones de transferencia hubieran sido

$$\frac{H(s)}{F_i(s)} = \frac{K_1}{\tau s + 1} \tag{4-4.9}$$

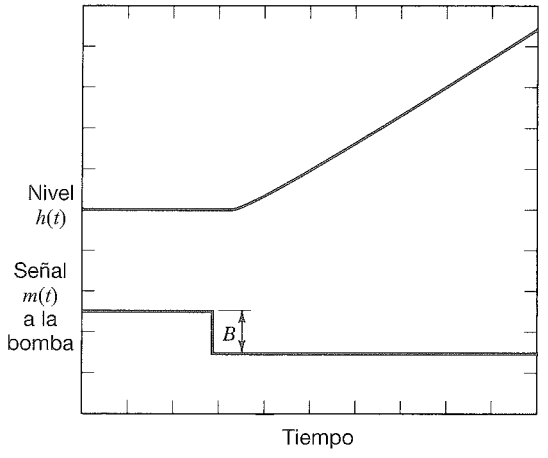


Figura 4-4.2 Respuesta del nivel del tanque a un cambio en la señal a la bomba.

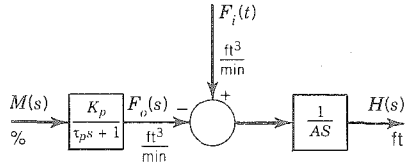


Figura 4-4.3 Diagrama de bloques para el tanque de proceso.

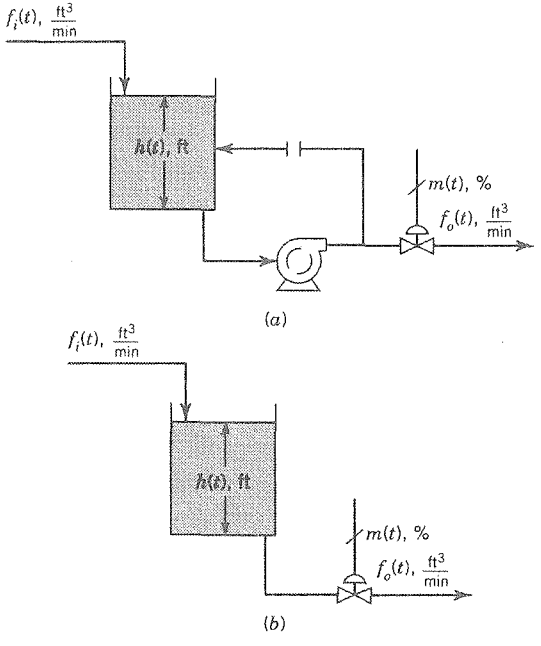


Figura 4-4.4 Tanque de proceso con una válvula de control que manipula el flujo de salida.

y

$$\frac{H(s)}{M(s)} = \frac{-K_2}{(\tau s+1)(\tau_v s+1)} \tag{4-4.10}$$

donde:

τ = constante de tiempo del tanque
τ_v = constante de tiempo de la válvula.

Sin embargo, en ocasiones el nivel no afecta significativamente el flujo de salida, lo cual resulta en una respuesta parecida a la mostrada en la figura 4-4.2. Para abundar en este punto, supóngase que la señal a la válvula presenta un cambio de –B% y que la válvula se cierra un poco. En este caso, el nivel aumenta y al hacerlo incrementa el flujo de salida debido a la altura del líquido. Este proceso continúa hasta que el flujo de salida se hace igual al flujo de entrada, alcanzando un nuevo estado estacionario. Pero supóngase que el incremento necesario en el

nivel para alcanzar éste un nuevo estado estacionario está por encima de la altura máxima, con lo que el tanque se derramaría. En este caso, aun cuando el proceso esté tratando de equilibrarse, la operación sigue resultando en una respuesta similar a la integrante.

Cualquier sistema descrito por una función de transferencia que contiene un término s aislado en el denominador se conoce como sistema "integrante". La respuesta de estos sistemas a un cambio escalón en la entrada es tal que, en teoría, no alcanzarán un nuevo estado estacionario, o condición de operación. Es decir, no se pueden autorregular para alcanzar una nueva condición de estado estacionario y en ocasiones se les clasifica como *sistemas no autorregulados*. En la práctica, como se examina en esta sección, estos sistemas alcanzan una condición de estado estacionario "extrema". El ejemplo más común de un sistema integrante es un proceso de nivel. El control del nivel se examina con mayor detalle en el capítulo 7.

4-4.2 Proceso inestable de lazo abierto: reactor químico

Considérese el reactor químico de la figura 4-4.5 donde ocurre la reacción exotérmica A → B. Para remover el calor desprendido por la reacción se utiliza una camisa que cubre el reactor por el que circula un líquido de enfriamiento que se mantiene a 100°F como resultado de la alta velocidad de recirculación.

Se desea desarrollar el sistema de ecuaciones que describe este proceso y las funciones de transferencia que relacionan la temperatura y la concentración de salida del reactor con la temperatura y la concentración de entrada. Supóngase que el contenido del reactor está bien mezclado, que el reactor está bien aislado, y que la capacidad calorífica y la densidad del reactivo y del producto son iguales. En la tabla 4-4.1 se presenta toda la información necesaria del proceso y los valores de estado estacionario.

Se empieza escribiendo un balance molar de estado no estacionario del reactivo A:

$$fc_{A_i}(t) - fc_A(t) - Vr_A(t) = V\frac{dc_A(t)}{dt} \qquad \textbf{(4-4.11)}$$

1 ec., 2 incóg. $[r_A(t), c_A(t)]$

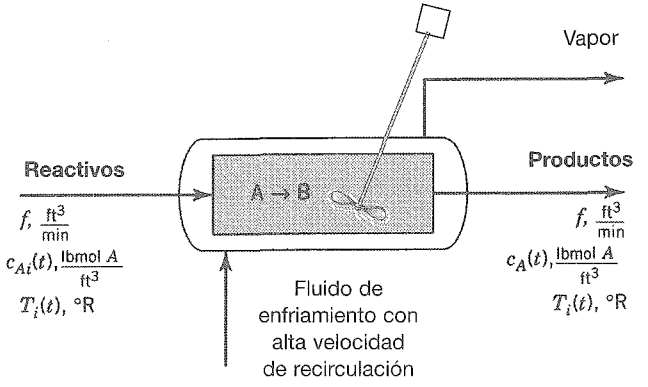


Figura 4-4.5 Reactor químico.

Tabla 4-4.1 Información y valores de estado estacionario del proceso

Información del proceso

$V = 13.26$ ft^3; $A = 36$ ft^2
$E = 27{,}820$ Btu/lbmol; $R = 1.987$ Btu/lbmol-°R
$\rho = 55$ lbm/ft^3; $C_p = 0.88$ Btu/lbm-°F
$\Delta H_r = -12{,}020$ Btu/lbmol; $U = 75$ Btu/(h-ft^2-°F)
$k_o = 1.73515 \times 10^{13}$ min^{-1}

Valores de estado estacionario

$c_{Ai}(t) = 0.8983$ lbmol/ft^3; $T_i(t) = 578$°R
$T_c = 560.0$°R; $f = 1.3364$ ft^3/min
$c_A(t) = 0.08023$ lbmol/ft^3; $T(t) = 690.0$°R

donde:

$r_A(t)$ = tasa de reacción, lbmol de A reaccionado/ft^3-min
V = volumen del reactor, ft^3.

De la expresión para la tasa de reacción se obtiene

$$r_A(t) = k_o e^{-E/RT(t)} c_A(t) \tag{4-4.12}$$

2 ec., 3 incóg. [$T(t)$]

Un balance de energía del contenido del reactor proporciona otra ecuación:

$$f\rho C_p T_i(t) - UA[T(t) - T_c] - f\rho C_p T(t) - V r_A(t)(\Delta H_r) = V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt} \tag{4-4.13}$$

3 ec., 3 incóg.

donde:

T_c = temperatura del líquido que hierve en la camisa de enfriamiento, °R
ΔH_r = calor de reacción, Btu/lbmol de A reaccionado, supuesto constante.

Aplicando el procedimiento usual se obtiene

$$\frac{C_A(s)}{C_{Ai}(s)} = \frac{\dfrac{K_1}{1 - K_2 K_4}(\tau_2 s + 1)}{\dfrac{\tau_1 \tau_2}{1 - K_2 K_4} s^2 + \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{1 - K_2 K_4} s + 1} \tag{4-4.14}$$

$$\frac{C_A(s)}{\Gamma_i(s)} = \frac{\dfrac{-K_2 K_3}{1 - K_2 K_4}}{\dfrac{\tau_1 \tau_2}{1 - K_2 K_4} s^2 + \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{1 - K_2 K_4} s + 1} \tag{4-4.15}$$

$$\frac{\Gamma(s)}{C_{Ai}(s)} = \frac{\dfrac{-K_1K_4}{1-K_2K_4}}{\dfrac{\tau_1\tau_2}{1-K_2K_4}s^2 + \dfrac{\tau_1+\tau_2}{1-K_2K_4}s + 1} \tag{4-4.16}$$

y

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma_i(s)} = \frac{\dfrac{K_3}{1-K_2K_4}(\tau_1 s+1)}{\dfrac{\tau_1\tau_2}{1-K_2K_4}s^2 + \dfrac{\tau_1+\tau_2}{1-K_2K_4}s + 1} \tag{4-4.17}$$

donde:

$$K_1 = \frac{f}{f+Vk_oe^{-E/R\bar{T}}}, \text{ adimensional; } K_2 = \frac{Vk_oE\bar{c}_Ae^{-E/R\bar{T}}}{R\bar{T}^2(f+Vk_oe^{-E/R\bar{T}})}, \frac{\text{lbmol A/ft}^3}{^\circ\text{R}}$$

$$K_3 = \frac{f\rho C_p}{\dfrac{Vk_oE\bar{c}_A\Delta H_re^{-E/R\bar{T}}}{R\bar{T}^2} + f\rho C_p + UA}, \text{ adimensional}$$

$$K_4 = \frac{Vk_o\Delta H_re^{-E/R\bar{T}}}{\dfrac{Vk_oE\bar{c}_A\Delta H_re^{-E/R\bar{T}}}{R\bar{T}^2} + f\rho C_p + UA}, \frac{^\circ\text{R}}{\text{lbmol A/ft}^3}$$

$$\tau_1 = \frac{V}{f+Vk_oe^{-E/R\bar{T}}}, \text{min; } \tau_2 = \frac{V\rho C_v}{\dfrac{Vk_oE\bar{c}_A\Delta H_re^{-E/R\bar{T}}}{R\bar{T}^2} + f\rho C_p + UA}, \text{ min}$$

y las variables de desviación son

$$C_A(t) = c_A(t) - \bar{c}_A;\ C_{Ai}(t) = c_{Ai}(t) - \bar{c}_{Ai};$$
$$\Gamma(t) = T(t) - \bar{T};\ \Gamma_i(t) = T_i(t) - \bar{T}_i$$

Como se vio en el capítulo 2, para que un sistema sea estable, todas las raíces del denominador de la función de transferencia deben tener partes reales negativas. Así, para el reactor químico en cuestión, las raíces están dadas por

$$\text{Raíces} = \frac{-(\tau_1+\tau_2) \pm [(\tau_1+\tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1-K_2K_4)]^{1/2}}{2\tau_1\tau_2} \tag{4-4.18}$$

Como se ha visto en este capítulo y el anterior, los valores numéricos de los parámetros del proceso, τ_1, τ_2, K_2 y K_4, en sistemas no lineales varían cuando las condiciones de operación, $\bar{c}_A$ y $\bar{T}$, varían. Por lo tanto, las raíces y la propia estabilidad del sistema también varían. La

tabla 4-4.2 muestra las raíces cuando las condiciones de operación cambian. Para generar esta información, la energía removida del reactor por el flujo de enfriamiento se hizo variar ajustando T_c para obtener las condiciones de operación deseadas de $\overline{c}_A$ y $\overline{T}$.

A continuación se analiza con mayor detalle la respuesta de este reactor químico. En la figura 4-4.6*a* se muestran las respuestas de la temperatura y la concentración a un cambio de −5°R en la temperatura de entrada; las respuestas son oscilatorias alrededor de una temperatura de 684°R y una concentración de 0.102 lbmol/ft^3. La tabla 4-4.2 indica que para estos valores de temperatura y concentración, las raíces son $-0.0819 \pm 0.2341i$, indicando una respuesta estable (parte real negativa) y una oscilatoria (parte imaginaria). En la figura 4-4.6*b* se muestran las respuestas a un cambio de −10°F en la temperatura de entrada. En este caso, la temperatura empieza a bajar y la concentración a aumentar, aparentemente sin límites. La tabla 4-4.2 muestra que alrededor de 668°R las raíces tienen partes reales positivas, lo que indica un comportamiento inestable, o lo que es común denominar *respuesta inestable de lazo abierto.* En teoría, este descenso en la temperatura y el aumento en la concentración deberían continuar. Sin embargo, la figura 4-4.6*b* muestra que la temperatura al final se estabiliza en 566°R y la concentración en 0.8393 lbmol/ft^3. La tabla 4-4.2 muestra que en estas condiciones, las raíces recuperan sus partes reales negativas. A 566°R la reacción "se apaga", indicando que no hay conversión. A la temperatura final de 566°R, las funciones de transferencia son:

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma_i(s)} = \frac{K_3(9.79s+1)}{(9.75s+1)(6.6s+1)} \quad \text{y} \quad \frac{C_A(s)}{\Gamma_i(s)} = \frac{-K_2K_3}{(9.75s+1)(6.6s+1)}$$

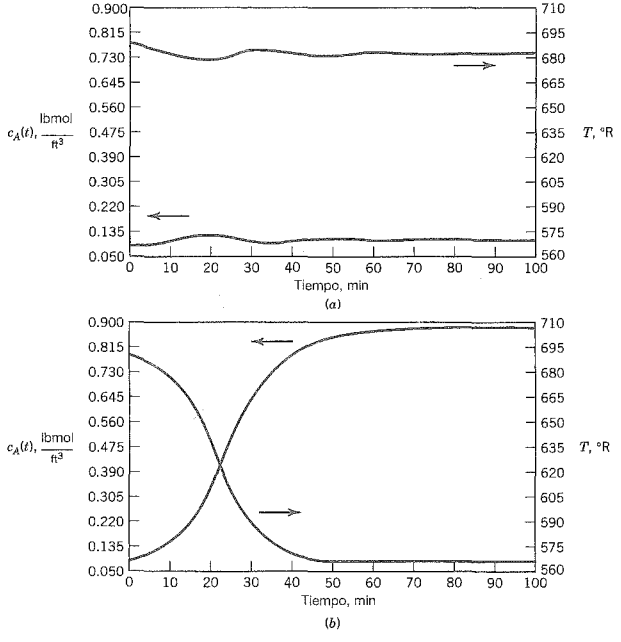


Figura 4-4.6 (*a*) Respuesta de la temperatura y la concentración a un cambio de −5°R en la temperatura de entrada. (*b*) Respuesta de la temperatura y la concentración a un cambio de −10°R en la temperatura de entrada.

Tabla 4-4.2 Raíces contra condiciones de operación

$\bar{c}_A$, lbmol/ft³	$\bar{T}$, °R	Raíces		$\bar{c}_A$, lbmol/ft³	$\bar{T}$, °R	Raíces	
0.8905	560.08	−0.1018,	−0.1577	0.4159	644.0	−0.0805,	+0.3032
0.8868	566.00	−0.1026,	−0.1515	0.3499	650.0	−0.0749,	+0.3275
0.8815	572.00	−0.1040,	−0.1425	0.2526	660.0	−0.0564,	+0.3063
0.8738	578.00	−0.1080,	−0.1279	0.1894	668.0	−0.1249,	+0.1987
0.8671	582.00	−0.1135,	±0.0096i	0.1629	672.0	−0.0647,	±0.0669i
0.8588	586.00	−0.1079,	±0.0165i	0.1020	684.0	−0.0819,	±0.2341i
0.8485	590.00	−0.1012,	±0.0203i	0.0802	690.0	−0.1980,	±0.2502i
0.8287	596.00	−0.0886,	±0.0211i	0.0630	696.0	−0.3506,	±0.1767i
0.7270	614.00	−0.0882,	+0.0316	0.0536	700.0	−0.6491,	−0.3037
0.6764	620.00	−0.0884,	+0.0871	0.0331	712.0	−1.7969,	−0.2095
0.6381	624.00	−0.0881,	+0.1265	0.0241	720.0	−2.8438,	−0.1941
0.5530	632.00	−0.0864,	+0.2061	0.0176	728.0	−4.2452,	−0.1859

Sin embargo, cuando $T = 620°R$, que es una condición de operación inestable, las funciones de transferencia son

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma_i(s)} = \frac{K_3(7.47s+1)}{(11.3s+1)(1-11.47s)} \quad \text{y} \quad \frac{C_A(s)}{\Gamma_i(s)} = \frac{-K_2K_3}{(11.3s+1)(1-11.47s)}$$

Recuérdese que los valores de τ son los recíprocos negativos de las raíces.

Para explorar este comportamiento con mayor detalle, considérese la siguiente función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1-\tau s}$$

La respuesta a un cambio escalón en la entrada, $X(s) = 1/s$, está dada en el dominio del tiempo por

$$Y(t) = 1 - e^{t/\tau}$$

El término positivo en el exponencial indica una respuesta no acotada.

Por lo general los libros de texto de diseño de reactores (Levenspiel, 1972; Fogler, 1992) presentan el importante concepto de la estabilidad desde un punto de vista de estado estacionario; la figura 4-4.7*a* es una gráfica típica que se presenta. La figura, generada con los valores de estado estacionario de la tabla 4-4.1, muestra la gráfica de los calores generados y

removidos contra la temperatura en el reactor. Hay tres puntos (A_1, B_1 y C_1) donde ambos calores son iguales (están balanceados). Solamente dos de estos puntos, A_1 y C_1, representan condiciones de operación estables, el punto B_1 es una condición inestable. En cualquier punto a la izquierda de B_1 el calor generado es menor que el calor removido, por lo que la temperatura disminuirá en el reactor hasta que ambos calores sean iguales, lo que ocurre en el punto A_1. En cualquier punto a la derecha de B_1 el calor generado es mayor que el calor removido, por lo que la temperatura aumentará hasta que ambos calores sean iguales, lo que ocurre en el punto C_1. Alrededor del punto B_1 la temperatura se aparta rápidamente de esa condición de operación. Las temperaturas 573°R y 690°R son las condiciones estables. La figura 4-4.7*b* muestra la misma gráfica excepto porque en este caso la temperatura de entrada ha sufrido un cambio de −5°R a 573°R. La figura muestra que las nuevas condiciones estables están entre 569°R y 684°R. Los puntos A_2 y C_2 son las condiciones estables, mientras que el punto B_2 representa la condición inestable; la temperatura se aparta rápidamente del punto B_2. La figura 4-4.7*c* muestra la gráfica cuando la temperatura de entrada sufre un cambio de −10°R a 568°R. En este caso sólo hay dos condiciones en las que el calor generado y el removido son iguales. El punto A_3 representa la única condición estable; en el punto B_3 las curvas apenas se tocan, lo que indica una condición inestable. Las tres figuras muestran que para este reactor las condiciones de operación estables se "apartan" del rango de temperatura de 615°R a 670°R; las condiciones estables ocurren por debajo de 615°R o por encima de 670°R. Esta misma indicación de estabilidad se puede obtener observando las raíces de la tabla 4-4.2; a cualquier temperatura entre 615°R y 670°R hay siempre una raíz positiva, que indica un comportamiento inestable. Las raíces también indican el carácter oscilatorio del comportamiento; esta característica no se puede obtener en el análisis de estado estacionario.

En el presente ejemplo, el comportamiento inestable ocurrió cuando la temperatura disminuyó. En este caso, la condición de operación extrema alcanzada fue la de "apagar" la reacción. Sin embargo, en otras reacciones el comportamiento inestable puede ocurrir cuando la temperatura aumenta. Es decir, en estas reacciones, si la parte real positiva de las raíces persiste, entonces la temperatura en el reactor continuará aumentando, teóricamente sin límite, y la concentración continuará disminuyendo. Con mucha frecuencia, los ingenieros se refieren a este aumento rápido en la temperatura como una reacción desbocada. Pueden pasar varias cosas si esto ocurre. Si la temperatura aumenta por encima del límite máximo de seguridad para el que está diseñado el reactor, puede haber una explosión, el equipo se podría fundir u ocurrir algo parecido. *Para prevenir esta operación insegura, se deben activar con rapidez los factores de seguridad, los cuales deben tener la capacidad de detener el proceso.* Si la temperatura no llega al límite máximo de seguridad, y se deja solo, en realidad se puede alcanzar un nuevo estado estacionario. Esto ocurre porque cuando los reactivos se agotan, el calor generado llega a un límite; no continúa aumentando. En este momento, el calor removido puede ser igual al calor generado por la reacción. De ser así, se obtiene un nuevo estado estacionario; esta condición se presenta esencialmente en los puntos C_1 y C_2 en las figuras 4-4.7*a* y *b*. Un tipo de reactor donde no sería fácil que ocurriera este agotamiento es un reactor nuclear. No es fácil que las barras nucleares –o sea, el combustible– se agoten y, en consecuencia, se cuenta con muchos reactivos disponibles.

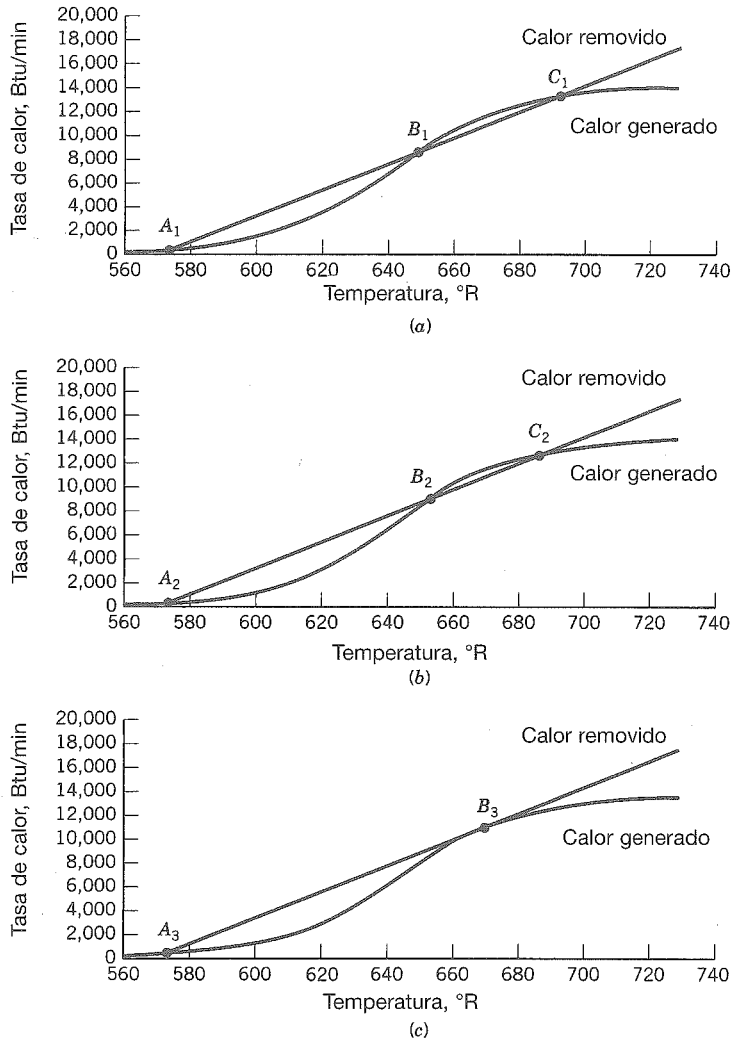


Figura 4-4.7 Análisis de estado estacionario del calor generado y removido en el reactor químico. (*a*) Temperatura de entrada de 578°R. (*b*) Temperatura de entrada de 573°R. (*c*) Temperatura de entrada de 568°R.

Los sistemas descritos por funciones de transferencia con el término $(\tau s - 1)$ o $(1 - \tau s)$ en el denominador se llaman *sistemas inestables de lazo abierto.* En ocasiones también se clasifican como *sistemas no autorregulados*, porque en tanto las raíces con partes reales positivas persistan, estos sistemas no alcanzarán una condición de estado estacionario. El ejemplo más común de este comportamiento inestable de lazo abierto es una reacción exotérmica.

El diseño de reactores químicos en los que ocurren reacciones exotérmicas es muy importante y afecta su control. Estos reactores deben tener suficiente capacidad de enfriamiento para evitar las "reacciones descontroladas", y el material de construcción tiene que soportar temperaturas muy altas para una operación segura. Sin embargo, en ocasiones se pueden presentar otras operaciones no seguras antes de llegar a una temperatura muy alta. Por ejemplo, supóngase que después de cierta temperatura se inicia una nueva reacción que produce un compuesto químico tóxico.

4-4.3 Procesos de respuesta inversa: reactor químico

En la sección 4-2.3 se estudió un reactor químico no isotérmico. Se desarrollaron varias funciones de transferencia, ecuaciones 4-2.28 a 4-2.42. En el capítulo 2 se presentó la respuesta de funciones de transferencia similares a las ecuaciones 4-2.35, 4-2.37, 4-2.38 y 4-2.40 a 4-2.42 a un cambio escalón en la función de forzamiento. En esta sección se presenta y analiza la respuesta de las ecuaciones 4-2.29, 4-2.31 y 4-2.39 al mismo tipo de función de forzamiento. Es decir, se quiere examinar la respuesta de los sistemas descritos por funciones de transferencia con el término $(\tau s - 1)$ en el numerador.

En la figura 4-4.8 se muestra la respuesta de la temperatura, ecuación 4-2.39, y de la concentración, ecuación 4-2.31, a un cambio escalón en el flujo del proceso. Es interesante notar que las dos respuestas iniciales están en la dirección contraria a la de las respuestas finales. Es

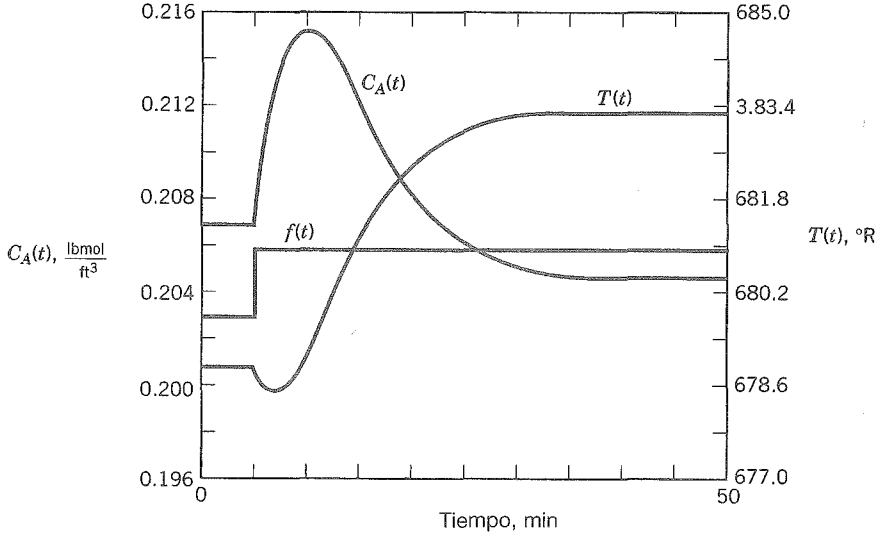


Figura 4-4.8 Respuesta inversa de la concentración y la temperatura a un cambio en el flujo de proceso de 0.15 ft^3/min.

decir, la concentración inicialmente comienza a aumentar y después disminuye. La temperatura primero tiende a disminuir y después aumenta. Este tipo de respuesta se denomina *respuesta inversa*; por supuesto, hay una explicación de este hecho. Después de observar que la temperatura del caudal de entrada es más fría que la del contenido del reactor, no es de sorprender que cuando el flujo de entrada aumenta, su efecto inicial sea reducir la temperatura del reactor. Del mismo modo, debido a que la concentración del caudal de entrada es mayor que la del reactor, el efecto inicial de un incremento en el caudal de entrada es aumentar la concentración en el reactor. El efecto de una temperatura más baja en el reactor es reducir la tasa de reacción, mientras que el efecto de una concentración más alta es aumentarla. Por tanto, la temperatura más baja y la concentración más alta representan dos efectos opuestos. La respuesta final es el resultado neto de estos efectos opuestos. Como muestra dicha figura, al final la temperatura aumenta y la concentración disminuye, indicando que la tasa de reacción aumenta hasta que se alcanza un nuevo estado estacionario.

Matemáticamente, el comportamiento de la respuesta inversa está representado por una raíz positiva en el numerador de la función de transferencia. Como se verá en el capítulo 8, las raíces del numerador de las funciones de transferencia se denominan *ceros*. La ecuación 4-2.39 tiene un cero en +0.361, debido al término $(1 - 2.77s)$, y la ecuación 4-2.31 tiene un cero en +0.0223, debido al término $(1 - 44.75s)$. Del mismo modo, por inspección de la ecuación 4-2.29 se observa que la concentración de salida, $c_A(t)$, presenta una respuesta inversa cuando la concentración de entrada, $c_{Ai}(t)$, cambia.

Como se ha señalado, la respuesta inversa se puede considerar como el resultado neto de dos efectos opuestos. Este fenómeno se puede expresar matemáticamente como dos sistemas de primer orden paralelos con ganancias de signos opuestos; esto se muestra en la figura 4-4.9. A partir de esta figura se puede obtener la siguiente función de transferencia:

$$\frac{\Gamma(s)}{F(s)} = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} - \frac{K_1}{\tau_1 s + 1}$$

$$\frac{\Gamma(s)}{F(s)} = \frac{K_2\tau_1 s + K_2 - K_1\tau_2 s - K_1}{(\tau_2 s + 1)(\tau_1 s + 1)}$$

$$\frac{\Gamma(s)}{F(s)} = \frac{(K_2\tau_1 - K_1\tau_2)s + (K_2 - K_1)}{(\tau_2 s + 1)(\tau_1 s + 1)}$$

Esta ecuación da una respuesta inversa cuando el proceso 1 reacciona más rápido que el proceso 2, es decir, $\tau_1 < \tau_2$. Además, la ganancia del proceso 2 debe ser mayor que la del proceso 1, es decir, $|K_2| > |K_1|$. Bajo estas condiciones, el numerador de la función de transferencia tiene su raíz en

$$s = -\frac{K_2 - K_1}{K_2\tau_1 - K_1\tau_2}$$

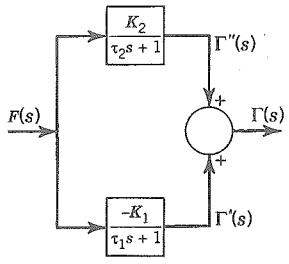


Figura 4-4.9 Explicación de la respuesta inversa.

No todos los reactores químicos presentan un comportamiento de respuesta inversa. Otros procesos comunes que muestran este tipo de respuesta son los gasificadores fluidizados de carbono, en los que el flujo del aire de combustión incrementado expande primero el lecho y después consume el material más rápido; las columnas de destilación (Buckley, *et al.*, 1975), y el nivel de agua en un colector de caldera. El control de procesos donde hay una respuesta inversa plantea un reto para el ingeniero de control (Iinoya, 1962). En el capítulo 11 se presenta el control del nivel de agua en un colector de caldera así como el control adicional que en ocasiones se utiliza para "contrarrestar" la respuesta y que lleva al desempeño del control requerido.

4-5 RESUMEN

En este capítulo se investigaron las características de estado estacionario y dinámicas de los procesos descritos por ecuaciones diferenciales de orden superior. Se presentó el desarrollo de modelos matemáticos, funciones de transferencia y diagramas de bloques de estos procesos. Se encontró que las funciones de transferencia de orden superior describen la mayoría de los procesos. Uno de los hechos examinados más importante y significativo, en lo que al control de procesos se refiere, es que a medida que el orden del sistema aumenta, el tiempo muerto aparente también aumenta. Este hecho se mostró muy claramente en la sección 4-3, figura 4-3.1. Ésta es una de las dos razones más comunes de la existencia del tiempo muerto en los procesos; la otra son los retardos de transporte, como se examinó en el capítulo 3. En la figura 4-3.1 también se muestra una importante diferencia entre la respuesta de los sistemas de primer orden y los de orden superior. En los sistemas de primer orden, la pendiente más pronunciada en la curva de respuesta a un cambio escalón en la entrada es la inicial. Éste no es el caso para los sistemas de orden superior; la pendiente más pronunciada aparece más adelante en la curva de respuesta.

En este capítulo también se presentó y se explicó el significado de los sistemas interactivos y no interactivos.

El significado de los diferentes términos que aparecen en las funciones de transferencia fue otro concepto importante que se presentó en este capítulo. El término $(\tau s + 1)$ en el denominador de una función de transferencia aumenta el orden del sistema y hace más lenta la respuesta, como se muestra en la figura 4-3.1. En este caso, a $(\tau s + 1)$ se le llama retardo de primer orden,

o simplemente retardo. Sin embargo, cuando el término ($\tau s + 1$) se encuentra en el numerador de una función de transferencia, indica una respuesta más rápida, como se muestra en la figura 4-3.2. En este caso, a ($\tau s + 1$) se le llama adelanto de primer orden, o simplemente adelanto. La presencia de un término s en el denominador de una función de transferencia indica un sistema integrante, como lo mostró la figura 4-4.1. Cuando el término ($\tau s - 1$) se encuentra en el denominador de una función de transferencia indica un sistema inestable de lazo abierto, como se muestra en la sección 4-4.2. Cuando el término ($\tau s - 1$) se encuentra en el numerador de una función de transferencia indica un comportamiento de respuesta inversa, como se observa en la sección 4-4.3.

4-6 REPASO DE LOS CAPÍTULOS 3 Y 4

Los capítulos 3 y 4 completan el tema de los tipos, comportamiento y características de los procesos. Todos los términos que describen las características de los procesos –ganancias, constantes de tiempo y tiempo muerto– se obtuvieron a partir de principios básicos, por lo general balances de masa y energía. Sin embargo, en ocasiones es difícil obtenerlos procediendo como se ha hecho en estos dos capítulos. Esto se debe principalmente a la complejidad de los procesos o a la falta de conocimiento o comprensión de algunas de las propiedades físicas o químicas. En esos casos es necesario recurrir a métodos empíricos para obtener estos términos. Algunos de esos métodos se consideran en el capítulo 7.

Como se indicó en el capítulo 3, antes de diseñar un sistema de control es necesario entender el proceso. Por tanto, ahora que se ha terminado el estudio de los procesos ya estamos listos para controlarlos. En el capítulo 5 se examinan algunos aspectos de la combinación sensor y transmisor, válvulas de control y diferentes tipos de controladores por retroalimentación. Finalmente, en el capítulo 6 y los subsecuentes se articulan entre sí todos los conceptos vistos. Se invita al lector a prepararse para capítulos interesantes y desafiantes. Los temas examinados en estos capítulos le enseñarán al lector cómo diseñar sistemas de control que le aseguren que sus procesos son seguros de operar y que, al mismo tiempo, producirán el producto de la calidad deseada a la tasa de diseño.

REFERENCIAS

1. Shinskey, F. G., *Process Control Systems,* 3a ed., Nueva York, McGraw-Hill, p. 47.
2. Levenspiel, O., *Ingeniería de las reacciones químicas,* Editorial Limusa, México, capítulo 8.
3. Fogler, H. S., *Elements of Chemical Reaction Engineering,* Englewoods Cliff, Nueva Jersey, Prentice Hall, sección 8-7.
4. Buckley, P. S., R. K. Cox y D. L. Rollins, "Inverse Response in a Distillation Column", en *Chemical Engineering Progress.*
5. Iinoya, K., y R. J. Altpeter, "Inverse Response in Process Control", en *Industrial and Engineering Chemistry.*

PROBLEMAS

4-1. Considérese el proceso que se muestra en la figura P4-1. El flujo másico del líquido que pasa por los tanques es constante a 250 lbm/min. La temperatura de entrada del líquido en el primer tanque es 75°F; la densidad del líquido se puede suponer constante en 50 lbm/ft^3; la capacidad calorífica también se puede suponer constante en 1.3 Btu/lbm-°F, y el volumen de cada tanque es 10 ft^3. Las pérdidas de calor en el ambiente son despreciables.

Se desea conocer la forma en que la temperatura de entrada, $T_i(t)$, y la transferencia de calor, $q(t)$, afectan a la temperatura de salida, $T_3(t)$. Desarrollar el modelo matemático, determinar las funciones de transferencia que relacionan $T_3(t)$ con $T_i(t)$ y con $q(t)$, y trazar

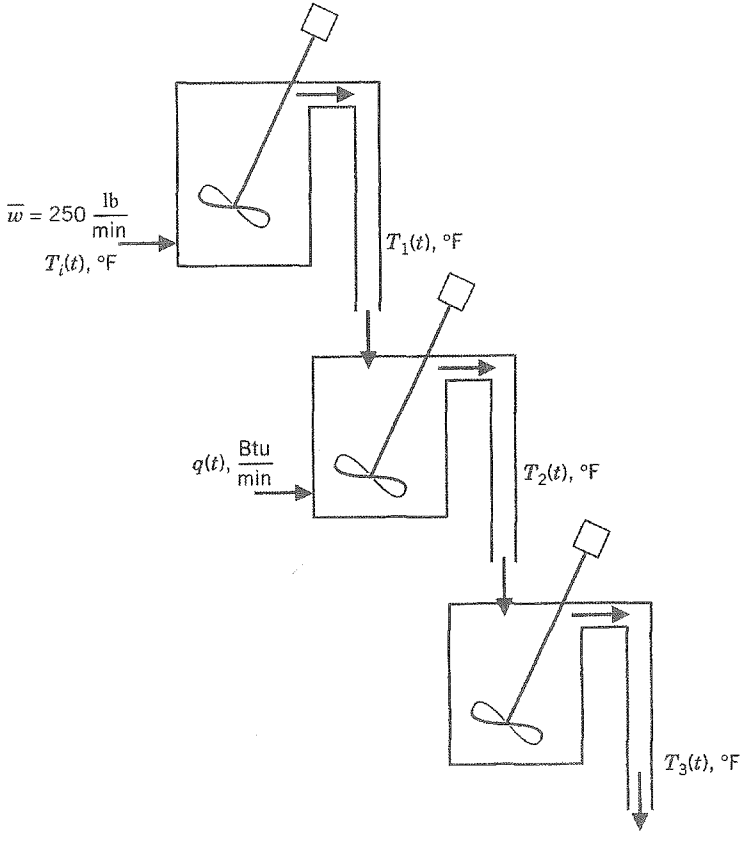


Figura P4-1 Tanques para el problema 4-1.

el diagrama de bloques para este proceso. Dar los valores numéricos y las unidades de cada parámetro en todas las funciones de transferencia.

4-2. Considérese el proceso descrito en la sección 3-6. En ese problema, la relación entre el flujo debido al ventilador y la señal al ventilador es algebraica. Esto significa que el ventilador no tiene dinámica, es decir, que el ventilador es instantáneo. En la realidad no ocurre esto. Supóngase que el ventilador tiene una dinámica tal que el flujo responde a un cambio en la señal como una respuesta de primer orden con una constante de tiempo de 10 s. Obtener la misma información que en la sección 3-5.

4-3. En el proceso que se muestra en la figura P4-2 se mezclan varios caudales. Los caudales 5, 2 y 7 son soluciones de agua con el componente A; el caudal 1 es de agua pura. En la tabla P4-1 se da el valor de estado estacionario para cada caudal. Determinar las siguientes funciones de transferencia, con el valor numérico de cada término.

$$\frac{X_6(s)}{X_5(s)}, \quad \frac{X_6(s)}{X_2(s)} \text{ y } \frac{X_6(s)}{F_1(s)}$$

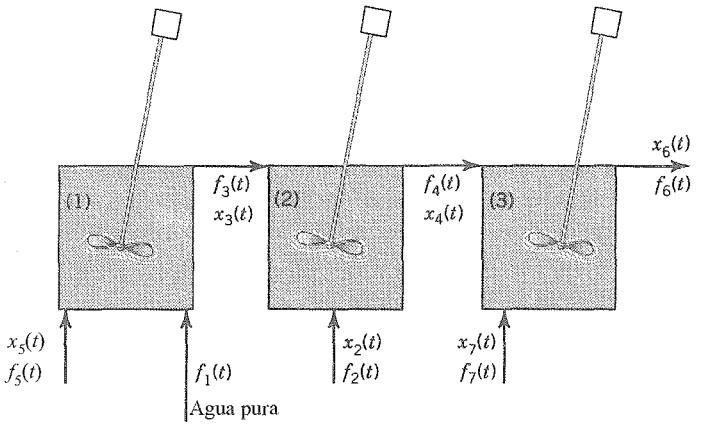


Figura P4-2 Tanques de mezclado para el problema 4-3.

4-4. La siguiente reacción elemental irreversible ocurre en el reactor que se muestra en la figura P4-3:

$$A + B \rightarrow \text{Producto}$$

La tasa de consumo del reactivo A está dada por

$$r_A(t) = -kc_A(t)c_B(t)$$

donde $r_A(t)$ es la tasa de reacción, lbmol/gal-min.

Tabla P4-1 Información y valores de estado estacionario del proceso para el problema 4-3

Información

Volúmenes del tanque: $V_1 = V_2 = V_3 = 7000$ gal

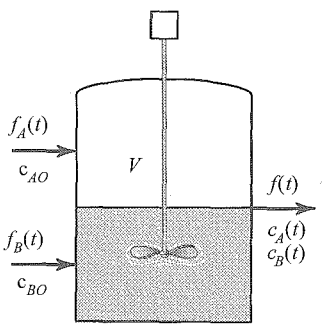
La densidad de todos los caudales puede considerarse similar y constante.

Valores de estado estacionario

Caudal	Flujo, gpm	Fracción másica
1	1900	0.000
2	1000	0.990
3	2400	0.167
4	3400	0.409
5	500	0.800
6	3900	0.472
7	500	0.900

El contenido del reactor está perfectamente mezclado y la temperatura, el volumen y la densidad de la mezcla de reacción se pueden suponer constantes.

Suponer que las concentraciones del reactivo de entrada, c_{A_o} y c_{B_o} [kmol/m^3], son constantes. Obtener las funciones de transferencia que relacionan las concentraciones de salida, $C_A(s)$ y $C_B(s)$, con los cambios en los flujos de entrada, $f_A(t)$ y $f_B(t)$ [m^3/min], y trazar el diagrama de bloques para el reactor que muestre todas las funciones de transferencia. Obtener también la función de transferencia global para $C_A(s)$ sólo en términos de las variables de entrada [sin incluir a $C_B(s)$, pero tomando en consideración la interacción entre las dos concentraciones]. Factorizar el denominador de la función de transferencia y obtener las constantes de tiempo efectivas (los recíprocos negativos de las raíces) y la ganancia de estado estacionario.



A + B → Productos

Figura P4-3 Reactor para el problema 4-4.

4-5. Considérese el tanque que se muestra en la figura P-4.4, donde un fluido se mezcla con vapor saturado a 1 atm de presión. El vapor se condensa en el líquido y el tanque está

lleno en todo momento. Los valores de estado estacionario y otra información del proceso son los siguientes:

$$\bar{f}_1 = 25 \text{ gpm}; \bar{T}_1 = 60°\text{F};$$

$$\bar{m}_2 = 3.09\frac{\text{lbm}}{\text{min}}; \bar{T}_3 = 80°\text{F}; \bar{m} = 50\%$$

$$\rho_1 = \rho_3 = 7\frac{\text{lbm}}{\text{gal}}; C_{p1} = C_{p3} = 0.8\frac{\text{Btu}}{\text{lbm-°F}};$$

Volumen del tanque = 5 gal

El flujo a través de la válvula está dado por

$$w_2(t) = 1.954 vp(t)\sqrt{\Delta P}$$

La caída de la presión a través de la válvula es constante a 10 psi. La posición de la válvula, $vp(t)$, está relacionada linealmente con la señal, $m(t)$. Cuando la señal está entre 0% y 100%, la posición de la válvula está entre 0 y 1. La dinámica de la válvula se puede expresar con una constante de tiempo de primer orden de 4 s. Desarrollar el modelo matemático y obtener las funciones de transferencia que relacionan la temperatura $T_3(t)$ con $f_1(t)$, $T_1(t)$ y $m(t)$. Asegurarse de indicar los valores numéricos y las unidades de cada ganancia, así como de las constantes de tiempo.

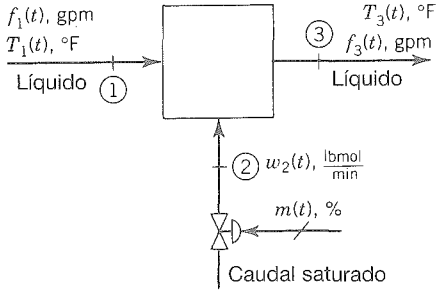


Figura P4-4 Tanque de mezclado para el problema 4-5.

4-6. En la figura P4-5 se muestra un tanque que se utiliza para la extracción continua de un soluto de una solución líquida por medio de un solvente. Una manera de modelar el extractor es, como se muestra en el diagrama de la derecha, suponiendo que hay dos fases perfectamente mezcladas: el extracto y el refino, separadas por una interfase a través de la cual el soluto se difunde a una tasa dada por

$$n(t) = K_a V[c_1(t) - c_1^*(t)]$$

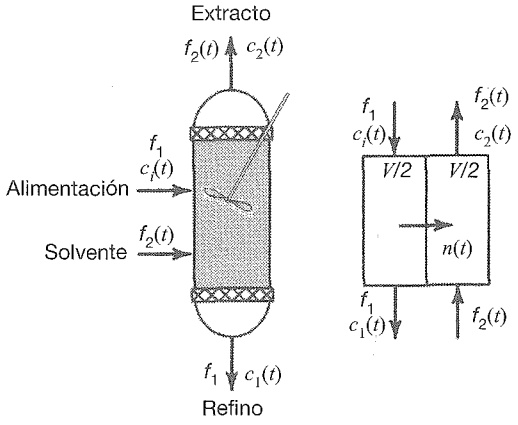


Figura P4-5 Unidad de extracción para el problema 4-6.

donde $n(t)$, kmol/s, es la tasa de transferencia de masa del soluto a través de la interfase; K_a, s^{-1}, es el coeficiente de transferencia de masa; V, m^3, es el volumen de contacto; $c_1(t)$, kmol/m^3, es la concentración del soluto en la fase de refino; y $c_1^*(t)$, kmol/m^3, es la concentración del refino que estaría en equilibrio con la fase del extracto. La relación de equilibrio se puede expresar como una línea recta

$$c_1^*(t) = mc_2(t)$$

donde m es la pendiente de la recta de equilibrio, y $c_2(t)$ es la concentración del soluto en la fase del extracto. Para simplificar, se puede suponer que el volumen de cada fase es la mitad del volumen de contacto total y que el flujo de alimentación, f_1, es constante. Las dos variables de entrada son la concentración de alimentación, $c_1(t)$, y el flujo de solvente puro, $f_2(t)$. También se puede suponer que la variación de las densidades de los caudales con la concentración es despreciable.

Desarrollar las funciones de transferencia del extractor, trazar el diagrama de bloques y obtener las funciones de transferencia globales para la composición de cada fase en términos de las variables de entrada. Factorizar el denominador de las funciones de transferencia globales del extractor y expresar las raíces en términos de los parámetros del proceso. ¿La respuesta de las concentraciones puede ser oscilatoria? ¿Puede ser inestable? Justificar las respuestas analizando las expresiones para las raíces.

4-7. En la figura P4-6 se muestra un tanque de agitación en el que el caudal de un proceso se enfría haciendo circular agua de enfriamiento por la camisa. Las variables de entrada por considerar en este proceso son el flujo del agua de enfriamiento, $f_c(t)$, m^3/min, y la temperatura de entrada del caudal del proceso, $T_i(t)$, °C. Las variables de salida de interés son las temperaturas de salida del proceso y del agua, $T(t)$ y $T_c(t)$, °C, respectivamente.

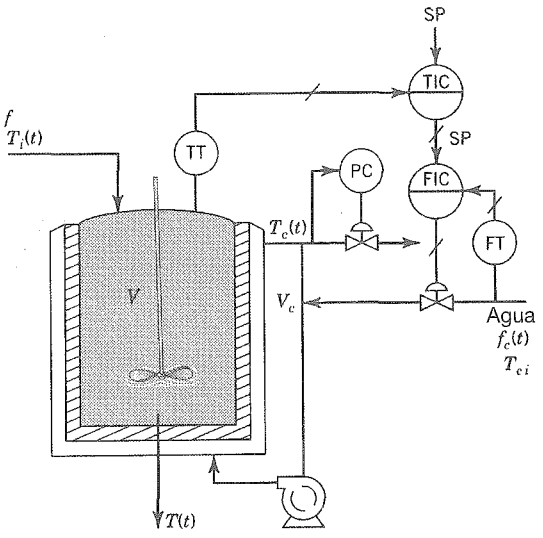


Figura P4-6 Tanque de agitación con camisa para el problema 4-7.

a) Escribir las suposiciones necesarias y deducir, a partir de principios básicos, las siguientes ecuaciones diferenciales que representan la respuesta dinámica del proceso

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{f}{V}[T_i(t) - T(t)] - \frac{UA}{V\rho C_v}[T(t) - T_c(t)]$$

$$\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{f_c(t)}{V_c}[T_{ci} - T_c(t)] + \frac{UA}{V_c\rho_c C_{v_c}}[T(t) - T_c(t)]$$

donde U, J/min-m^2-°C, es el coeficiente de transferencia de calor global y A, m^2, es el área de transferencia de calor a la camisa.

b) Obtener la transformada de Laplace de las ecuaciones (después de linealizarlas) y deducir las funciones de transferencia del proceso. Trazar el diagrama de bloques y obtener la función de transferencia global de la temperatura del fluido que sale del tanque. Factorizar el denominador de la función de transferencia global y determinar las expresiones para las raíces como funciones de los parámetros del proceso. ¿La respuesta de las concentraciones puede ser oscilatoria? ¿Puede ser inestable? Justificar las respuestas analizando las expresiones para las raíces.

4-8. Una manera de modelar mezclas imperfectas en un tanque de agitación es dividir el tanque en dos o más secciones con mezclado perfecto y con recirculación entre ellas. Supóngase que el tanque del problema 3-18 se divide en dos volúmenes, V_1 y V_2, con mezclado perfecto (de tal modo que $V_1 + V_2 = V$), como se muestra en la figura P4-7,

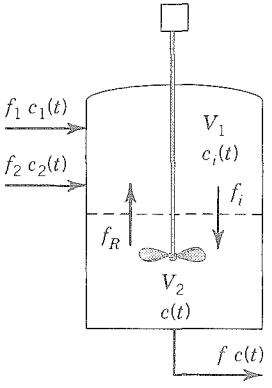


Figura P4-7 Tanque de mezclado para el problema 4-8.

donde $c_i(t)$ y $c(t)$ son las concentraciones del soluto en cada una de las dos secciones. Para simplificar, supóngase que los flujos de entrada y el de recirculación f_R, los volúmenes y la densidad son constantes. Establecer que la función de transferencia que relaciona la concentración de salida con cualquiera de las concentraciones de entrada (usar el caudal 1 como ejemplo) está dada por

$$\frac{C(s)}{C_1(s)} = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) - K_R}$$

donde:

$$K_1 = \frac{f_1}{f + f_R}, \tau_1 = \frac{V_1}{f + f_R}, \tau_2 = \frac{V_2}{f + f_R} \text{ y } K_R = \frac{f_R}{f + f_R}$$

Calcular los parámetros de la función de transferencia usando los valores numéricos dados en el problema 3-18 y suponiendo que los dos volúmenes son iguales entre sí y que el flujo de recirculación es: a) cero, b) f, c) $5f$. Para cada uno de estos casos, calcular la ganancia y las constantes de tiempo efectivas de la función de transferencia (los recíprocos negativos de las raíces del denominador). ¿A qué valores tienden las constantes de tiempo efectivas cuando el flujo de recirculación se hace muy grande? ¿Cómo se compara este resultado con el resultado del problema 3-18?

4-9. Considérense los dos reactores de tanque en serie con agitación y reciclado de la figura P4-8. Se puede suponer lo siguiente:

- Cada reactor está perfectamente mezclado y la temperatura es constante.
- Los volúmenes de los reactores, V_1 y V_2, son constantes, al igual que la densidad de la mezcla de reacción.

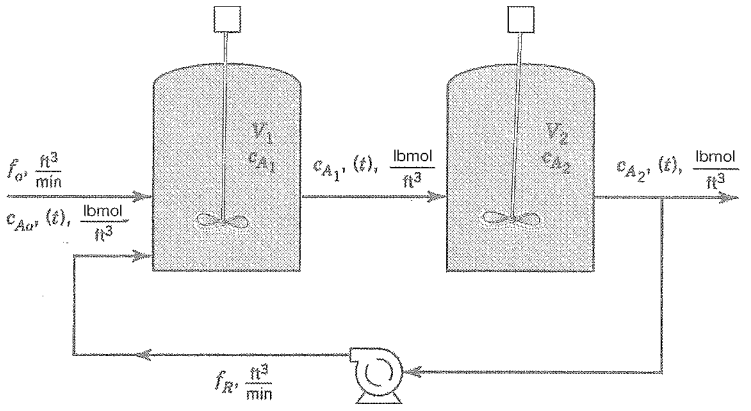


Figura P4-8 Reactores en serie para el problema 4-9.

- El flujo que entra al primer reactor, f_o, y el flujo de reciclado, f_R, son constantes.
- La reacción química es elemental de primer orden, por lo que la tasa de reacción está dada por la expresión:

$$r_A = kc_A(t), \text{ lbmol/ft}^3\text{-min}$$

donde:

$c_A(t)$ = concentración del reactivo A, lbmol/ft^3.
k = coeficiente de la tasa de reacción constante, min^{-1}.

- Los reactores inicialmente están en estado estacionario y con una concentración de entrada c_{A_o}.
- El retardo de transporte entre los reactores y en la tubería de reciclado es despreciable.

a) Determinar las funciones de transferencia del proceso.
b) Trazar el diagrama de bloques para los dos reactores.
c) Usar el álgebra de los diagramas de bloques para determinar la función de transferencia $\dfrac{C_{A_2}(s)}{C_{A_o}(s)}$ para los dos reactores.
d) Determinar la ganancia y las constantes de tiempo efectivas de esta función de transferencia, en términos de los parámetros del sistema: V_1, V_2, f_o, f_R y k.
e) Responder las siguientes preguntas:

   i) ¿El sistema puede ser inestable (constantes de tiempo efectivas negativas)?
   ii) ¿La respuesta de la composición puede ser subamortiguada (constantes de tiempo efectivas complejas conjugadas)?

iii) ¿En qué se convierten las constantes de tiempo efectivas cuando el flujo de reciclado, f_R, se hace mucho mayor que el flujo de entrada, f_o?

4.10. Considérense los dos tanques de gas de la figura P4-9. Se puede suponer que el gas es isotérmico y que se comporta como un gas ideal, de modo que la densidad en cada tanque es proporcional a la presión en el tanque por la fórmula siguiente:

$$\rho(t) = \frac{Mp(t)}{RT}$$

donde:

$\rho(t)$ = densidad del gas, lb/ft^3
M = peso molecular del gas, lb/lbmol
R = constante del gas ideal, 10.73 ft^3-psia/lbmol-°R
T = temperatura del gas, °R
$p(t)$ = presión en el tanque, psia

El gas llena completamente los volúmenes de los tanques, que son constantes.

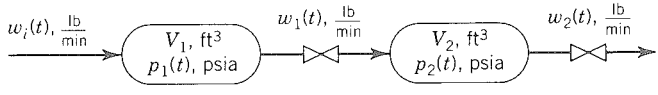


Figura P4-9 Tanques de gas para el problema 4-10.

a) *Flujo crítico (estrangulado) a través de las válvulas.*

Si se supone que el flujo (en lbm/min) a través de las válvulas es crítico o "estrangulado", entonces será proporcional a la presión corriente arriba para cada válvula

$$w_1(t) = k_{v_1} p_1(t) \quad w_2(t) = k_{v_2} p_2(t)$$

donde k_{v_1} y k_{v_2} son coeficientes constantes de las válvulas, (lb/min)/psia, que dependen de la capacidad de la válvula, de la gravedad específica del gas, de la temperatura y del diseño de la válvula. El flujo estrangulado se examina en detalle en el apéndice C.

Obtener las funciones de transferencia que relacionan la presión en cada tanque con el flujo de entrada al primer tanque. Trazar un diagrama de bloques donde se indiquen las presiones. Si hubiera n tanques idénticos en serie, todos ellos con el mismo volumen y todas las válvulas con el mismo coeficiente de la válvula, ¿cuál sería la función de transferencia que relaciona la presión en el último tanque con el flujo que entra en el primer tanque, $P_n(s)/W_i(s)$?

b) *Flujos subcríticos a través de las válvulas.*

Si los flujos a través de las válvulas son subcríticos, están dados por

$$w_1(t) = k_{v1}\sqrt{p_1(t)[p_1(t) - p_2(t)]}$$
$$w_2(t) = k_{v2}\sqrt{p_2(t)[p_2(t) - p_3]}$$

donde los coeficientes de las válvulas k_{v_1} y k_{v_2} no son numéricamente los mismos que para el flujo crítico, y la presión de descarga p_3 se puede suponer constante.

Obtener la función de transferencia que relaciona la presión en cada tanque con el flujo de entrada al primer tanque. Trazar el diagrama de bloques para los tanques donde se indique la función de transferencia de cada bloque. Escribir la función de transferencia global, $P_2(s)/W_i(s)$, y las fórmulas para las constantes de tiempo efectivas y para las ganancias de estado estacionario de las funciones de transferencia en términos de los parámetros del proceso. *Nota:* las constantes de tiempo efectivas se definen como los recíprocos negativos de las raíces del denominador de la función de transferencia global.

4.11. Considérese el proceso que se muestra en la figura P4-10. Se sabe lo siguiente acerca del proceso:

- La densidad de todos los caudales es aproximadamente la misma.
- El flujo a través de la bomba de velocidad constante está dada por

$$f(t) = A[1 + B\{p_1(t) - p_2(t)\}^2], \text{ m}^3/\text{s}$$

donde A y B son constantes.

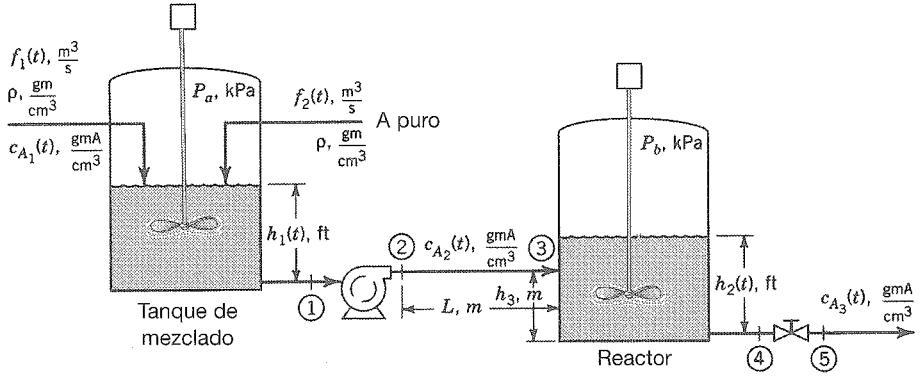


Figura P4-10 Proceso para el problema 4-11.

- La tubería entre los puntos 2 y 3 es bastante larga, con una longitud de L, m. El flujo a través de esta tubería es altamente turbulento (flujo pistón). El diámetro de la tubería es D, m. La caída de presión entre los puntos 2 y 3 es constante con un valor de ΔP, kPa.
- Se puede suponer que los efectos de energía asociados con la reacción (A → B) son despreciables y, en consecuencia, la reacción ocurre a una temperatura constante. La tasa de reacción está dada por

$$r_A(t) = kc_A(t), \text{ kg/m}^3\text{-s}$$

- El flujo a través de la válvula de salida está dado por

$$f(t) = C_v\sqrt{h_2(t)}$$

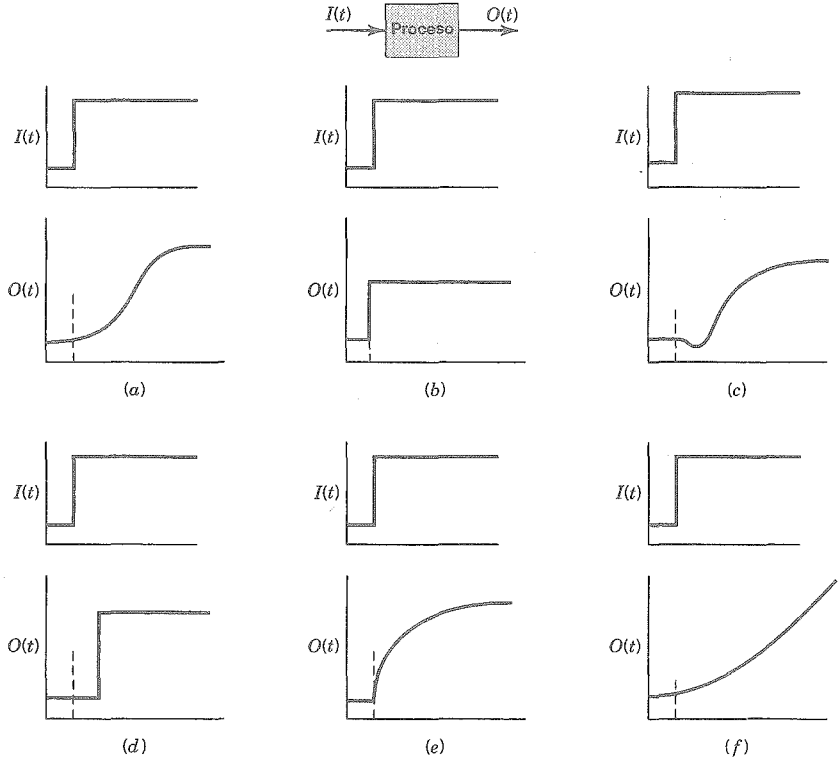


Figura P4-11 Respuestas del proceso para el problema 4-12.

Desarrollar el modelo matemático y trazar el diagrama de bloques que muestre el efecto de las funciones de forzamiento $f_2(t)$ y $C_{A1}(t)$ sobre las variables de respuesta $h_1(t)$, $h_3(t)$ y $c_{A_3}(t)$.

4-12. En la figura P4-11 se muestra la respuesta de diferentes procesos a un cambio escalón en la entrada. Dar una indicación de la(s) posible(s) función(es) de transferencia para cada proceso.

4-13. Considérese el reactor químico presentado en la sección 4-4.2. En la figura 4-4.6 de dicha sección se muestra la respuesta de la temperatura en el reactor a los cambios (decrementos) en la temperatura de entrada. ¿Cuál sería la respuesta –estable o no, oscilatoria o no– a un aumento en la temperatura de entrada?

Capítulo
5

Componentes básicos de los sistemas de control

En el capítulo 1 se presentaron los tres componentes básicos de un sistema de control: sensor-transmisor, controlador y elemento final de control. En ese capítulo se vio que esos tres componentes realizan las tres operaciones básicas de cualquier sistema de control: medición (M), decisión (D) y acción (A).

En este capítulo se presenta una breve descripción de la combinación sensor-transmisor, el componente M, seguida de un estudio más detallado de las válvulas de control, el componente A, y de los controladores por retroalimentación, el componente D. En el apéndice C se presentan numerosos diagramas, esquemas y otras figuras para hacer más clara la presentación de los diferentes tipos de sensores, transmisores y válvulas de control. De esta manera, el apéndice C complementa este capítulo y se le recomienda al lector leerlo junto con éste.

5-1 SENSORES Y TRANSMISORES

El sensor produce un fenómeno –mecánico, eléctrico o similar– relacionado con la variable del proceso que mide. El transmisor convierte a su vez este fenómeno en una señal que se puede transmitir. Por lo tanto, el propósito del conjunto sensor-transmisor es generar una señal, la salida del transmisor, que está relacionada con la variable del proceso. Idealmente esta relación debería ser lineal; es decir, la señal de salida del transmisor debería ser proporcional a la variable del proceso. En general éste es el caso, como, por ejemplo, en los transmisores de presión, nivel y en algunos transmisores de temperatura, como los dispositivos resistivos de temperatura (RTD, por sus siglas en inglés). En otras situaciones, la salida del transmisor es una función no lineal conocida de la variable del proceso, como, por ejemplo, termopares y medidores de flujo de placa de orificio.

Existen tres términos importantes relacionados con el conjunto sensor-transmisor. El *rango* del instrumento está dado por el intervalo entre los valores más bajo y más alto de la variable

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

del proceso que se mide. Considérese un sensor-transmisor de presión que se ha calibrado para medir la presión de un proceso entre los valores de 20 psig y 50 psig. Se dice entonces que el rango de este conjunto sensor-transmisor es de 20 a 50 psig. La escala (*span*) del instrumento es la diferencia entre los valores máximo y mínimo del rango. Para el transmisor de presión que se ha descrito, la escala es 30 psi. Es común referirse al valor menor del rango como el *cero* del instrumento. Este valor no tiene que ser cero para ser llamado el cero del instrumento. En el ejemplo en cuestión, el cero del instrumento es 20 psig.

En el apéndice C se presentan algunos de los sensores industriales más comunes: de presión, flujo, temperatura y nivel. En ese apéndice también se examinan brevemente los principios de operación de un transmisor eléctrico y de un transmisor neumático.

Figura 5-1.1 Diagrama de bloques de un conjunto sensor-transmisor.

La función de transferencia del conjunto sensor-transmisor relaciona su señal de salida con su entrada, que es la variable del proceso; lo anterior se ilustra en la figura 5-1.1. La forma más simple de la función de transferencia es un retardo de primer orden

$$H(s) = \frac{C(s)}{PV(s)} = \frac{K_T}{\tau_T s + 1} \tag{5-1.1}$$

donde:

K_T = ganancia del transmisor
τ_T = constante de tiempo del transmisor.

Cuando la relación entre la salida del transmisor, $C(s)$ en %TO, y la variable del proceso, PV, es lineal, resulta sencillo obtener la ganancia una vez que se conoce la escala. Considérese un transmisor electrónico de presión con un rango de 0 a 200 psig. En la figura 5-1.2 se muestra un diagrama que ilustra la relación entre la salida del transmisor y la variable del proceso. Por la definición de ganancia del capítulo 3, la ganancia del transmisor se puede obtener considerando el cambio total en la salida sobre el cambio total en la entrada, que es la escala del transmisor,

$$K_T = \frac{(20-4)\text{ mA}}{(200-0)\text{ psig}} = \frac{16\text{ mA}}{200\text{ psig}} = 0.08\text{ mA/psig}$$

o, en porcentaje de salida del transmisor (%TO),

$$K_T = \frac{(100-0)\%\text{TO}}{(200-0)\text{ psig}} = 0.5\%\text{TO/psig}$$

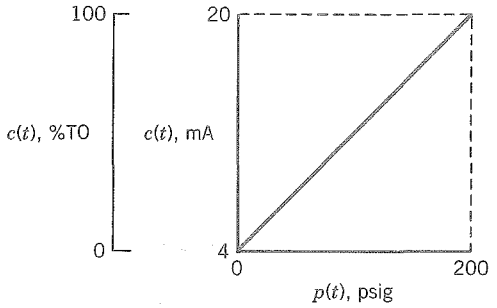


Figura 5-1.2 Transmisor de presión electrónico lineal.

Por tanto, la ganancia de un sensor-transmisor es la relación entre la escala de la señal de salida y la escala de la variable medida.

En el ejemplo anterior se supuso que la ganancia del sensor-transmisor es constante en todo el rango de operación. Esto es cierto para la mayoría de los sensores-transmisores, pero en algunos casos, como cuando se usa un sensor de presión diferencial para medir un flujo, esto no se cumple. Un sensor de presión diferencial mide la caída de presión, h, a través de un orificio. Idealmente esta presión diferencial es proporcional al cuadrado del flujo volumétrico, f. Es decir,

$$f^2 \propto h$$

La ecuación que describe la señal de salida, en por ciento, de un transmisor de presión diferencial cuando se utiliza para medir un flujo volumétrico con un rango de $0 - f_{máx}$ gpm es

$$c = \frac{100}{(f_{máx})^2} f^2$$

donde:

c = señal de salida, %TO
f = flujo volumétrico.

A partir de esta ecuación se obtiene la ganancia local del transmisor como sigue:

$$K_T = \frac{dc}{df} = \frac{2(100)}{(f_{máx})^2} f$$

Si el transmisor fuera lineal, su ganancia sería

$$K_T' = \frac{100}{f_{máx}}$$

La expresión para K_T indica que la ganancia no es constante sino una función del flujo. A mayor flujo, mayor ganancia. Específicamente,

cuando $\left(\frac{f}{f_{\text{máx}}}\right)$	0	0.1	0.5	0.75	1.0
$\left(\frac{K_T}{K'_T}\right)$	0	0.2	1.0	1.50	2.0

De modo que la ganancia real varía de cero al doble de lo que sería la ganancia si el transmisor fuera lineal. Este hecho da lugar a no linealidades en los sistemas de control de flujo. La mayoría de los fabricantes ofrecen transmisores de presión diferencial con bloques de raíz cuadrada incorporados que permiten obtener un transmisor lineal. Asimismo, la mayoría de los sistemas de control distribuido modernos ofrecen el cálculo automático de raíz cuadrada de las señales. Esto hace que la combinación sensor-transmisor-raíz cuadrada sea lineal con una ganancia de $100/f_{\text{máx}}$. En el capítulo 10 se analiza con mayor detalle el uso de bloques de cálculo de raíz cuadrada.

Los parámetros dinámicos por lo general se obtienen empíricamente utilizando métodos similares a los que se presentan en los capítulos 6 y 9, o son suministrados por los fabricantes. Para un ejemplo en el que la constante de tiempo se puede estimar a partir de principios básicos, ver el problema 3-4. Algunos sensores-transmisores de análisis, como los cromatógrafos, presentan tiempo muerto debido al tiempo requerido para el análisis y la operación de muestreo.

5-2 VÁLVULAS DE CONTROL

Las válvulas de control son los elementos de control final más comunes. Realizan la función de acción (A) del sistema de control al ajustar los flujos que afectan a las variables controladas. En esta sección se presentan los aspectos más importantes de las válvulas de control: la selección de su acción y posición de falla, su capacidad y dimensionamiento, sus características de flujo, su ganancia y su función de transferencia. En el apéndice C se presentan diferentes tipos de válvulas y sus accesorios. Se le recomienda enfáticamente al lector que lea el apéndice C junto con esta sección.

Una válvula de control actúa como una restricción variable en la tubería de un proceso. Al cambiar su abertura, cambia la resistencia al flujo y, por consiguiente, cambia el flujo en sí mismo. Estrangular flujos es lo único que hacen las válvulas de control. La señal de salida del controlador posiciona la válvula, determinando la abertura de la válvula que a su vez determina el grado de restricción al flujo. Por consiguiente, la señal de salida del controlador es la entrada a la válvula y el flujo es la salida de la válvula.

5-2.1 El actuador de la válvula de control

La figura 5-2.1*a* es una vista esquemática de la instrumentación de una válvula de control. Incluso en la instrumentación electrónica, un actuador de presión de aire es el mecanismo más común para ajustar la posición de las válvulas de control debido a su gran confiabilidad y poco

mantenimiento requerido. Cuando la señal del controlador está entre 4 mA y 20 mA, se requiere un transductor de corriente a presión, identificado como I/P en la figura 5-2.1*a*, para convertir la señal de corriente eléctrica en presión de aire. El transductor, sin embargo, no modifica la señal y puede omitirse en un diagrama conceptual, figura 5-2.1*b*. En este diagrama, la señal del controlador $m(t)$ se expresa en un porcentaje de la salida del controlador (%CO, por sus siglas en inglés), en lugar de mA o psig.

El actuador de la válvula de control consiste en un diafragma y un resorte, con el diafragma fijado al vástago, el cual posiciona la restricción del flujo en el cuerpo de la válvula. En la figura 5-2.1 se muestran estas partes de la válvula y en el apéndice C se presentan imágenes de varios tipos de válvulas de control con detalles adicionales de sus partes.

El actuador, como se muestra en la figura 5-2.1*b*, convierte la salida del controlador, $m(t)$, en la posición de la válvula, $vp(t)$. La posición de la válvula suele expresarse como una fracción que varía entre cero y uno. Cuando la posición de la válvula es cero, la válvula está cerrada y el flujo es cero. En el otro extremo, cuando la posición de la válvula es uno, la válvula está completamente abierta y el flujo es máximo. Para un actuador de válvula de rango completo, un cambio de 1% en la salida del controlador produce un cambio de 0.01 en la posición fraccionaria de la válvula. La mayoría de las válvulas de control utilizan actuadores de rango completo.

Acción de la válvula de control

La primera pregunta que debe hacerse un ingeniero cuando especifica una válvula de control es: ¿qué quiero que haga la válvula cuando falle el suministro de energía? Esta pregunta se refiere a la "posición" o "acción de falla" de la válvula. La consideración principal al responder esta pregunta es, o debería ser, la seguridad. Cuando la posición más segura de la válvula es cerrada, el ingeniero debe especificar una válvula "cerrada en falla" (FC, por sus siglas en inglés). Este tipo de válvula requiere energía para abrirse y también se llama "de aire para abrir" (AO, por sus siglas en inglés). La otra posibilidad es una válvula "abierta en falla" (FO, por sus siglas en inglés). Las válvulas abiertas en falla requieren energía para cerrarse y se denominan válvulas "de aire para cerrar" (AC, por sus siglas en inglés).

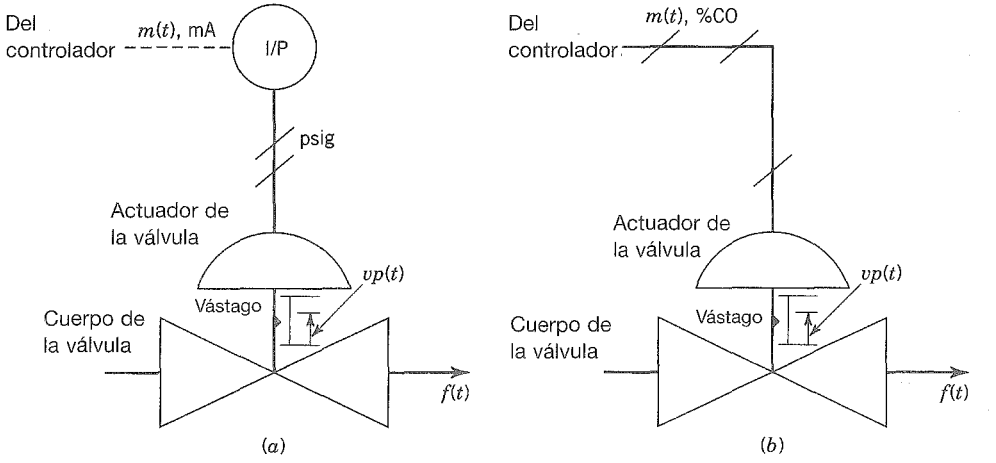


Figura 5-2.1 Diagrama esquemático de instrumentación para una válvula de control. (*a*) Detallado. (*b*) Simplificación conceptual.

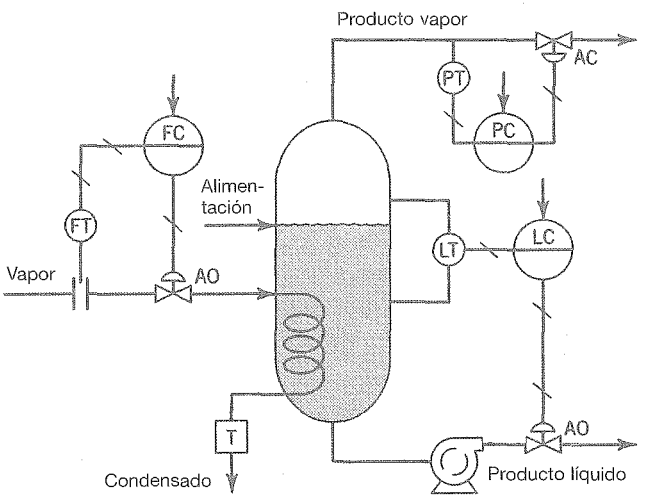


Figura 5-2.2 Posiciones de falla de válvulas de control en un tanque de separación.

Para ilustrar la selección de la acción de las válvulas de control, considérese el tanque de separación de la figura 5-2.2. El vapor se condensa en un serpentín para vaporizar parcialmente la carga líquida y separar sus componentes en dos productos: vapor y líquido. En este ejemplo hay tres válvulas: una en la línea de vapor que llega al serpentín y una en cada una de las líneas del producto (vapor y líquido). La válvula del producto líquido controla el nivel en el tanque, y la válvula que está en la línea del producto vapor controla la presión en el tanque. La pregunta es: ¿qué se quiere que haga cada una de estas válvulas si el suministro de aire o electricidad falla? Como se explicó anteriormente, cada válvula debe moverse a su posición más segura cuando la energía eléctrica o la presión de aire fallen. La posición más segura para la válvula de vapor es la cerrada, porque se evita así que un alto flujo de vapor vaporice todo el líquido y sobrecaliente el serpentín. Por consiguiente, se selecciona una válvula cerrada en falla (FC) o de aire para abrir (AO) para la línea de vapor. Para la válvula del producto líquido, una válvula cerrada en falla o de aire para abrir mantendría el líquido almacenado en el tanque. Esta acción le da al operador tiempo suficiente para cerrar la alimentación al tanque y corregir la causa de la falla. Pocas veces es seguro que el producto líquido fluya sin control corriente abajo del proceso. Finalmente, una válvula abierta en falla (FO) o de aire para cerrar (AC) en la línea del producto vapor permitiría al vapor fluir fuera del tanque evitando una presurización excesiva.

Es importante notar que en este ejemplo sólo se han considerado las condiciones de seguridad alrededor del tanque se separación. Ésta puede no ser necesariamente la operación más segura del proceso. La seguridad del proceso global requiere considerar también el efecto de cada flujo en los equipos corriente arriba y corriente abajo. Por ejemplo, cuando la válvula del producto vapor se abre en falla, puede darse una condición no segura en el proceso que recibe el vapor. Si esto ocurre, la válvula debe cerrarse en falla. Entonces el ingeniero debe incluir en el diseño una válvula de alivio de presión separada para enviar los vapores a un sistema de desfogue apropiado. La selección de la posición de falla de las válvulas de control es

parte del procedimiento conocido como análisis de riesgos (HazAn, por sus siglas en inglés). Equipos de ingenieros llevan a cabo tal procedimiento en la etapa de diseño del proceso.

Es importante tener presente que la seguridad es la única consideración al seleccionar la acción de la válvula de control. Como se verá en la siguiente sección, la acción de la válvula de control afecta directamente la acción del controlador por retroalimentación.

La acción de la válvula determina el signo de la ganancia de la válvula. Una válvula de aire para abrir tiene una ganancia positiva, y una válvula de aire para cerrar tiene una ganancia negativa. Esto se observa con facilidad a partir de las fórmulas siguientes que relacionan la posición de la válvula con la salida del controlador.

$$\text{Aire para abrir} : \overline{vp} = \frac{\bar{m}}{100}$$

$$\text{Aire para cerrar} : \overline{vp} = 1 - \frac{\bar{m}}{100}$$

Estas fórmulas relacionan los valores de estado estacionario de las variables. No consideran la respuesta dinámica del actuador.

5-2.2 Capacidad y dimensionamiento de la válvula de control

El propósito de la válvula de control es regular el flujo manipulado en el sistema de control. Para regular el flujo, la capacidad de flujo de la válvula de control varía desde cero cuando la válvula está cerrada hasta un máximo cuando la válvula está completamente abierta, es decir, cuando la posición fraccionaria de la válvula es igual a uno. En esta subsección se estudian las fórmulas suministradas por los fabricantes de válvulas para estimar la capacidad de flujo de las válvulas de control y dimensionar una válvula para una aplicación dada para empezar a usarlas. En la siguiente subsección se examina cómo la capacidad de la válvula depende de su posición.

De acuerdo con una convención adoptada por todos los fabricantes de válvulas de control, la capacidad de flujo de una válvula de control está determinada por su factor de capacidad o coeficiente de flujo, C_v, introducido en 1944 por Masoneilan International, Inc. (referencia 2). Por definición, el coeficiente C_v es "el flujo en galones estadounidenses por minuto (gpm) de agua que fluye a través de una válvula con una caída de presión de 1 psi a través de la misma". Por ejemplo, una válvula con un coeficiente C_v de 25 puede entregar 25 gpm de agua cuando tiene una caída de presión de 1 psi. Los catálogos de válvulas presentan los coeficientes C_v organizados por tipo y tamaño de válvula. Las figuras C-10.1*a* a C-10.1*c* contienen muestras de valores de catálogos de válvulas.

Aplicaciones con líquido

Una válvula de control es simplemente un orificio con un área de flujo variable. El coeficiente C_v y los principios básicos de regulación del flujo a través de un orifico proporcionan la siguiente fórmula para el flujo de líquido a través de la válvula

$$f = C_v \sqrt{\frac{\Delta p_v}{G_f}} \qquad \textbf{(5-2.1)}$$

donde:

f = flujo líquido, gpm EE.UU.
Δp_v = caída de presión a través de la válvula, psi
G_f = gravedad específica del líquido en las condiciones de flujo.

Una simple conversión de unidades en la ecuación 5-2.1 permite obtener el flujo másico a través de la válvula en lb/h:

$$w = \left(f \frac{\text{gal}}{\text{min}} \right) \left(60 \frac{\text{min}}{\text{h}} \right) \left(8.33 G_f \frac{\text{lb}}{\text{gal}} \right) = 500 C_v \sqrt{G_f \Delta p_v} \qquad \textbf{(5-2.2)}$$

donde w es el flujo másico en lb/h y 8.33 lb/gal es la densidad del agua.

Hay varias otras consideraciones –como las correcciones para fluidos muy viscosos así como la separación instantánea y la cavitación– en la determinación del flujo que pasa a través de válvulas de control en aplicaciones con líquidos. Estas consideraciones se estudian en el apéndice C.

Flujo compresible

Diferentes fabricantes han desarrollado distintas fórmulas para modelar el flujo de fluidos compresibles –gases, vapores y vapor de agua– a través de sus válvulas de control. Aunque se presentan aquí las fórmulas para flujos compresibles propuestas por Masoneilan (referencia 2), hay otros fabricantes que comercializan válvulas de control de buena calidad, incluyendo Fisher Controls, Crane Company, DeZurik, Foxboro y Honeywell entre otros. Se escogió a Masoneilan porque sus ecuaciones y métodos son típicos en la industria.

Aunque las ecuaciones para flujos compresibles parecen ser muy diferentes de las ecuaciones para líquidos, es importante notar que se deducen de las ecuaciones para líquidos. Tan sólo contienen los factores de conversión de unidades y las correcciones para temperatura y presión, que afectan la densidad de un gas. Es importante tener presente que el coeficiente C_v de una válvula es el mismo que se usa para flujo de líquido o gas.

Masoneilan (referencia 2) propone la siguiente ecuación para flujo de gas o vapor en pies cúbicos por hora, en condiciones estándar de una atmósfera y a 60°F,

$$f_s = 836 C_v C_f \frac{p_1}{\sqrt{GT}} (y - 0.148 y^3) \qquad \textbf{(5-2.3)}$$

donde:

f_s = flujo de gas en scfh (scfh = ft^3/h en condiciones estándar de 14.7 psia y 60°F)
G = gravedad específica del gas con respecto al aire, calculada dividiendo el peso molecular del gas entre 29, el peso molecular promedio del aire

T = temperatura a la entrada de la válvula, °R(= °F + 460)
C_f = factor de flujo crítico. El valor numérico de este factor varía entre 0.6 y 0.95. En la figura C-10.4 se muestra este factor para diferentes tipos de válvulas.
p_1 = presión a la entrada de la válvula, psia.

En condiciones estándar de 1 atm y 60°F, la densidad de un gas o vapor está dada por su peso molecular promedio en lb dividido entre 380 ft^3. De esta manera, el flujo másico a través de la válvula es

$$w = \left(f_s \frac{\text{scf}}{\text{h}}\right)\left(M_w \frac{\text{lb}}{\text{lbmol}}\right)\left(\frac{1\ \text{lbmol}}{380\ \text{scf}}\right) \tag{5-2.4}$$

donde w es el flujo de gas en lb/h y M_w lb/lbmol es el peso molecular promedio del gas.

El término y expresa los efectos de compresibilidad en el flujo y está definido por

$$y = \frac{1.63}{C_f}\sqrt{\frac{\Delta p_v}{p_1}} \tag{5-2.5}$$

donde:

$\Delta p_v = p_1 - p_2$, la caída de presión a través de la válvula, psi
p_2 = presión a la salida de la válvula, psia.

y y tiene un valor máximo de 1.5. Para relaciones bajas entre la caída de presión y la presión de entrada, el flujo de gas es aproximadamente incompresible y proporcional a la raíz cuadrada de la caída de presión a través de la válvula. Las fórmulas concuerdan con este hecho, pues para valores pequeños de y, la función $y - 0.148y^3$ está muy próxima a y. A medida que la relación entre la caída de presión y la presión de entrada aumenta, el flujo a través de la válvula se estrangula debido a que la velocidad del gas se acerca a la velocidad del sonido, que es la máxima que puede alcanzar. Bajo esta condición, conocida como *flujo crítico,* el flujo se vuelve independiente de la presión de salida y de la caída de presión a través de la válvula. Las fórmulas también concuerdan con este hecho, pues a medida que y se aproxima a su valor máximo de 1.5, la función $y - 0.148y^3$ tiende a 1.0. Cuando esto ocurre, el flujo se vuelve proporcional a la presión corriente arriba, p_1.

El factor de flujo crítico C_f es un factor empírico que explica el perfil de la presión en la válvula cuando el flujo se vuelve crítico. Nótese que se cancela para relaciones bajas entre la caída de presión y la presión de entrada cuando el término $0.148y^3$ es despreciable. Como se muestra en la figura C-10.4, el factor C_f depende del tipo de válvula e incluso de la dirección del flujo. Esto se debe a que los patrones de flujo en la válvula afectan el perfil de la presión y, por consiguiente, la densidad del gas.

Ejemplo 5-2.1 ***Flujo de líquido y gas a través de una válvula de control.*** Por la figura C-10.1*a*, una válvula Masoneilan de 3 pulg con rango completo tiene un factor de capacidad de 110 gpm/(psi)$^{1/2}$ cuando está completamente abierta. La caída de presión a través de la válvula es 10 psi.

a) Calcular el flujo de una solución líquida con densidad 0.8 g/cm^3 (la densidad del agua es 1 g/cm^3),
b) Calcular el flujo de un gas con peso molecular promedio de 35 cuando las condiciones de entrada a la válvula son 100 psig y 100°F.

Solución a) Para la solución líquida, utilizando la ecuación 5-2.1,

$$f = 110\sqrt{\frac{10}{0.8}} = 389 \text{ gpm}$$

o, en unidades de masa,

$$w = (500)(110)\sqrt{(0.8)(10)} = 155{,}600 \text{ lb/h}$$

b) Para el gas, con $M_w = 35$, $G = 35/29 = 1.207$, presión de entrada $p_1 = 100 + 14.7 = 114.7$ psia, $T = 100 + 460 = 560$°R, suponiendo que $C_f = 0.9$ y usando las ecuaciones 5-2.5 y 5-2.3,

$$y = \frac{1.63}{0.9}\sqrt{\frac{10}{114.7}} = 0.535$$

$$f_s = 836(110)(0.9)\frac{114.7}{\sqrt{(1.207)(560)}}[0.535 - 0.148(0.535)^3]$$

$$= 187{,}000 \text{ scfh}$$

En unidades de flujo másico, utilizando la ecuación 5-2.4,

$$w = \left(187{,}000\frac{\text{scf}}{\text{h}}\right)\left(35\frac{\text{lb}}{\text{lbmol}}\right)\left(\frac{1 \text{ lbmol}}{380 \text{ scf}}\right) = 17{,}200\frac{\text{lb}}{\text{hr}}$$

Dimensionamiento de válvulas de control

Parte del trabajo de un ingeniero de control es dimensionar válvulas de control para una aplicación dada. Las fórmulas presentadas hasta ahora en esta sección, aunque son útiles para estimar el flujo a través de una válvula, se desarrollaron para dimensionar válvulas de control. Para dimensionar una válvula de control para una aplicación con líquido es necesario conocer el flujo a través de la válvula, la caída de presión a través de la válvula y la gravedad específica

del líquido. Para un flujo compresible, los datos adicionales requeridos son la presión y la temperatura de entrada, así como el peso molecular promedio del fluido. Con esta información, el ingeniero deberá usar la fórmula apropiada provista por el fabricante específico de la válvula para calcular el coeficiente C_v. Las fórmulas serán muy similares a las que se presentan aquí, ecuaciones 5-2.1 a 5-2.5. Una vez que se conoce el coeficiente C_v, el ingeniero selecciona en el catálogo del fabricante una válvula que sea lo suficientemente grande para la aplicación. En general, el valor calculado de C_v queda entre dos tamaños de válvula diferentes, en cuyo caso deberá seleccionarse el más grande. Las tablas provistas por los fabricantes de válvulas son muy similares a las que se presentan en la figura C-10.1 (apéndice C).

Cuando se dimensiona una válvula para una nueva aplicación, el flujo se obtiene de las condiciones de diseño en estado estacionario del proceso. Éste es el flujo a través de la válvula a la tasa de producción nominal del proceso. A este flujo se le llamará el flujo nominal a través de la válvula y se denota $\overline{f}$. La caída de presión a través de la válvula en flujo nominal es la que se usa para dimensionar la válvula. Por ejemplo, la fórmula para dimensionar una válvula para una aplicación con líquido es, por la ecuación 5-2.1,

$$\overline{C_v} = \overline{f}\sqrt{\frac{G_f}{\overline{\Delta p_v}}}$$

donde $\overline{\Delta p_v}$ es la caída de presión a través de la válvula (en psi) cuando el flujo es el nominal, $\overline{f}$, en gpm. Obviamente, el coeficiente de la válvula debe ser mayor que el que se calcula con la ecuación anterior. Esto se debe a que si la válvula debe regular el flujo, también debe ser capaz de incrementarlo por encima del flujo nominal. Se llamará *factor de sobrecapacidad* de la válvula a la relación entre el coeficiente de la válvula completamente abierta y el coeficiente de la válvula en flujo nominal, $C_{v,\text{máx}}/\overline{C_v}$. Los factores de sobrecapacidad típicos son 1.5 para 50% de sobrecapacidad, y 2.0 para 100% de sobrecapacidad.

En ocasiones el ingeniero de control también debe elegir la caída de presión a través de la válvula en flujo nominal, una decisión que por lo general toma de manera conjunta con el ingeniero de proceso. La caída de presión a través de la válvula representa una pérdida de energía para el proceso y debe mantenerse tan baja como sea posible, aunque rara vez es menor que 5 psi. Son necesarias caídas de presión mayores cuando la caída de presión en la tubería y en los equipos conectados en serie con la válvula es alta, como se verá en la subsección sobre las características de la válvula.

Ejemplo 5-2.2 ***Dimensionamiento de una válvula de control de vapor.*** Una válvula de control debe regular el flujo de vapor al recalentador de una columna de destilación con una tasa de transferencia de calor de diseño de 15 millones Btu/h. El suministro de vapor está saturado a 20 psig. Dimensionar la válvula de control para una caída de presión de 5 psi y 100% de sobrecapacidad.

Solución En las tablas del vapor se encuentra que la temperatura de saturación del vapor es 259°F y que su calor de condensación latente es 930 Btu/lb. Esto quiere decir que el flujo nominal del vapor es 15,000,000/930 = 16,100 lb/h. La presión de entrada de la válvula es

20+ 14.7 = 34.7 psia, el peso molecular del vapor, M_w, es 18 lb/lbmol y su gravedad específica es $G = 18/29 = 0.621$. Suponiendo una válvula Masoneilan con $C_f = 0.8$, por las ecuaciones 5-2.5, 5-2.4 y 5-2.3,

$$y = \frac{1.63}{0.8}\sqrt{\frac{5}{34.7}} = 0.773$$

$$y - 0.148y^3 = 0.705$$

$$\bar{f}_s = \left(16{,}100\frac{\text{lb}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1\text{ lbmol}}{18\text{ lb}}\right)\left(\frac{380\text{ scf}}{\text{lbmol}}\right) = 340{,}000\text{ scfh}$$

$$\bar{C}_v = \frac{(340{,}000)\sqrt{(0.621)(259+460)}}{(836)(0.8)(34.7)(0.705)} = 440\frac{\text{gpm}}{\sqrt{\text{psi}}}$$

Para 100% de sobrecapacidad, el coeficiente de la válvula completamente abierta es

$$C_{v,\text{máx}} = 2.0\bar{C}_v = 880\frac{\text{gpm}}{\sqrt{\text{psi}}}$$

Por la figura C-10.1*a*, una válvula Masoneilan de 10 pulg con un coeficiente de 1000 es la válvula más pequeña con capacidad suficiente para esta aplicación.

Ejemplo 5-2.3 ***Dimensionamiento de una válvula para aplicación con líquido.*** En la figura 5-2.3 se muestra un proceso para transferir aceite de un tanque de almacenamiento a una torre de separación. El tanque está a presión atmosférica y la torre trabaja a 25.9 pulg-Hg absolutas (12.7 psia). El flujo nominal del aceite es 700 gpm, su gravedad específica es 0.94 y su presión de vapor a la temperatura de flujo de 90°F es 13.85 psia. Se utiliza para transporte una tubería de acero comercial Schedule 40 con diámetro de 8 pulg y la eficiencia de la bomba es 75%. Dimensionar una válvula para controlar el flujo de aceite. A partir de las correlaciones para el flujo de fluidos, se sabe que la caída de presión por fricción en la línea es 6 psi.

Solución Antes de poder dimensionar esta válvula, debe decidirse dónde se va a colocar en la línea y cuál será la caída de presión a través de ella bajo flujo nominal. La ubicación de la válvula resulta importante en este caso porque existe la posibilidad de que el líquido se vaporice cuando su presión baje al pasar por la válvula. Esto haría necesaria una válvula más grande, ya que la densidad de la mezcla de líquido y vapor será mucho menor que la densidad del líquido. Nótese que si la válvula se coloca a la entrada de la torre de separación, el líquido se vaporizará debido a que la presión de salida, 12.7 psia, es menor que la presión del vapor, 13.85 psia, a la temperatura de flujo. Una localización mejor para la válvula es en la descarga de la bomba, donde la presión de salida es más alta debido a la presión hidrostática de los 60 ft de elevación más la mayor parte de los 6 psi de la caída por fricción. La presión hidrostática es

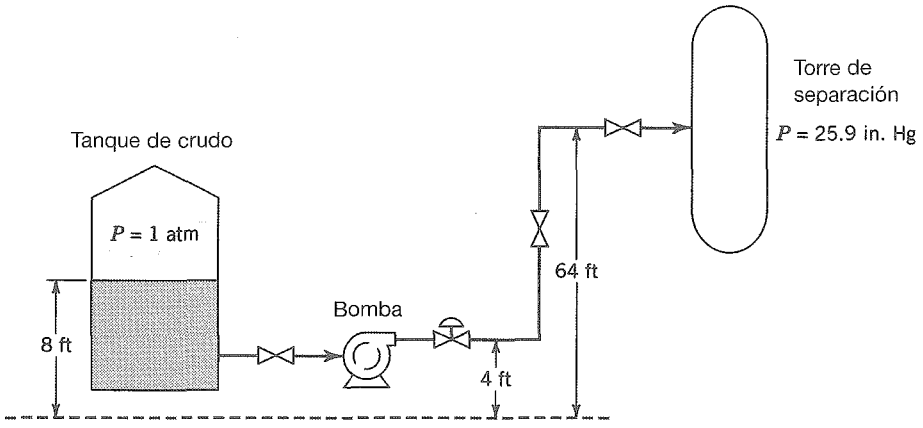


Figura 5-2.3 Diagrama esquemático del proceso del ejemplo 5-2.3.

(62.3 lb/ft^3)(0.94)(60 ft)/(144 in^2/ft^2) = 24.4 psi. Esto significa que la presión a la salida de la válvula será al menos 37.1 psia (24.4 + 12.7), muy por encima de la presión de vapor del aceite. Por tanto, no habrá vaporización a través de la válvula. Las válvulas nunca deberán colocarse en la succión de las bombas porque ahí la presión es menor y la vaporización causaría cavitación en la bomba.

Para la caída de presión a través de la válvula se usará 5 psi, o un valor cercano a la caída por fricción en la línea. Para hacerse una idea del costo de esta caída de presión, para un costo de la electricidad de \$0.03/kW-h y 8200 h/año de operación de la bomba, el costo anual debido a los 5 psi de caída de presión a través de la válvula es

$$\left(\frac{700\text{ gal}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1\text{ ft}^3}{7.48\text{ gal}}\right)\left(\frac{(5)(144)\text{ lbf}}{\text{ft}^2}\right)\left(\frac{1}{0.75}\right)\left(\frac{1\text{ kW-min}}{44{,}250\text{ ft-lbf}}\right)$$
$$\times\left(\frac{8200\text{ h}}{\text{año}}\right)\left(\frac{\$0.03}{\text{kW-h}}\right) = \$500/\text{año}$$

donde 0.75 es la eficiencia de la bomba. Este costo puede parecer insignificante hasta que uno considera que un proceso típico puede requerir varios cientos de válvulas de control.

El coeficiente de la válvula máximo (completamente abierta) para 100% de sobrecapacidad es

$$C_{v,\text{máx}} = 2(700)\sqrt{\frac{0.94}{5}} = 607\,\frac{\text{gpm}}{\sqrt{\text{psi}}}$$

Esto requiere una válvula Masoneilan de 8 pulg (figura C-10.1*a*), la cual tiene un C_v de 640. Como comparación, una caída de presión a través de la válvula de 2 psi requiere un C_v de 960, que

corresponde a una válvula de 10 pulg. El costo anual debido a una caída de presión de 2 psi es \$200/año. Una caída de presión en la válvula de 10 psi requiere un C_v de 429, que corresponde a una válvula de 8 pulg y representa un costo anual de \$1000/año.

5-2.3 Características de la válvula de control

El coeficiente C_v de una válvula de control depende de la posición de la válvula. Varía de cero, cuando la válvula está cerrada, $vp = 0$, a un valor máximo, $C_{v,máx}$, cuando la válvula está completamente abierta, es decir, cuando la posición fraccionaria de la válvula es la unidad. Es esta variación en el C_v la que permite que las válvulas regulen de manera continua el flujo. La función particular que relaciona el coeficiente C_v con la posición de la válvula se conoce como la característica inherente de la válvula. Los fabricantes de válvulas pueden determinar las características de la válvula ajustando la manera en que el área del orificio de la válvula varía con la posición de la válvula.

En la figura 5-2.4 se muestran tres características comunes de una válvula: la de abertura rápida, la lineal y la isoporcentual. Como resulta evidente por su forma, la característica de abertura rápida no es apropiada para regular flujos, debido a que gran parte de la variación en el coeficiente de la válvula tiene lugar durante el primer tercio del recorrido de la válvula. Hay muy poca variación en el coeficiente en la mayor parte del recorrido de la válvula. Las válvulas de abertura rápida sólo son apropiadas como válvulas de alivio o para sistemas de control activado/desactivado (on/off). Las válvulas de alivio deben liberar grandes flujos tan rápido como sea posible para prevenir la sobrepresurización de recipientes y otros equipos de proceso. Los sistemas de control activado/desactivado operan suministrando el flujo total o un flujo nulo. No regulan el flujo entre esos dos extremos.

Las dos características usadas normalmente para regular flujos son la lineal y la isoporcentual. La función para la característica lineal es

$$C_v(vp) = C_{v,máx}\, vp \tag{5-2.6}$$

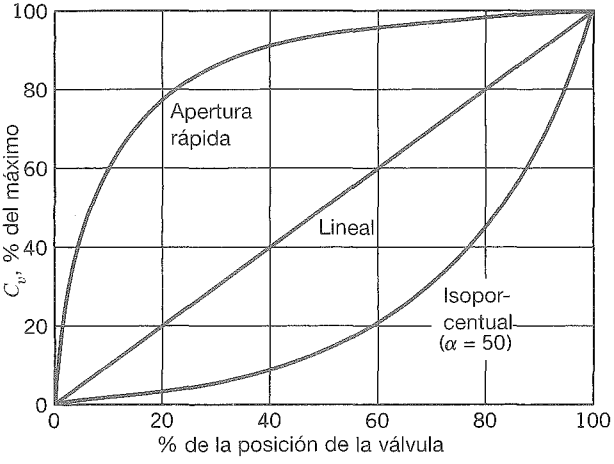


Figura 5-2.4 Curvas de las características inherentes de válvulas.

y para la característica isoporcentual es

$$C_v(vp) = C_{v,\text{máx}}\,\alpha^{vp-1} \tag{5-2.7}$$

donde α es el parámetro de rangeabilidad que toma valores de 50 o 100, siendo 50 el más común. La verdadera característica isoporcentual no cumple con la ecuación 5-2.7 hasta la posición completamente cerrada debido a que la función exponencial no puede predecir el flujo cero en la posición cero de la válvula. De hecho, predice un coeficiente de $C_{v,\text{máx}}$ en $vp = 0$. Debido a esto, la verdadera característica isoporcentual se desvía de la función exponencial en el 5% inferior del recorrido.

La característica lineal produce un coeficiente proporcional a la posición de la válvula. Para una posición de la válvula de 50%, el coeficiente es 50% del coeficiente máximo.

La función exponencial tiene la propiedad de que incrementos iguales en la posición de la válvula producen incrementos relativos o porcentuales iguales en el coeficiente de la válvula; de ahí el nombre. Es decir, cuando la posición de la válvula tiene un incremento de 1% pasando de 20% a 21%, el flujo se incrementa en 1% del valor que tenía en la posición de 20%. Si la posición de la válvula pasa de 60% a 61%, el flujo se incrementa en 1% de lo que era en la posición de 60%.

El lector quizá se pregunte, ¿por qué es útil una función exponencial para regular el flujo? Para lograr un desempeño uniforme del control, el lazo de control debe tener una ganancia constante. La característica lineal de una válvula podría parecer la única que proporciona una ganancia constante. Sin embargo, como se vio en los capítulos 3 y 4, la mayoría de los procesos son no lineales y pueden presentar una reducción en la ganancia al incrementar la carga. Para tales procesos la característica isoporcentual, en la que la ganancia se incrementa cuando la válvula se abre (véase la figura 5-2.4), compensa el decaimiento de la ganancia del proceso. En lo que al controlador se refiere, es el producto de las ganancias de la válvula, el proceso y el sensor-transmisor lo que debe permanecer constante.

La selección de las características correctas de la válvula para un proceso requiere un análisis detallado de las características o "personalidad" del proceso. Sin embargo, varias reglas prácticas, basadas en experiencias previas, ayudan a tomar la decisión. Brevemente, se puede decir que las válvulas con la característica de flujo lineal se usan cuando el proceso es lineal y la caída de presión a través de la válvula no varía con el flujo. Las válvulas isoporcentuales son probablemente las más comunes. Por lo general se usan cuando la caída de presión a través de la válvula varía con el flujo y en procesos en los que la ganancia se reduce cuando el flujo a través de la válvula se incrementa.

Rangeabilidad de una válvula

La rangeabilidad o rango de control guarda una estrecha relación con las características de la válvula. La rangeabilidad es la razón del flujo controlable máximo y el flujo controlable mínimo. Por lo tanto, es una medida del ancho del flujo en operación que la válvula puede controlar. Debido a que el flujo debe estar bajo control, estos flujos no pueden ser determinados

cuando la válvula está en uno de los límites de su recorrido. Una manera común de definir los flujos máximo y mínimo es en las posiciones de la válvula del 95% y 5%, es decir,

$$\text{Rangeabilidad} = \frac{\text{Flujo en la posición de la válula del 95\%}}{\text{Flujo en la posición de la válvula del 5\%}} \tag{5-2.8}$$

Otras definiciones utilizan las posiciones de la válvula del 90% y el 10%.

Si la caída de presión a través de la válvula es independiente del flujo, el flujo a través de la válvula es proporcional a su coeficiente C_v. Entonces la rangeabilidad de la válvula se puede calcular a partir de sus características inherentes. Por la ecuación 5-2.6, la característica lineal produce una rangeabilidad de 0.95/0.05 = 19, mientras que, por la ecuación 5-2.7, la característica isoporcentual tiene una rangeabilidad inherente de $\alpha^{-0.05}/\alpha^{-0.95} = \alpha^{0.90}$, que es 33.8 para $\alpha = 50$ y 63.1 para $\alpha = 100$. En la figura 5-2.4 se puede ver que la rangeabilidad de una válvula de abertura rápida es aproximadamente 3. Ésta es una de las razones por las que una válvula de abertura rápida no es apropiada para regular un flujo.

Características de válvulas instaladas

Cuando la caída de presión en la línea y los equipos en serie con la válvula es significativa comparada con la caída de presión a través de la válvula, esta última varía con el flujo a través de la válvula. Esta variación en la caída de presión ocasiona que la variación del flujo con la posición de la válvula sea diferente de la variación del coeficiente C_v. En otras palabras, las características de flujo de las válvulas instaladas son diferentes de las características inherentes de C_v. A fin de desarrollar un modelo para las características de flujo instaladas, considérese el sistema de tuberías de la figura 5-2.5. Aunque en este sistema la válvula está en serie con un intercambiador de calor, cualquier resistencia al flujo en serie con la válvula causará el fenómeno que se va a describir y modelar.

Hay dos suposiciones básicas en el modelo: 1) la caída de presión en la línea y en el equipo en serie con la válvula, Δp_L, varía con el cuadrado del flujo; 2) hay una caída de presión total, Δp_0, que es independiente del flujo. Esta caída de presión total proporciona la presión diferencial total disponible a través de la válvula, la línea y los equipos. La primera suposición es aproximadamente válida cuando el flujo es turbulento, que es el régimen de flujo más común en equipos industriales. La caída de presión total, Δp_0, siempre se puede encontrar midiendo la caída de presión a través de la válvula cuando está cerrada, porque entonces el flujo, y por consiguiente la caída de presión por fricción en la línea y el equipo, son cero.

Sea

$$\Delta p_L = k_L G_f f^2 \tag{5-2.9}$$

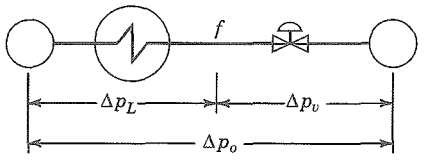


Figura 5-1.2 Válvula en serie con un intercambiador de calor. La caída de presión a través de la válvula varía con el flujo.

donde:

Δp_L = caída de presión por fricción en la línea, accesorios, equipos, etc., en serie con la válvula de control, psi
f = flujo a través de la válvula y la línea, gpm
k_L = coeficiente de fricción constante para la línea, accesorios, equipos, etc., psi/(gpm)^2
G_f = gravedad específica del líquido (agua = 1).

La caída de presión a través de la válvula se obtiene con la ecuación 5-2.1.

$$\Delta p_v = G_f \frac{f^2}{C_v^2} \tag{5-2.10}$$

La caída de presión total es la suma de las dos.

$$\Delta p_0 = \Delta p_v + \Delta p_L = \left(\frac{1}{C_v^2} + k_L \right) G_f f^2 \tag{5-2.11}$$

Resolviendo la expresión para el flujo se obtiene

$$f = \frac{C_v}{\sqrt{1 + k_L C_v^2}} \sqrt{\frac{\Delta p_o}{G_f}} \tag{5-2.12}$$

Esta fórmula constituye el modelo para las características instaladas de cualquier válvula en aplicaciones con líquido. Nótese que si la caída de presión en la línea es despreciable, $k_L = 0$, $\Delta p_0 = \Delta p_v$, y la ecuación 5-2.12 se hace igual a la ecuación 5-2.1. En este caso, las características instaladas son iguales a las características inherentes debido a que la caída de presión a través de la válvula es constante. El coeficiente de fricción se calcula a partir de la caída de presión en la línea bajo flujo nominal. Por la ecuación 5-2.10,

$$k_L = \frac{\overline{\Delta p_L}}{G_f \bar{f}^2} \tag{5-2.13}$$

Para obtener las características instaladas como fracción del flujo máximo, primero se obtiene el flujo máximo a través de la válvula sustituyendo el C_v máximo en la ecuación 5-2.12:

$$f_{\text{máx}} = \frac{C_{v,\text{máx}}}{\sqrt{1 + k_L C_{v,\text{máx}}^2}} \sqrt{\frac{\Delta p_o}{G_f}} \tag{5-2.14}$$

Después, dividiendo la ecuación 5-2.12 entre la ecuación 5-2.14, se obtiene

$$\frac{f}{f_{\text{máx}}} = \frac{C_v}{C_{v,\text{máx}}} \sqrt{\frac{1 + k_L C_{v,\text{máx}}^2}{1 + k_L C_v^2}} \tag{5-2.15}$$

Nótese que el flujo máximo a través de la válvula, $f_{\text{máx}}$, es independiente de las características de la válvula, mientras que las características instaladas normalizadas, ecuación 5-2.15, son independientes de la caída de presión total, Δp_0. De hecho, para una válvula con una capacidad dada, las características de flujo normalizadas, y por consiguiente su rangeabilidad, dependen únicamente del coeficiente de fricción de la línea, k_L, y de las características inherentes de la válvula.

Este modelo –ecuaciones 5-2.12, 5-2.14 y 5-2.15– sólo es válido para el flujo líquido a través de la válvula sin vaporización. Podría desarrollarse un modelo similar para el flujo de gas a través de la válvula. Sin embargo, tal modelo debe diferenciar entre la caída de presión a través de la línea corriente arriba de la válvula y la caída de presión en la línea corriente abajo. También debe considerar si el flujo a través de la válvula es crítico o subcrítico. Por consiguiente, tal modelo no podría representarse con fórmulas simples sino con un programa de computadora o una hoja de cálculo. El uso de las fórmulas para las características instaladas en flujo de líquidos se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5-2.4 ***Características de flujo instaladas de una válvula para líquido.*** Para la válvula del ejemplo 5-2.3, encontrar el flujo máximo a través de la válvula, las características instaladas de flujo y la rangeabilidad de la válvula. Suponer una característica lineal y una isoporcentual con una rangeabilidad de 50. Analizar el efecto de la variación sobre la caída de presión a través de la válvula en flujo nominal.

Solución Aunque el aumento de la presión a través de la bomba de la figura 5-2.3 también es variable, se supondrá que es constante para simplificar. De manera alternativa, la variación en el incremento de presión se podría manejar sumando la diferencia entre la elevación de presión en flujo cero y la elevación de presión en flujo nominal a los 6 psi de caída de presión en la línea en flujo nominal. En el ejemplo 5-2.3 se estableció que para una caída de presión de 5 psi a través de la válvula, una gravedad específica de 0.94 y un flujo nominal de 700 gpm, el coeficiente de la válvula requerido para 100% de sobrecapacidad es 607 gpm/(psi)$^{1/2}$. Sin embargo, la válvula más pequeña con esta capacidad es de 8 pulg con $C_{v,\text{máx}} = 640$ gpm/(psi)$^{1/2}$; se usará este valor. El coeficiente de fricción en la línea es

$$k_L = \frac{6 \text{ psi}}{(0.94)(700 \text{ gpm})^2} = 13.0 \times 10^{-6} \frac{\text{psi}}{(\text{gpm})^2}$$

y la caída de presión total (constante) dependiente del flujo es

$$\Delta p_0 = \Delta p_v + \Delta p_L = 5 + 6 = 11 \text{ psi}$$

Por la ecuación 5-2.14, el flujo máximo es

$$f_{\text{máx}} = \frac{640}{\sqrt{1+(13\times10^{-6})(640)^2}}\sqrt{\frac{11}{0.94}} = 870 \text{ gpm}$$

Si se hubiera usado el $C_{v,\text{máx}}$ calculado de 607, se habría obtenido un flujo máximo de 862 gpm. En ambos casos, el flujo máximo es mucho menor que el doble del flujo nominal, 1400 gpm, aunque la válvula se dimensionó para 100% de sobrecapacidad. Esto se debe a que la resistencia en la línea limita el flujo a medida que la válvula se abre. No es posible seleccionar una válvula lo suficientemente grande que entregue el doble del flujo nominal, ya que incluso si se quitara la válvula y los 11 psi completos fueran a través de la línea, el flujo sería 700 $(11/6)^{1/2}$ = 947 gpm.

Para obtener la rangeabilidad de la válvula, se calcula el flujo de la válvula para una posición de 95% y 5% usando la ecuación 5-2.12. Para características lineales, con $vp = 0.05$, $C_v = C_{v,\text{máx}}\, vp = (640)(0.05) = 32$, y por la ecuación 5-2.12,

$$f_{0.05} = \frac{32}{\sqrt{1+(13\times10^{-6})(32)^2}}\sqrt{\frac{11}{0.94}} = 109 \text{ gpm}$$

Del mismo modo, con $vp = 0.95$, $C_v = 608$ y $f_{0.95} = 862$ gpm. La rangeabilidad es entonces (862)/(109) = 7.9, que es mucho menor que la rangeabilidad nominal de 19. Para las características isoporcentuales con parámetro de rangeabilidad $\Delta = 50$, los flujos son

$$\text{Cuando } vp = 0.05, \quad C_v = C_{v,\text{máx}}\alpha^{vp-1} = (640)(50)^{0.05-1} = 15.6 \quad f = 53.2 \text{ gpm}$$

Tabla 5-2.1 Resultados del ejemplo 5-2.4

	Caída de presión en la válvula, psi		
	2	5	10
Caída de presión total, psi	8	11	16
$C_{v,\text{máx}}$ calculado	960	607	429
Tamaño de la válvula requerido[a]	10 in.	8 in.	8 in.
$C_{v,\text{máx}}$ real[a]	1000	640	640
Flujo máximo, gpm	779	870	1049
Rangeabilidad lineal	5.4	7.9	7.9
Rangeabilidad isoporcentual	10.8	15.8	15.8

[a]De la figura C-10.1 del apéndice C.

Del mismo modo, con $vp = 0.95$, $C_v = 526, f = 839$ gpm, y la rangeabilidad instalada es 839/53.2 = 15.8, también mucho más baja que la rangeabilidad inherente de 33.8, pero aproximadamente el doble de la rangeabilidad de la válvula lineal para la misma aplicación.

En la tabla 5-2.1 se resumen los resultados de las caídas de presión a través de la válvula de 2 psi, 5 psi y 10 psi. En cada caso, se supone que la caída de presión en la línea no cambia, pero que la caída de presión disponible total es la suma de las caídas de presión en la válvula y en la línea con flujo de diseño. Esta suposición es realista, ya que, al momento de diseñar el proceso, la caída de presión de la válvula se decide primero y luego se dimensiona la bomba para suministrar la caída de presión total necesaria. También muestra que el flujo máximo se incrementa con la caída de presión incluso cuando el tamaño de la válvula se reduce. Nótese que la rangeabilidad de la válvula no cambia cuando el tamaño de la válvula y la caída de presión en la línea permanecen constantes, aun cuando la caída de presión total disponible se incremente.

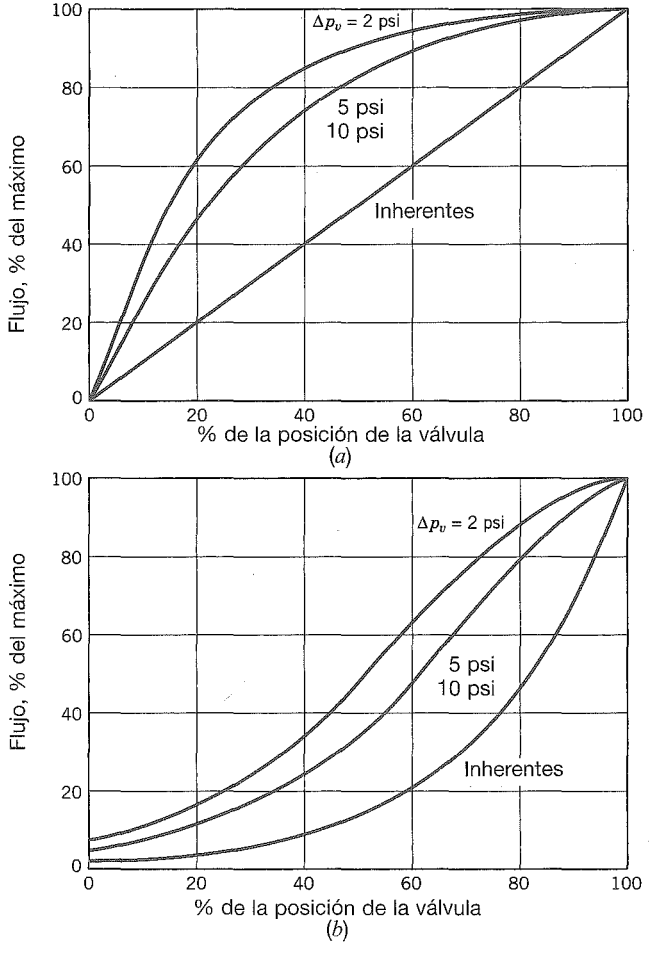


Figura 5-2.6 Características instaladas de flujo de la válvula de control del ejemplo 5-2.4. (*a*) Características inherentes lineales. (*b*) Características isoporcentuales con $\alpha = 50$.

En la figura 5-2.6 se muestran las gráficas de las características instaladas normalizadas correspondientes a las tres caídas de presión. Estas características se calcularon utilizando la ecuación 5-2.15. Para comparación, en la figura 5-2.6 también se muestran las características inherentes de cada válvula; son las características de flujo cuando no hay caída de presión en la línea (caída de presión constante a través de la válvula). Las características para caídas de presión de 5 psi y 10 psi se superponen debido a que el tamaño de la válvula no cambia. Nótese cómo las características instaladas para la válvula lineal se convierten en características de abertura rápida, de manera más palpable para válvulas más grandes. En contraste, las características instaladas para válvulas isoporcentuales siguen siendo más lineales, aunque también se aplanan para flujos altos.

5-2.4 Ganancia y función de transferencia de la válvula de control

La ganancia de la válvula, como la de cualquier otro dispositivo, es igual al cambio de estado estacionario en la salida dividido entre el cambio en la entrada. El diagrama esquemático de la válvula de la figura 5-2.1 muestra que la salida de la válvula es el flujo y su entrada es la señal de salida del controlador en porcentaje de salida del controlador (%CO). Por lo tanto, la ganancia de la válvula está definida como

$$K_v = \frac{df}{dm}\frac{\text{gpm}}{\%\text{CO}} \tag{5-2.16}$$

La ganancia de la válvula también se puede definir en otras unidades tales como (lb/h)/(%CO) y scfh/(%CO). Utilizando la regla de la cadena del cálculo diferencial, la ganancia de la válvula se puede expresar como el producto de tres términos que relacionan la dependencia de la posición de la válvula de la salida del controlador, la dependencia de C_v de la posición de la válvula, y la dependencia del flujo de C_v

$$K_v = \left(\frac{dvp}{dm}\right)\left(\frac{dC_v}{dvp}\right)\left(\frac{df}{dC_v}\right) \tag{5-2.17}$$

La dependencia de la posición de la válvula es simplemente la conversión de la salida porcentual del controlador a la posición fraccionaria de la válvula, pero el signo depende de si la válvula es del tipo cerrada en falla o abierta en falla

$$\frac{dvp}{dm} = \pm\frac{1}{100}\frac{\text{frn.}vp}{\%\text{CO}} \tag{5-2.18}$$

donde el signo positivo se usa si la válvula es del tipo cerrada en falla (aire para abrir) y el signo negativo si la válvula es del tipo abierta en falla (aire para cerrar).

La dependencia del coeficiente C_v de la posición de la válvula depende de las características de la válvula. Por las ecuaciones 5-2.6 y 5-2.7, para características lineales,

$$\overline{\frac{dC_v}{dvp}} = C_{v,\text{máx}} \tag{5-2.19}$$

y para características isoporcentuales,

$$\overline{\frac{dC_v}{dvp}} = (\ln \alpha) C_{v,\text{máx}} \alpha^{\overline{vp}-1} = (\ln \alpha)\overline{C_v} \tag{5-2.20}$$

donde la función exponencial no lineal se ha linealizado.

Por último, la dependencia del flujo de C_v es una función de las características instaladas de la válvula de control. Se considera primero el caso más simple de una caída de presión constante a través de la válvula y después el caso más complejo, el cual considera la caída de presión en la línea en serie con la válvula.

Caída de presión constante en la válvula

Cuando la caída de presión en la línea en serie con la válvula es despreciable, las presiones de entrada y salida, y por consiguiente la caída de presión, permanecen constantes. Para aplicaciones con líquidos, por la ecuación 5-2.1, la dependencia del flujo del coeficiente C_v es

$$\frac{df}{dC_v} = \sqrt{\frac{\Delta p_v}{G_f}} \tag{5-2.21}$$

La ganancia de una válvula con características lineales se obtiene ahora sustituyendo las ecuaciones 5-2.18, 5-2.19 y 5-2.21 en la ecuación 5-2.17:

$$K_v = \pm \frac{1}{100} C_{v,\text{máx}} \sqrt{\frac{\Delta p_v}{G_f}} = \frac{f_{\text{máx}}}{100} \frac{\text{gpm}}{\%\text{CO}} \tag{5-2.22}$$

donde $f_{\text{máx}}$ es el flujo a través de la válvula cuando está completamente abierta. Nótese que la ganancia de la válvula lineal es constante cuando la caída de presión a través de la válvula es constante. También se puede establecer de manera similar, y se deja como ejercicio, que la ganancia tanto para flujo de líquido como de gas en unidades de masa es

$$K_v = \pm \frac{w_{\text{máx}}}{100} \frac{\text{lb/h}}{\%\text{CO}} \tag{5-2.23}$$

cuando las presiones de entrada y salida de la válvula no varían con el flujo.

La ganancia de una válvula con características isoporcentuales se obtiene de manera similar sustituyendo las ecuaciones 5-2.18, 5-2.20 y 5-2.21 en la ecuación 5-2.17:

$$K_v = \pm\frac{1}{100}(\ln \alpha)\overline{C_v}\sqrt{\frac{\Delta p_v}{G_f}} = \pm\frac{\ln \alpha}{100}\bar{f}\frac{\text{gpm}}{\%\text{CO}} \tag{5-2.24}$$

Esta fórmula indica que la ganancia de una válvula isoporcentual es proporcional al flujo cuando la caída de presión a través de la válvula es constante. La ganancia tanto para flujo de líquido como de gas en unidades de masa es

$$K_v = \pm\frac{\ln \alpha}{100}\bar{w}\frac{\text{lb/h}}{\%\text{CO}} \tag{5-2.25}$$

cuando las presiones de entrada y salida de la válvula no varían con el flujo.

Caída de presión variable a través de la válvula

Para determinar la manera en que el flujo depende del coeficiente C_v para un flujo de líquido cuando la caída de presión a través de la válvula es variable, se encuentra la derivada de la ecuación 5-2.12 con respecto a C_v utilizando las reglas del cálculo diferencial para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\overline{df}}{dC_v} &= \frac{\sqrt{1+k_L\overline{C_v}^2} - \overline{C_v}(1+k_L\overline{C_v}^2)^{-0.5}k_L\overline{C_v}}{1+k_L\overline{C_v}^2}\sqrt{\frac{\Delta p_0}{G_f}} \\ &= \left(1+k_L\overline{C_v}^2\right)^{-3/2}\sqrt{\frac{\Delta p_0}{G_f}}\end{aligned} \tag{5-2.26}$$

Para una válvula con características lineales, la expresión de la ecuación 5-2.26 se multiplica por la constante $\pm C_{v,\,\text{máx}}/100$ para obtener la ganancia de la válvula. Es fácil ver que la ganancia de la válvula lineal se reduce cuando la válvula se abre, debido al incremento en $\overline{C_v}$. Para la válvula isoporcentual, la ganancia se obtiene sustituyendo las ecuaciones 5-2.18, 5-2.20 y 5-2.26 en la ecuación 5-2.17:

$$\begin{aligned}K_v &= \pm\frac{\ln \alpha}{100}\frac{\overline{C_v}}{\left(1+k_L\overline{C_v}^2\right)^{3/2}}\sqrt{\frac{\Delta p_0}{G_f}} \\ &= \pm\frac{\ln \alpha}{100}\frac{\bar{f}}{1+k_L\overline{C_v}^2}\frac{\text{gpm}}{\%\text{CO}}\end{aligned} \tag{5-2.27}$$

donde se ha sustituido la ecuación 5-2.12. Nótese que esta ganancia presenta menos variación con la abertura de la válvula, debido a que el término del flujo en el numerador tiende a cancelar

parte del efecto del término con C_v en el denominador, al menos hasta que la válvula está casi completamente abierta. Esta naturaleza casi lineal de las características instaladas de la válvula isoporcentual también se puede ver en las gráficas de la figura 5-2.6*b*.

Ejemplo 5-2.5 ***Ganancia de una válvula de vapor con caída de presión constante.*** Encontrar la ganancia y la posición de la válvula en condiciones de diseño para la válvula de vapor del ejemplo 5-2.2. Suponer que se selecciona una válvula de 10 pulg con $C_{v,\ máx} = 1000$ y que las presiones alrededor de la válvula son independientes del flujo. Considérese tanto una válvula con características lineales como una isoporcentual con parámetro de rangeabilidad de 50. Para la segunda, encontrar la ganancia para un flujo nominal de 16,100 lb/h.

Solución Dado que se trata de una válvula de vapor, se supondrá que es del tipo cerrada en falla a fin de evitar el sobrecalentamiento en el recalentador. Entonces, como la señal del controlador abre la válvula, la ganancia es positiva.

Para la válvula lineal, la posición de la válvula en flujo de diseño se encuentra con la ecuación 5-2.6:

$$\overline{vp} = \frac{\overline{C_v}}{C_{v,\,máx}} = \frac{440}{1000} = 0.440$$

La ganancia se obtiene con la ecuación 5-2.23:

$$K_v = +\frac{w_{máx}}{100} = \frac{1}{100}(16{,}100)\left(\frac{1000}{440}\right) = 366\frac{\text{lb/h}}{\%\text{CO}}$$

donde, dado que las presiones son constantes, se ha utilizado la relación de valores de C_v para estimar el flujo máximo.

Para la válvula isoporcentual con $\alpha = 50$, la posición de la válvula se calcula utilizando la ecuación 5-2.7:

$$\alpha^{\overline{vp}-1} = \frac{\overline{C_v}}{C_{v,\,máx}} = \frac{440}{1000} = 0.440$$

$$\overline{vp} = \frac{\ln(0.440)}{\ln(50)} + 1 = 0.79$$

La ganancia se obtiene de la ecuación 5-2.25:

$$K_v = +\frac{\ln \alpha}{100}\overline{w} = \frac{\ln(50)}{100}16{,}100 = 630\frac{\text{lb/h}}{\%\text{CO}}$$

Como sería de esperarse, la ganancia de la válvula isoporcentual para el flujo de diseño es mayor que la ganancia constante de la válvula lineal.

Ejemplo 5-2.6 ***Ganancia de una válvula con caída de presión variable.*** Calcular la ganancia de la válvula del ejemplo 5-2.4 para flujo nominal. Considérese tanto una válvula lineal como una isoporcentual con parámetro de rangeabilidad $\alpha = 50$.

Solución Por los ejemplos 5-2.3 y 5-2.4, se sabe que $\Delta p_0 = 11$ psi, $\bar{f} = 700$ gpm, $k_L = 13.0 \times 10^{-6}$ psi/(gpm)^2, $\overline{C_v} = 303$ y $C_{v,\text{máx}} = 640$ gpm/(psi)$^{1/2}$. Como la válvula alimenta una columna de destilación, se supone que es del tipo cerrada en falla, por lo que su ganancia es positiva ya que la señal del controlador la abre. La ganancia de una válvula lineal con caída de presión variable se obtiene sustituyendo las ecuaciones 5-2.18, 5-2.19 y 5-2.26 en la ecuación 5-2.17:

$$K_v = +\frac{1}{100}\frac{C_{v,\text{máx}}}{\left(1+k_L\overline{C_v}^2\right)^{3/2}}\sqrt{\frac{\Delta p_0}{G_f}}$$

$$= \frac{1}{100}\frac{640}{\left(1+13.0\times10^{-6}(303)^2\right)^{3/2}}\sqrt{\frac{11}{0.94}} = 6.7\frac{\text{gpm}}{\%\text{CO}}$$

Esta ganancia es menos de la mitad de la ganancia de los 15 gpm/%CO que tendría la válvula si la caída de presión de 5 psi a través de la válvula se mantuviera constante.

La ganancia de la válvula isoporcentual se obtiene con la ecuación 5-2.27:

$$K_v = +\frac{\ln(50)}{100}\frac{700}{1+13.0\times10^{-6}(303)^2} = 12.5\frac{\text{gpm}}{\%\text{CO}}$$

Esta ganancia es cerca de la mitad de la ganancia de 27 gpm/%CO que tendría la válvula si la caída de presión a través de la válvula fuera independiente del flujo.

Función de transferencia de la válvula

En la figura 5-2.7 se muestra el diagrama de bloques para una válvula de control. Por lo general basta con modelar la válvula como un retraso de primer orden, de donde resulta la siguiente función de transferencia

$$G_v(s) = \frac{K_v}{\tau_v s + 1} \tag{5-2.28}$$

donde:

K_v = ganancia de la válvula, gpm/%CO o (lb/h)/%CO o scfh/%CO
τ_v = constante de tiempo del actuador de la válvula, minutos.

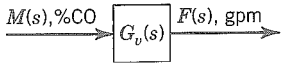


Figura 5-2.7 Diagrama de bloques de una válvula de control.

La constante de tiempo del actuador por lo general es del orden de unos cuantos segundos y puede despreciarse cuando las constantes de tiempo del proceso son del orden de minutos.

En el diagrama de bloques de la figura 5-2.7 se supone que la caída de presión a través de la válvula es constante o solamente una función del flujo. Cuando la caída de presión a través de la válvula es una función de otras variables de proceso, como en el control del nivel o de la presión de un gas, el diagrama de bloques debe incluir el efecto de estas variables sobre el flujo a través de la válvula. En los capítulos 3 y 4 se dan ejemplos de diagramas de bloques en los que las variables de nivel y presión afectan el flujo a través de la válvula.

5-2.5 Resumen de la válvula de control

En esta sección se presentaron algunas consideraciones importantes en el modelaje y dimensionamiento de válvulas de control. Aunque hay otras consideraciones que deben tomarse en cuenta cuando se especifica una válvula de control, las fórmulas aquí presentadas permiten el modelaje de válvulas de control para fines de diseño así como el análisis del sistema de control completo. Al lector que desee más detalles sobre la especificación completa de las válvulas de control se le recomienda leer las excelentes referencias que se dan al final de este capítulo.

5-3 CONTROLADORES POR RETROALIMENTACIÓN

En esta sección se presentan los tipos más importantes de controladores industriales. Específicamente, se consideran los diferentes tipos de algoritmos usados en los controladores analógicos y los más comunes utilizados en sistemas de control distribuido (DCS, por sus siglas en inglés) y en "controladores autónomos", conocidos también como "controladores de un lazo" o simplemente como "controladores de lazo". Como se vio en el capítulo 1, los DCS y los controladores "autónomos" se basan en computadoras (microprocesadores), por lo que no procesan las señales de manera continua sino discreta. Sin embargo, los tiempos de muestreo para estos sistemas son bastante rápidos, por lo general entre 10 veces por segundo y una vez por segundo. Por tanto, para fines prácticos, estos controladores parecen ser continuos.

En pocas palabras, el controlador es el "cerebro" del lazo de control. Como se señaló en el capítulo 1, el controlador realiza la operación de decisión (D) en el sistema de control. Para hacerlo, el controlador:

1. Compara la señal del proceso que recibe, la variable controlada, con la referencia.
2. Envía una señal apropiada a la válvula de control, o a cualquier otro elemento final de control, para mantener la variable controlada en su referencia.

Los controladores tienen una serie de botones/ventanas que permiten ajustar la referencia, leer el valor de la variable controlada, cambiar entre el modo manual y el automático, leer la señal de salida del controlador, y ajustar la señal de salida cuando opera en el modo manual.

El modo auto/manual determina la operación del controlador. Cuando está en auto (modo automático), el controlador decide la señal apropiada y la envía al elemento final de control para mantener la variable controlada en la referencia. En el modo manual el controlador deja de decidir y permite al personal de operación cambiar la salida manualmente. En este modo, el controlador tan sólo ofrece una conveniente (y costosa) manera de ajustar el elemento final de control. En el modo automático, la información del ajuste manual se ignora o deshabilita; únicamente la referencia influye en la salida. En el modo manual, por otra parte, la referencia no tiene efecto sobre la salida del controlador; sólo la salida manual influye la salida. Cuando un controlador está en el modo manual es porque no hay gran necesidad de él. *Sólo cuando el controlador está en el modo automático se obtienen los beneficios de control automático de procesos.*

5-3.1 Acción del controlador

La selección de la acción del controlador es crítica. *Si la acción no se selecciona correctamente, el controlador no controlará.* A continuación se verá cómo se debe seleccionar la acción del controlador y qué significa.

Considérese el lazo de control del intercambiador de calor mostrado en la figura 5-3.1; el proceso está en estado estacionario y la referencia es constante. Supóngase que la señal del transmisor de la temperatura se incrementa, indicando que la temperatura de salida se ha incrementado por encima de la referencia. Para regresar esta temperatura a la referencia, el controlador debe cerrar la válvula de vapor en cierta cantidad. Como la válvula es del tipo cerrada en falla (FC), el controlador debe reducir su señal de salida a la válvula (ver las flechas en la figura). Cuando un incremento en la señal que llega al controlador requiere una reducción en la salida del controlador, este último debe ajustarse en *acción inversa*. En muchos casos se usa también el término *incremento/decremento.*

De manera alternativa, considérese el lazo de control de nivel mostrado en la figura 5-3.2; el proceso está en estado estacionario y la referencia es constante. Supóngase que la señal del transmisor del nivel se incrementa, indicando que el nivel ha subido por encima de la referencia. Para regresar este nivel a la referencia, el controlador debe abrir la válvula en cierta cantidad. Como la válvula es del tipo cerrada en falla (FC), el controlador debe incrementar su señal de salida a la válvula (ver las flechas en la figura). Cuando un incremento en la señal que llega al controlador requiere un incremento en la salida del controlador, este último debe ajustarse en *acción directa.* En muchos casos también se usa el término *incremento/incremento.*

En resumen, para determinar la acción de un controlador, el ingeniero debe conocer:

1. Los requerimientos de control del proceso.
2. La acción de seguridad de la válvula u otro elemento final de control.

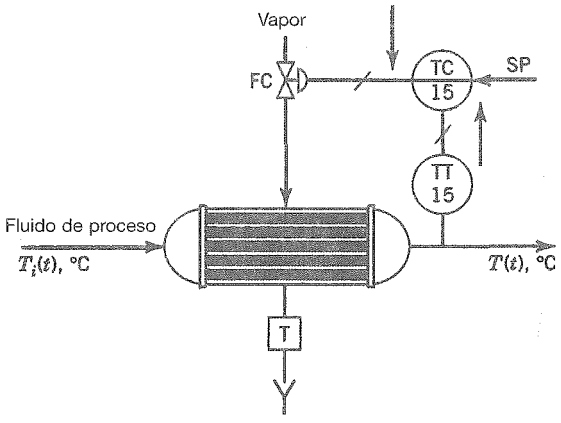


Figura 5-3.1 Lazo de control de un intercambiador de calor.

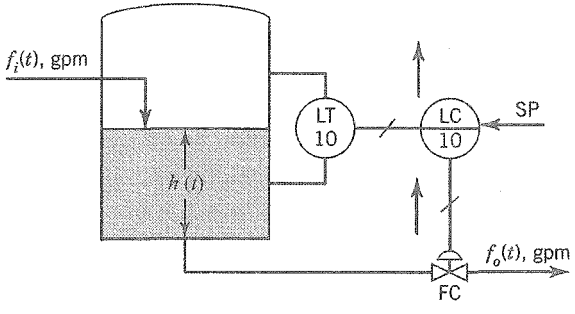


Figura 5-3.2 Lazo de control de nivel de líquido.

Ambos puntos deben tomarse en consideración. ¿Cuál debería ser la acción del controlador de nivel si se usara una válvula del tipo abierta en falla (FO)? ¿Y cuál debería ser esta acción si el nivel se controlara con el flujo de entrada en lugar de con el flujo de salida? En el primer caso, la acción de la válvula de control cambia, mientras que en el segundo caso es el requerimiento de control del proceso el que cambia.

La acción del controlador por lo general se ajusta con un interruptor, con un bit de configuración o respondiendo una pregunta cuando se programa/configura el controlador.

5-3.2 Tipos de controladores por retroalimentación

La manera en que los controladores por retroalimentación toman una decisión es resolviendo una ecuación basada en la diferencia entre la variable controlada y la referencia. En esta sección se examinan los tipos más comunes de controladores considerando las ecuaciones que describen su operación.

Como se vio en el capítulo 1, las señales que entran y salen del controlador son eléctricas o neumáticas. Incluso en los sistemas computarizados las señales provenientes del campo son

eléctricas antes de que sean convertidas, por un convertidor analógico/digital (A/D), a valores digitales. Asimismo, la señal que el sistema computarizado envía de regreso al campo es una señal eléctrica. Para ayudar a simplificar la presentación que sigue, todas las señales se dan en porcentaje. Es decir, se hablará de 0-100% en lugar de 4-20 mA o 3-15 psig, o cualquier otro tipo de señal.

Como ya se señaló, los controladores por retroalimentación deciden qué hacer para mantener la variable controlada en la referencia resolviendo una ecuación basada en la diferencia entre la referencia y la variable controlada. Esta diferencia, o error, se calcula como

$$e(t) = r(t) - c(t) \tag{5-3.1}$$

donde:

$c(t)$ = variable controlada. La mayoría de las veces, la variable controlada está dada por la salida del transmisor (TO) y, por consiguiente, tiene unidades %TO.
$r(t)$ = referencia [se utiliza $r(t)$ porque originalmente se usaba el término *valor de referencia*]. Es el valor deseado de la variable controlada y por tanto tiene unidades %TO.
$e(t)$ = error, %TO

El error también podría haberse calculado como $e(t) = c(t) - r(t)$. Sin embargo, la ecuación 5-3.1 será la convención utilizada en este libro.

La ecuación 5-3.1 se escribe en la forma de variable de desviación como

$$E(t) = R(t) - C(t) \tag{5-3.2}$$

donde:

$E(t)$ = error en forma de desviación. Suponiendo que el error en el estado estacionario inicial es cero, como se utiliza en este libro, $E(t) = e(t) - 0$.
$R(t)$ = referencia en forma de variable de desviación. Se define como $R(t) = r(t) - \overline{r}$, donde $\overline{r}$ es el valor de estado estacionario inicial de la referencia.
$C(t)$ = variable controlada en forma de desviación. Se define como $C(t) = c(t) - \overline{c}$, donde $\overline{c}$ es el valor de estado estacionario inicial de la variable controlada.

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación 5-3.2 se obtiene

$$E(s) = R(s) - C(s) \tag{5-3.3}$$

La representación convencional en diagrama de bloques para el controlador se muestra en la figura 5-3.3. $M(s)$ es la variable de Laplace utilizada para denotar la salida del controlador y, en consecuencia, tiene unidades de porcentaje de salida del controlador (%CO). $G_c(s)$ es la función de transferencia que describe cómo actúa el controlador en un error. En los párrafos siguientes se presentan diferentes controladores junto con sus funciones de transferencia.

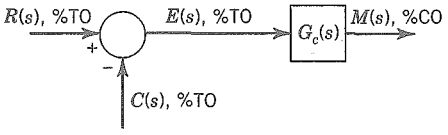


Figura 5-3.3 Representación de diagrama de bloques de un controlador.

Controlador proporcional (P)

El controlador proporcional es el tipo más simple de controlador que se examinará. La ecuación que describe su operación es

$$m(t) = \bar{m} + K_c e(t) \tag{5-3.4}$$

donde:

$m(t)$ = salida del controlador, %CO. El término $m(t)$ se utiliza para enfatizar que, en lo que al controlador se refiere, esta salida es la variable manipulada.

K_c = *ganancia del controlador*, $\dfrac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$

$\bar{m}$ = valor base (bias), %CO.

$\bar{m}$ es la salida del controlador cuando el error es cero; su valor es una constante, y se hace igual a la salida cuando el controlador se pasa al modo manual. Con mucha frecuencia se fija inicialmente a la mitad del rango, 50 %CO.

Nótese que como la variable controlada es la señal del transmisor con unidades %TO, la referencia también debe tener unidades %TO. Como la referencia se ingresa en unidades de ingeniería de la variable del proceso, el sistema de control (controlador) lo convierte a %TO. Esta conversión se lleva a cabo utilizando el rango del transmisor.

La ecuación 5-3.4 indica que la salida del controlador es proporcional al error entre la referencia y la variable controlada. La proporcionalidad está dada por la ganancia del controlador, K_c. Como resultado de la definición del error usada aquí, cuando K_c es positiva, un incremento en la variable controlada, $c(t)$, resulta en un decremento de la salida del controlador, $m(t)$. Por tanto, una K_c positiva resulta en un controlador de acción inversa. Para obtener un controlador de acción directa se debe usar una K_c negativa o invertir la definición del error, es decir, $e(t) = c(t) - r(t)$. En este texto se utilizará la definición del error de la ecuación 5-3.1 y se usará una K_c negativa cuando se requiera un controlador de acción directa. Sin embargo, la mayoría de los controladores por retroalimentación industriales no permiten ingresar ganancias negativas. En tales casos, el cálculo del error se invierte. El cambio en el cálculo del error lo hace internamente el controlador. El usuario no necesita hacer nada más que seleccionar la acción correcta. Nótese que sin importar la definición utilizada, el efecto de la referencia sobre la salida del controlador es opuesto al efecto de la variable controlada.

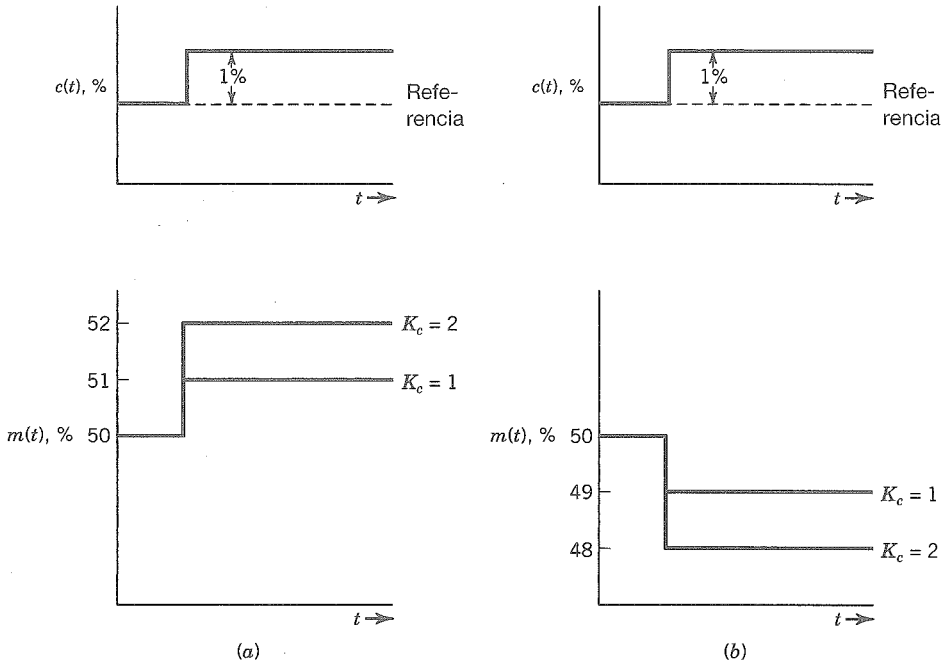


Figura 5-3.4 Efecto de la ganancia del controlador sobre la salida del controlador. (*a*) Controlador de acción directa. (*b*) Controlador de acción inversa.

La ganancia del controlador determina cuánto cambia la salida del controlador para un cambio dado en el error; esto se ilustra gráficamente en la figura 5-3.4. En la figura se muestra que entre mayor sea el valor de K_c, más cambiará la salida del controlador para un error dado. Por tanto, K_c establece la sensibilidad del controlador a un error, es decir, cuánto cambia la salida del controlador por unidad de cambio en el error.

Los controladores proporcionales tienen la ventaja de tener un parámetro único de sintonización, K_c. Sin embargo, presentan una importante desventaja: la variable controlada opera con un *corrimiento (offset).* El corrimiento se puede describir como una *desviación en estado estacionario de la variable controlada respecto a la referencia,* o simplemente como un *error de estado estacionario.* Para examinar el significado del corrimiento, considérese el lazo de control de nivel de líquido que se muestra en la figura 5-3.2. Las condiciones de operación de diseño son $\bar{f}_i = \bar{f}_o = 150$ gpm y $\bar{h} = 6$ ft. Se supone que para que la válvula de salida entregue 150 gpm, la señal que llega a ella debe ser de 50 %CO. Si el flujo de entrada, $f_i(t)$, se incrementa, entonces la respuesta del sistema con un controlador proporcional es como la de la figura 5-3.5. El controlador regresa la variable controlada a un valor estacionario, pero no a la referencia requerida. La diferencia entre la referencia y el nuevo estado estacionario es el corrimiento. El controlador proporcional no es "lo suficientemente inteligente" para llevar la variable controlada de vuelta a la referencia. El nuevo valor de estado estacionario satisface al controlador.

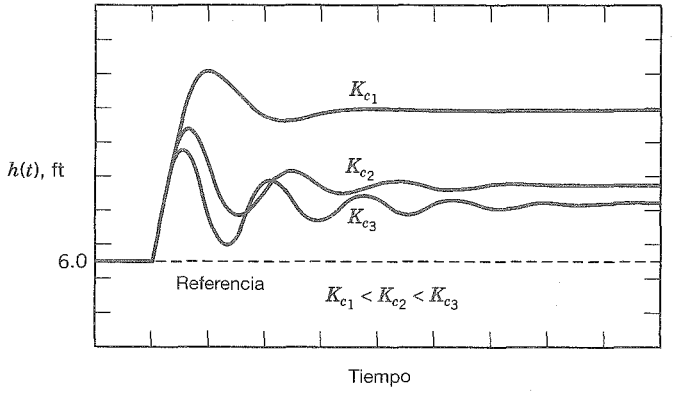


Figura 5-3.5 Respuesta del proceso de nivel de líquido.

En la figura 5-3.5 se muestran tres curvas de respuesta correspondientes a tres valores diferentes de K_c. Esta figura indica que entre mayor sea el valor de K_c menor será el corrimiento. Entonces, ¿por qué no fijar una ganancia máxima para eliminar el corrimiento? La figura 5-3.5 también muestra que aunque los valores altos de K_c reducen el corrimiento, también hacen que la respuesta del proceso sea más oscilatoria. En la mayoría de los procesos hay un valor máximo de K_c después del cual el proceso se vuelve inestable. Por lo tanto, hay un límite para el valor que se le puede asignar a K_c y que, al mismo tiempo, permita mantener la estabilidad. Por consiguiente, no es posible eliminar el corrimiento por completo. El cálculo de este valor máximo para la ganancia del controlador, llamada la *ganancia última,* K_{cu}, se presenta en los capítulos 6, 7 y 8.

A continuación se examina una explicación simple de por qué existe el corrimiento; en el capítulo 6 se presenta una discusión más rigurosa. Considérese el sistema de control de nivel de líquido que se muestra en la figura 5-3.2 con las mismas condiciones de operación dadas anteriormente, es decir, $\bar{f}_i = \bar{f}_o = 150$ gpm y $\bar{h} = 6$ ft. Recuérdese que el controlador proporcional, de acción directa $(-K_c)$, resuelve la siguiente ecuación

$$m(t) = 50\ \% + (-K_c)e(t) \tag{5-3.5}$$

Se supone ahora que el flujo de entrada se incrementa hasta 170 gpm. Cuando esto ocurre, el nivel del líquido se incrementa y el controlador incrementa su salida para abrir la válvula y reducir el nivel. Para alcanzar una nueva condición de estado estacionario, el flujo de salida debe ser ahora de 170 gpm. Para entregar este nuevo flujo, la válvula de salida debe abrirse más que antes, cuando necesitaba entregar 150 gpm. Ésta es una válvula del tipo cerrada en falla, por lo que se supone que la nueva señal requerida para que la válvula entregue 170 gpm es de 60%. Es decir, la salida del controlador debe ser de 60%. Considerando de nuevo la ecuación 5-3.5, se observa que la única manera de que la salida del controlador sea de 60% es que el segundo

término del lado derecho de la ecuación tenga un valor de +10% y para ello el término del error no puede ser cero en estado estacionario. *¡Este error requerido en estado estacionario es el corrimiento!* Nótese que un error negativo significa que la variable controlada es mayor que la referencia. El nivel real en pies se puede calcular a partir de los parámetros de calibración del transmisor de nivel.

Es necesario hacer hincapié en dos puntos de este ejemplo. Primero, la magnitud del corrimiento depende del valor de la ganancia del controlador. Debido a que el término total debe tener un valor de +10 %CO,

K_c	$e(\infty)$, Corrimiento, % TO
1	10
2	5.0
4	2.5

Como se señaló antes, a mayor ganancia, menor será el corrimiento. El lector debe recordar que por encima de cierto K_c, la mayoría de los procesos se vuelven inestables. Sin embargo, la ecuación del controlador no lo muestra; este hecho se examina en el capítulo 6.

Segundo, al parecer, lo único que hace un controlador proporcional es alcanzar una condición de operación de estado estacionario. Una vez que se alcanza un estado estacionario, el controlador se satisface. La cantidad de desviación de la referencia, o corrimiento, depende de la ganancia del controlador.

Muchos fabricantes de controladores no utilizan el término K_c como el parámetro de sintonización; usan el término *banda proporcional* (PB, por sus siglas en inglés). La relación entre la ganancia y la banda proporcional está dada por

$$\text{PB}=\frac{100}{K_c} \tag{5-3.6}$$

En estos casos, la ecuación que describe al controlador proporcional se escribe como

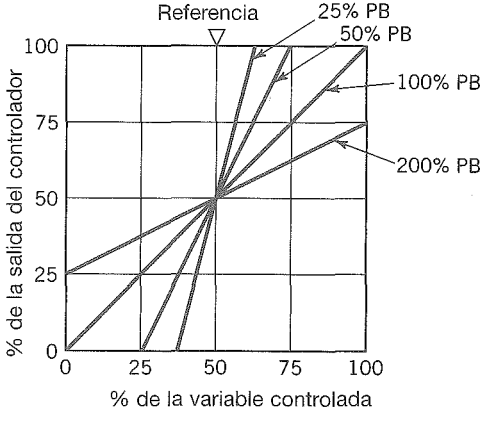
$$m(t)=\bar{m}+\frac{100}{\text{PB}}e(t) \tag{5-3.7}$$

A PB comúnmente se le llama el porcentaje de banda proporcional.

En la ecuación 5-3.6 se presenta un hecho de gran importancia. Una ganancia alta del controlador es lo mismo que una banda proporcional baja o angosta, y una ganancia baja del controlador es lo mismo que una banda proporcional alta o ancha. Un incremento de PB es similar a una reducción de K_c, de donde resulta un controlador menos sensible a un error. Una reducción de PB es similar a un incremento de K_c, de donde resulta un controlador más sensible. K_c y PB son recíprocos, por lo que es necesario tener cuidado cuando se sintoniza el controlador.

Se presenta ahora otra definición de banda proporcional. *La banda proporcional es el error (expresado en porcentaje del rango de la variable controlada) requerido para mover la salida*

del controlador desde su valor más bajo hasta el más alto. Considérese el lazo de control del intercambiador de calor de la figura 5-3.1. El transmisor de temperatura tiene un rango de 100°C a 300°C y la referencia del controlador es 200°C. En la figura 5-3.6 se da una explicación gráfica de esta definición de PB. La figura muestra que una PB de 100% significa que cuando la variable controlada varía en 100% de su rango, la salida del controlador varía en 100% de su rango. Una PB de 50% significa que cuando la variable controlada varía en 50% de su rango, la salida del controlador varía en 100% de su rango. Nótese, asimismo, que un controlador únicamente proporcional con una PB de 200% no moverá su salida en el rango completo. Una PB de 200% significa una ganancia muy pequeña del controlador, o una baja sensibilidad a los errores.



	Salida del controlador		
	0%	50%	100%
PB = 100%	100°C	200°C	300°C
PB = 50%	150°C	200°C	250°C
PB = 25%	175°C	200°C	225°C
PB = 200%		200°C	

Figura 5-3.6 Definición de banda proporcional.

Para obtener la función de transferencia del controlador proporcional se puede escribir la ecuación 5-3.1 como

$$m(t) - \bar{m} = K_c e(t)$$

o en forma de variables de desviación,

$$M(t) = K_c E(t)$$

donde $M(t) = m(t) - \bar{m}$ y $E(t)$ como se definió antes. Aplicando la transformada de Laplace se llega a la siguiente función de transferencia

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c \qquad \textbf{(5-3.8)}$$

La ecuación 5-3.8 es la función de transferencia de un controlador proporcional y la que se debe usar en la figura 5-3.3 cuando se utiliza este controlador.

Para resumir, los controladores proporcionales son los controladores más simples y ofrecen la ventaja de tener un solo parámetro de sintonización, K_c o PB. La desventaja de estos controladores es la operación con un corrimiento en la variable controlada. En algunos procesos, tales como el nivel en tanques de alivio, el piloto automático en un automóvil o un termostato en una casa, esto no trae mayores consecuencias. En los casos en los que el proceso se puede controlar en una banda alrededor de la referencia, los controladores proporcionales son suficientes. Sin embargo, cuando la variable del proceso debe controlarse en la referencia, no cerca de ella, los controladores proporcionales no proporcionan el control requerido.

Controlador proporcional integral (PI)

La mayoría de los procesos no pueden controlarse con un corrimiento; es decir, deben controlarse en la referencia. En estos casos, debe incorporarse una cantidad adicional de inteligencia al controlador proporcional para eliminar el corrimiento. Esta nueva inteligencia, o nuevo modo de control, es la acción integral, o de reajuste (*reset*); por consiguiente, el controlador se vuelve un controlador proporcional integral (PI). La ecuación que lo describe es

$$m(t) = \bar{m} + K_c e(t) + \frac{K_c}{\tau_i}\int e(t)dt \qquad \textbf{(5-3.9)}$$

donde τ_I = *tiempo integral* (o *de reajuste*). La mayoría de las veces, la unidad de tiempo utilizada es minutos; menos frecuente es el uso de segundos. Las unidades utilizadas dependen del fabricante. Por lo tanto, el controlador PI tiene dos parámetros, K_c y τ_I, y ambos deben ajustarse (sintonizarse) para obtener un control satisfactorio.

Para entender el significado físico del tiempo integral, τ_I, considérese el ejemplo hipotético mostrado en la figura 5-3.7. En algún tiempo, $t = 0$, un error constante de 1% de magnitud se introduce en el controlador. En ese momento, el controlador PI resuelve la siguiente ecuación

$$m(t) = 50\,\% + K_c(1) + \frac{K_c}{\tau_i}\int_0^t (1)dt$$

o bien,

$$m(t) = 50\,\% + K_c + \frac{K_c}{\tau_I}t$$

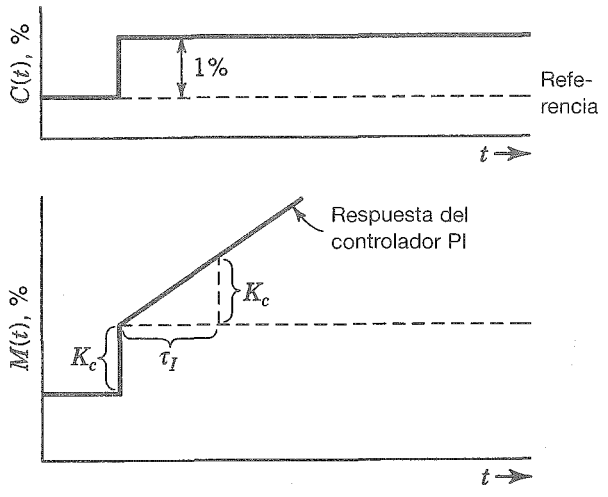


Figura 5-3.7 Respuesta del controlador PI (respuesta directa) a un cambio escalón en el error.

Cuando el error se introduce en el tiempo $t = 0$, la salida del controlador cambia de inmediato en una cantidad igual a K_c; ésta es la respuesta debida al modo proporcional. A medida que el tiempo se incrementa, la salida también se incrementa en forma de rampa como se expresa en la ecuación y se ilustra en la figura. Nótese que cuando $t = \tau_I$, la salida del controlador es

$$m(t) = 50\ \% + K_c + K_c$$

Por tanto, en una cantidad de tiempo igual a τ_I, el modo integral repite la acción tomada por el modo proporcional. Entre menor sea el valor de τ_I, más rápido integrará el controlador. Es necesario tener presente que entre menor sea el valor de τ_I, mayor será el término que antecede a la integral, K_c/τ_I, y por consiguiente, más peso tendrá el término que contiene la integral.

Para entender por qué el controlador PI elimina el corrimiento, considérese el sistema de control de nivel utilizado previamente para explicar el corrimiento requerido por un controlador P. En la figura 5-3.8 se muestra la respuesta del nivel bajo la acción de controladores P y PI a un cambio en el flujo de entrada de 150 gpm a 170 gpm. La respuesta con el controlador P muestra el corrimiento, mientras que la respuesta con el controlador PI muestra que el nivel regresa a la referencia, sin corrimiento. Bajo el control PI, mientras el error esté presente, el controlador continúa cambiando su salida (integrando el error). Una vez que el error desaparece (se hace cero), el controlador deja de cambiar su salida (integra una función con valor cero). Como se muestra en la figura, en el tiempo t_f el error desaparece. La señal a la válvula aún debe llegar a 60%, lo cual requiere que la válvula entregue 170 gpm. Considérese la ecuación del controlador PI en el momento en que se alcanza el estado estacionario:

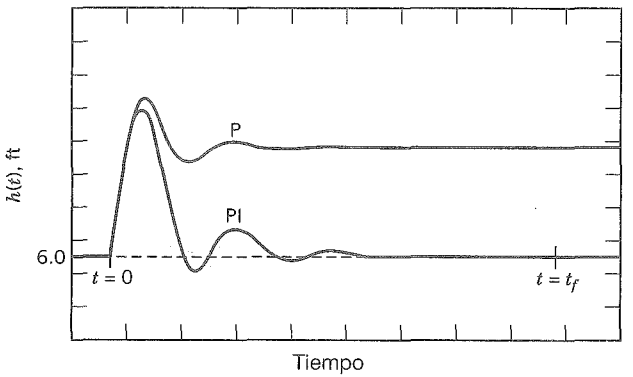


Figura 5-3.8 Respuesta del proceso de nivel de líquido bajo controladores P y PI.

$$m(t) = 50\% + K_c(0) + \frac{K_c}{\tau_I}\int (0)dt$$

o bien,

$$m(t) = 50\% + 0\% + 10\% - 60\%$$

La ecuación indica que incluso con un error "cero", el término de la integral no es "cero" sino 10%, lo cual produce la salida requerida de 60%. El hecho de que el error sea cero no significa que el valor del término de la integral sea cero. Significa que el término de la integral ¡permanece constante en el último valor! Integración significa área bajo la curva, y aunque el nivel sea el mismo en $t = 0$ y en $t = t_f$, el valor de la integral es diferente (un área diferente bajo la curva) en estos dos tiempos. El valor del término de la integral multiplicado por K_c/τ_I es igual a 10%. Una vez que el nivel regresa a la referencia, el error desaparece y el término de la integral permanece constante. *¡La integración es el modo que elimina el corrimiento!*

Se ha dado una explicación breve de por qué la acción integral elimina el corrimiento. En el capítulo 6 se presenta un análisis más riguroso.

Algunos fabricantes no utilizan el término tiempo integral, τ_I, para su parámetro de sintonización. Utilizan el recíproco del tiempo integral, al cual se hará referencia aquí como *tasa de integración*, τ_I^R, que es,

$$\tau_I^R = \frac{1}{\tau_I} \qquad \textbf{(5-3.10)}$$

Las unidades de τ_I^R son, por lo tanto, 1/tiempo, o simplemente (tiempo)$^{-1}$. Nótese que cuando se usa τ_I y se desea una integración más rápida, se debe utilizar un valor más pequeño en el controlador. Sin embargo, cuando se utiliza τ_I^R, se requiere un valor mayor para alcanzar el mismo efecto. Por tanto, antes de sintonizar el tiempo integral, el usuario debe saber si el controlador utiliza tiempo integral (tiempo) o tasa de integración (tiempo^{-1}). *τ_I y τ_I^R son recíprocos, por lo que sus efectos son opuestos.*

Como se vio en la sección anterior, en el modo proporcional se utilizan dos términos (K_c y PB), y se acaba de ver que también hay dos términos en el modo integral (τ_I y τ_I^R. Esto puede resultar confuso, por lo que es muy importante tener en mente las diferencias cuando se sintoniza un controlador. Las ecuaciones 5-3.9, 5-3.11, 5-3.12 y 5-3.13 muestran cuatro posibles combinaciones (la ecuación 5-3.24 de la sección 5-3.3 también presenta una combinación más) de los parámetros de sintonización; se hará referencia a la ecuación 5-3.9 como el *controlador clásico:*

$$m(t) = \bar{m} + \frac{100}{\text{PB}} e(t) + \frac{100}{\text{PB} \cdot \tau_I} \int e(t)dt \tag{5-3.11}$$

$$m(t) = \bar{m} + \frac{100}{\text{PB}} e(t) + \frac{100\,\tau_I^R}{\text{PB}} \int e(t)dt \tag{5-3.12}$$

$$m(t) = \bar{m} + K_c e(t) + K_c \tau_I^R \int e(t)dt \tag{5-3.13}$$

Utilizando el mismo procedimiento que para el controlador proporcional, se obtiene la siguiente función de transferencia para el controlador PI a partir de la ecuación 5-3.9:

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) = K_c \left(\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s}\right) \tag{5-3.14}$$

Para resumir, los controladores proporcionales integrales tienen dos parámetros de sintonización: la ganancia o banda proporcional y el tiempo integral o tasa de integración. *Su ventaja es que la integración elimina el corrimiento.* Cerca del 85% de los controladores en uso son de este tipo.

Controlador proporcional integral derivativo (PID)

En ocasiones se agrega otro modo de control al controlador PI. Este nuevo modo de control es la acción derivativa, la cual también se denomina tasa de cambio o preactuación. Su propósito es anticipar hacia dónde se dirige el proceso mediante la observación de la tasa de cambio del error con el tiempo, es decir, su derivada. La ecuación que la describe es

$$m(t) = \bar{m} + K_c e(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int e(t)dt + K_c \tau_D \frac{de(t)}{dt} \tag{5-3.15}$$

donde τ_D = *tiempo (o tasa) derivativo(a).* La mayoría de las veces la unidad de tiempo utilizada son minutos, sin embargo algunos fabricantes usan segundos.

El controlador PID tiene tres términos, K_c o PB, τ_I o τ_I^R, y τ_D, que deben ajustarse (sintonizarse) para obtener un control satisfactorio. La acción derivativa le da al controlador la capacidad de anticipar hacia dónde se dirige el proceso –es decir, "mirar hacia adelante"–

mediante el cálculo de la derivada del error. La cantidad de "anticipación" se decide con el valor del parámetro de sintonización, τ_D.

Considérese el intercambiador de calor mostrado en la figura 5-3.1, el cual se usa para aclarar lo que se entiende por anticipación. Se supone que la temperatura de entrada al proceso se reduce en cierta cantidad y que la temperatura de salida comienza a caer gradualmente, como se muestra en la figura 5-3.9. En el tiempo t_a, la cantidad del error es positiva y pequeña. Por consiguiente, la cantidad de corrección de control provista por los modos proporcional e integral es pequeña. Sin embargo, la derivada de este error, la pendiente de la curva del error, es grande y positiva, lo que hace que la acción de corrección de control que proporciona el modo derivativo sea grande. Mediante la observación de la derivada del error, el controlador sabe que la variable controlada se está apartando de la referencia con gran rapidez y utiliza este hecho para ayudar a controlarla. En el tiempo t_b, el error sigue siendo positivo y es mayor que antes. La cantidad de corrección de control que proporcionan los modos proporcional e integral también es más grande que antes y se sigue sumando a la salida del controlador para abrir más la válvula de vapor. Sin embargo, en este momento la derivada del error es negativa, indicando que el error se está reduciendo; es decir, la variable controlada ha empezado a regresar a la referencia. Utilizando este hecho, el modo derivativo comienza a restar en los otros dos modos, debido a que reconoce que el error se está reduciendo. Este algoritmo produce una reducción del sobrepaso y las oscilaciones alrededor de la referencia.

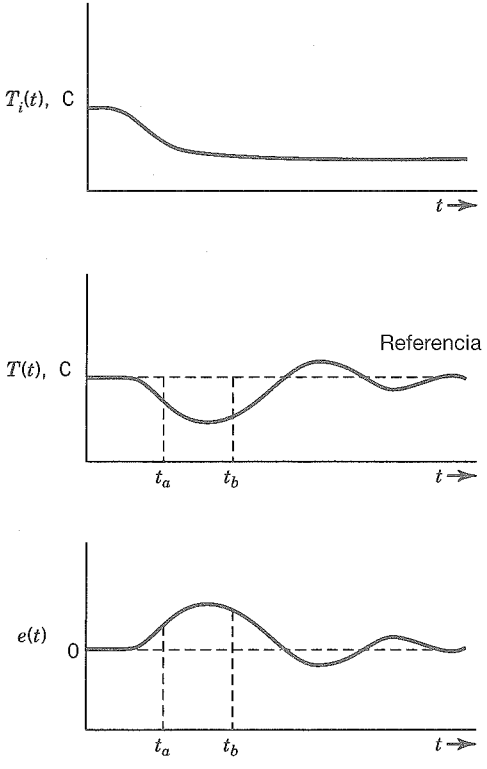


Figura 5-3.9 Control del intercambiador de calor.

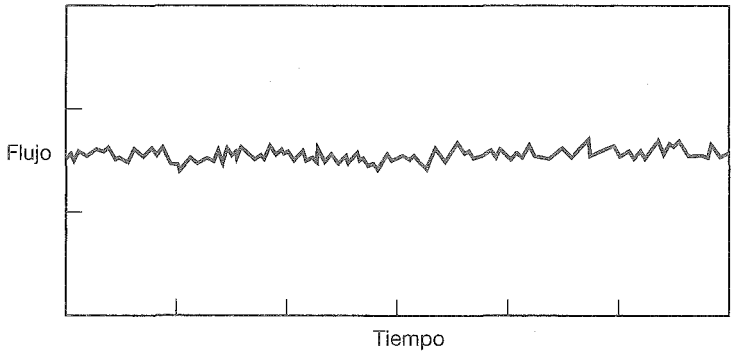


Figura 5-3.10 Registro del flujo.

El uso de controladores PID se recomienda en procesos lentos (procesos con constantes de tiempo grandes), tales como lazos de temperatura, en los que por lo común no hay ruido. Los procesos rápidos (procesos con constantes de tiempo pequeñas) son fácilmente susceptibles al ruido del proceso. Casos típicos de procesos rápidos son los lazos de flujo y los lazos de presión de líquido. Considérese el registro del comportamiento de un flujo que se muestra en la figura 5-3.10. La utilización del modo derivativo sólo resultaría en la amplificación del ruido, debido a que la derivada del ruido con cambios rápidos es un valor grande. Los procesos con constantes de tiempo grandes por lo general son amortiguados y, por consiguiente, son menos susceptibles al ruido.

La función de transferencia de un controlador PID se obtiene utilizando el mismo procedimiento seguido para los controladores P y PI

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s\right) \tag{5-3.16}$$

De hecho, cuando el controlador PID se implementa con la ecuación 5-3.16 no opera muy bien. Para mejorar el desempeño del modo derivativo, el algoritmo se modifica ligeramente:

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c\left[1 + \frac{1}{\tau_I s} + \frac{\tau_D s}{\alpha\tau_D s + 1}\right] \tag{5-3.17}$$

La ecuación muestra que la parte derivativa está multiplicada por el término $1/(\alpha\tau_D s + 1)$. Este término, que se puede reconocer como la función de transferencia de un sistema de primer orden con ganancia unitaria y constante de tiempo $\alpha\tau_D$, se conoce como *filtro*. El filtro por lo general no afecta el desempeño del controlador ya que su constante de tiempo, $\alpha\tau_D$, es pequeña. Los valores típicos de α varían de 0.05 a 0.2, dependiendo del fabricante.

La ecuación 5-3.17 se puede reordenar algebraicamente como

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c\left[\frac{(\alpha+1)\tau_D s + 1}{\alpha\tau_D s + 1} 1 + \frac{1}{\tau_I s}\right] \tag{5-3.18}$$

El término $[(\alpha + 1)\tau_D s + 1]/(\alpha\tau_D s + 1)$ es una unidad de adelanto/atraso que se presentó en el capítulo 2 y se examinará con mayor detalle en el capítulo 11. Esta función de transferencia muestra al controlador PID como una unidad de adelanto/atraso en paralelo con una integración.

En los controladores analógicos y en muchos controladores basados en computadora, la función de transferencia utilizada para describir a los controladores PID es

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c'\left(1 + \frac{1}{\tau_I' s}\right)\left(\frac{\tau_D' s + 1}{\alpha\tau_D' s + 1}\right) \tag{5-3.19}$$

En la figura 5-3.11 se muestra el diagrama de bloques de la ecuación 5-3.19. Dicho diagrama muestra que este controlador PID puede considerarse como una unidad de adelanto/atraso en serie con un controlador PI, conocido en ocasiones como "tasa de cambio antes de integración".

En la ecuación 5-3.19 se ha utilizado la notación de primas para indicar que los parámetros de sintonización no son los mismos que en las ecuaciones 5-3.16 o 5-3.17. Usando manipulaciones algebraicas con las ecuaciones 5-3.16 y 5-3.19 se pueden obtener las siguientes relaciones

$$K_c' = K_c\left(0.5 + \sqrt{0.25 - \frac{\tau_D}{\tau_I}}\right)$$

$$\tau_I' = \tau_I\left(0.5 + \sqrt{0.25 - \frac{\tau_D}{\tau_I}}\right) \tag{5-3.20}$$

$$\tau_D' = \frac{\tau_D}{0.5 + \sqrt{0.25 - \frac{\tau_D}{\tau_I}}}$$

En el capítulo 6 se muestra cómo obtener los parámetros de sintonización K_c, τ_I, τ_D, K_c', τ_I', y τ_D'.

El controlador descrito por la ecuación 5-3.16 en ocasiones se llama el PID "ideal", mientras que es común llamar al controlador descrito por la ecuación 5-3.19 el PID real.

Para resumir, los controladores PID tienen tres parámetros de sintonización: la ganancia o banda proporcional, el tiempo o tasa de integración y el tiempo derivativo. Los controladores PID se recomiendan para procesos sin ruido. La ventaja del modo derivativo es la anticipación.

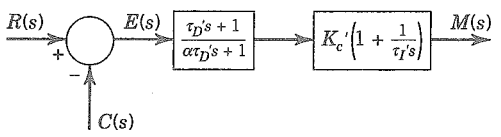


Figura 5-3.11 Diagrama de bloques del controlador PID, ecuación 5-3.19.

Controlador proporcional derivativo (PD)

Este controlador se utiliza en procesos donde se puede emplear un controlador proporcional, donde un corrimiento del estado estacionario es aceptable, pero donde se desea alguna cantidad de anticipación y el proceso no tiene ruido. La ecuación que lo describe es

$$m(t) = \bar{m} + K_c e(t) + K_c \tau_D \frac{de(t)}{dt} \tag{5-3.21}$$

y la función de transferencia "ideal" es

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c(1 + \tau_D s) \tag{5-3.22}$$

mientras que la función de transferencia del controlador "real", o implementada, es

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c \left[\frac{(\alpha + 1)\tau_D s + 1}{\alpha \tau_D s + 1} \right] \tag{5-3.23}$$

5-3.3 Modificaciones al controlador PID y comentarios adicionales

En la sección 5-3.2 se señalaron las diferencias entre los parámetros de sintonización: K_c en comparación con PB y τ_I en comparación con τ_I^R. Resulta desafortunado que no haya un conjunto único de parámetros, pero es un hecho, y el ingeniero debe tener presentes estas diferencias. Hay un conjunto más de parámetros utilizados por algunos fabricantes:

$$m(t) = \bar{m} + K_c e(t) + K_I \int e(t)dt + K_D \frac{de(t)}{dt} \tag{5-3.24}$$

Los tres parámetros de sintonización en este caso son K_c, K_I y K_D.

Existen otras modificaciones comunes que se encuentran en algunos controladores. En la figura 5-3.12*a* se muestra la manera común de introducir un cambio en la referencia. Cuando esto se lleva a cabo, también se introduce un cambio escalón en el error, como se muestra en la figura 5-3.12*b*. Debido a que el cálculo de la acción derivativa se basa en el error, este cálculo produce un cambio drástico en la salida del controlador (ver la figura 5-3.12*c*). Este cambio es innecesario y por lo general va en detrimento de la operación del proceso. La manera más común

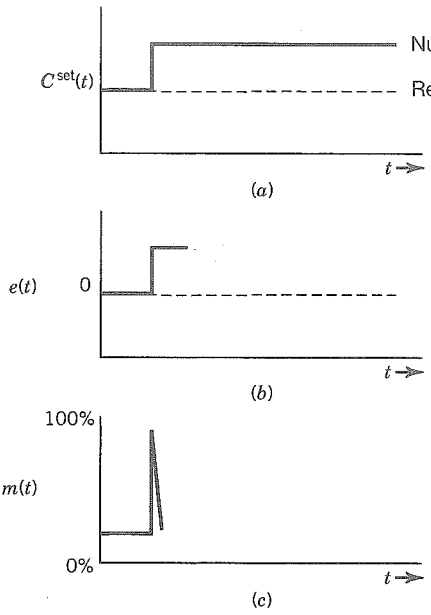


Figura 5-3.12 Efecto de los cambios en la referencia sobre controladores PID.

de evitar este problema es utilizar el negativo de la derivada de la variable controlada, $-dc(t)/dt$, en lugar de la derivada del error. Es decir,

$$m(t) = \bar{m} + K_c e(t) + \frac{K_c}{\tau_I}\int e(t)dt - K_c \tau_D \frac{dc(t)}{dt} \qquad \textbf{(5-3.25)}$$

La respuesta de ambas derivadas es la misma cuando la referencia es constante

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{d[r(t) - c(t)]}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} - \frac{dc(t)}{dt}$$

Cuando la referencia es constante, el primer término de la derivada en el lado derecho de la ecuación es cero y, por tanto,

$$\frac{de(t)}{dt} = -\frac{dc(t)}{dt}$$

En el momento en que cambia la referencia, la "nueva" derivada no produce un cambio drástico en la respuesta. Poco tiempo después, las respuestas de las dos derivadas vuelven a ser la misma. La transformada de Laplace de la ecuación 5-3.25 está dada por la ecuación 5-3.26:

$$M(s) = K_c\left(\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)E(s) - \tau_D C(s)\right) \qquad \textbf{(5-3.26)}$$

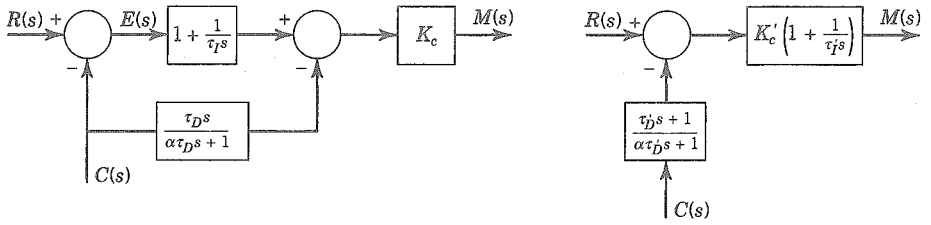


Figura 5-3.13 Diagrama de bloques del controlador PID con derivada en la variable del proceso. (*a*) Ecuación 5-3.27. (*b*) Ecuación 5-3.28.

o bien,

$$M(s) = K_c\left(\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)E(s) - \frac{\tau_D s}{\alpha\tau_D s+1}C(s)\right) \tag{5-3.27}$$

o bien,

$$M(s) = K_c'\left(1+\frac{1}{\tau_I' s}\right)\left[R(s) - \frac{\tau_D' s+1}{\alpha\tau_D' s+1}C(s)\right] \tag{5-3.28}$$

En la figura 5-3.13 se presentan los diagramas de bloque de las ecuaciones 5-3.27 y 5-3.28. A esta modificación se le conoce comúnmente como la *variable en la derivada del proceso.*

El algoritmo presentado en la ecuación 5-3.25 reduce drásticamente el efecto no deseado de los cambios de referencia sobre la respuesta del algoritmo. Sin embargo, el término proporcional, $K_c e(t) = K_c[r(t) - c(t)]$, sigue produciendo una respuesta súbita cuando la referencia cambia. Este cambio súbito en la respuesta debido al modo proporcional recibe el nombre de *salto proporcional.* Bajo ciertas circunstancias, como por ejemplo para valores grandes de K_c, esta respuesta también puede ir en detrimento de la operación del proceso. En ocasiones se propone la siguiente modificación

$$m(t) = \bar{m} - K_c c(t) + \frac{K_c}{\tau_I}\int e(t)dt - K_c\tau_D\frac{dc(t)}{dt} \tag{5-3.29}$$

Los algoritmos mostrados en las ecuaciones 5-3.15, 5-3.25 y 5-3.29 son diferentes en su respuesta a los cambios en la referencia; sin embargo, su respuesta es la misma en caso de haber perturbaciones.

Otra modificación al algoritmo PID básico es aquella donde el cálculo de control se basa en el cuadrado del error, o

$$m(t) = \bar{m} + K_c\left[|e(t)|e(t) + \frac{1}{\tau_I}\int e(t)dt + \tau_D\frac{de(t)}{dt}\right] \tag{5-3.30}$$

La idea básica es que cuando el error es pequeño, no se requiere mucha acción correctiva. Cuando el valor de $e(t)$ es pequeño, $|e(t)|$ $e(t)$ es más pequeño y no se obtiene mucha acción de control. Sin embargo, cuando $e(t)$ es grande, se requiere una acción correctiva significativa para regresar a la referencia. En este caso, el valor de $|e(t)|$ $e(t)$ es más grande y proporciona la acción requerida. Los controladores de error al cuadrado por lo general son difíciles de sintonizar. Han demostrado algunas ventajas en el control de procesos integrantes, como los lazos de nivel.

El controlador de banda muerta, también conocido como controlador PID-gap, no es realmente una modificación del algoritmo básico de PID. En este controlador, siempre que la variable controlada esté dentro de determinados márgenes de tolerancia preestablecidos, o banda, respecto de la referencia (por ejemplo, ±1%, ±3%, etc.) no se toma ninguna acción. La lógica de este controlador es que estas pequeñas desviaciones se deben tan sólo al ruido y no son realmente desviaciones del proceso, por lo que no hay necesidad de tomar ninguna acción correctiva. Fuera de la banda prescrita, el controlador opera como de costumbre.

Se examina ahora otra alternativa en los controladores. Considérese el intercambiador de calor de la figura 5-3.1. El controlador de temperatura está en automático y ejecuta el control en la referencia, digamos a 140°C. Es decir, tanto la referencia como la variable controlada están en 140°C. Entonces, por alguna razón, el operador o el ingeniero ajusta el controlador en modo manual e incrementa la salida del controlador. Esta acción abre la válvula, permitiendo que más vapor entre al intercambiador. Como resultado, la temperatura se incrementa a un nuevo valor, digamos 150°C. Si el controlador se ajusta ahora en automático, detectará un error, pues la referencia está aún en 140°C y la variable controlada está ahora en 150°C. El controlador, por supuesto, cierra repentinamente la válvula para corregir la desviación. Este súbito cambio en la señal a la válvula representa un "sobresalto" en el proceso que en algunos casos puede ir en detrimento de la operación. Si se desea una *transferencia sin sobresalto* cuando se hace el cambio de modo manual a automático, el error debe ser cero; esto es, la referencia y la variable controlada deben ser iguales. El error se puede hacer cero manualmente reduciendo la salida del controlador para restaurar la temperatura en 140°C, o bien incrementando la referencia a 150°C para que corresponda con la temperatura del proceso. Una vez que se toma cualquiera de estas dos acciones, se obtiene una transferencia sin sobresalto cuando el controlador se pasa a modo automático. Los controladores basados en computadora ofrecen una opción estándar llamada *rastreo* (*tracking*) o, específicamente en este caso, *rastreo de la variable del proceso* (*PV-tracking*), la cual permite realizar una transferencia sin sobresalto automáticamente. Cuando se selecciona esta opción, siempre que el controlador esté en modo manual, la referencia se fuerza a ser igual a la variable controlada; es decir, la referencia sigue a la variable controlada. Esta acción produce un error cero mientras el controlador está en modo manual y, por consiguiente, en el momento de hacer la transferencia a automático. Una vez que el controlador está en automático, la referencia permanece en el nuevo valor, 150°C en el ejemplo presentado, no en el valor original de 140°C. Nótese que el rastreo de la variable del proceso es una opción y no tiene que seleccionarse cuando se programa/configura el controlador. Las opciones de rastreo son bastante útiles en las estrategias de control para conseguir un desempeño seguro y mejorado.

5-3.4 Saturación de la integral y su prevención

El problema de saturación de la integral es bastante real e importante en el control de procesos. Puede ocurrir siempre que un controlador contiene el modo de control integral. Se usará el lazo de control del intercambiador de calor mostrado en la figura 5-3.1 para explicar este problema.

Supóngase que la temperatura de entrada del proceso baja en una magnitud inusualmente grande. Esta perturbación reducirá la temperatura de salida. Como consecuencia, el controlador (PI o PID) le pedirá a la válvula de vapor que se abra. Debido a que se trata de una válvula del tipo cerrada en falla, la señal del controlador se incrementará hasta que, debido a la acción integral, la temperatura de salida se haga igual a la referencia deseada. Pero supóngase que al tratar de regresar la variable controlada a la referencia, el controlador integra hasta 100% porque la caída en la temperatura de entrada es muy grande. En este punto, la válvula de vapor está completamente abierta, por lo que el lazo de control no puede hacer nada más. Básicamente, el proceso está fuera de control. Esto se ilustra gráficamente en la figura 5-3.14, donde se muestra

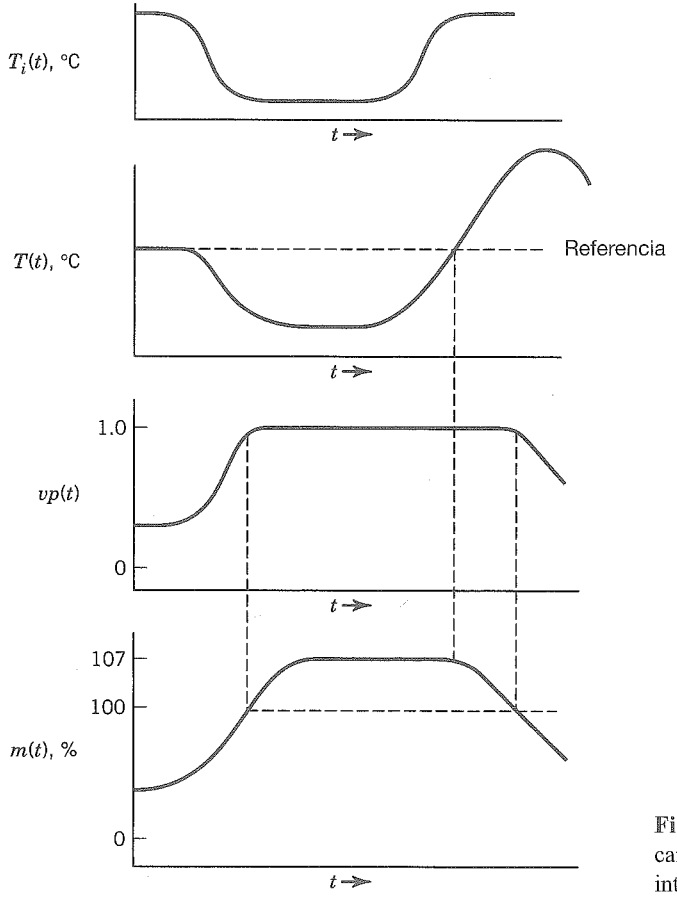


Figura 5-3.14 Control del intercambiador de calor: saturación de la integral.

que cuando la válvula está completamente abierta, la temperatura de salida no está en la referencia. Debido a que sigue habiendo un error, el controlador tratará de corregirlo incrementando (integrando el error) aún más su salida, aun cuando la válvula no se abrirá más después de 100%. La salida del controlador en realidad puede integrar por encima de 100%. Algunos controladores pueden integrar entre −15% y 115%, otros entre −7% y 107%, otros entre −5% y 105%. Los controladores analógicos también pueden integrar fuera de sus límites de 3-15 psig o 4-20 mA. Supóngase que el controlador que se está utilizando puede integrar hasta 107%. En ese punto, el controlador no puede aumentar más su salida; su salida se ha saturado. Este estado también se muestra en la figura 5-3.14. Esta saturación debido a la acción integral del controlador se conoce como *saturación de la integral*.

Supóngase ahora que la temperatura de entrada se incrementa a su valor inicial; la temperatura de salida, a su vez, empezará a incrementarse, como también se muestra en la figura 5-3.14. Esta figura muestra que la temperatura de salida alcanza y sobrepasa la referencia y que la válvula permanece completamente abierta cuando en realidad debería estar cerrándose. La válvula no se está cerrando porque el controlador debe integrar desde 107% hasta 100% antes de que empiece a hacerlo. Para cuando esto ocurre, la temperatura de salida ha sobrepasado la referencia en una cantidad importante.

Como se ha señalado, este problema de saturación de la integral puede ocurrir siempre que haya integración en el controlador. Esta situación se puede evitar si el controlador se ajusta en modo manual tan pronto como su salida alcanza 100% (o 0%); esta acción detendrá la integración. El controlador se puede volver a poner en automático cuando la temperatura comience a bajar (o aumentar) de nuevo. La desventaja de esta operación es que requiere la atención del operador. Nótese que la prevención de la saturación de la integral requiere detener la integración, no limitar la salida del controlador cuando este último alcanza el límite de 0% o 100%. En la figura 5-3.15 se muestra un limitador sobre la salida del controlador que no evita la saturación. Aunque la salida no rebasa los límites, el controlador aún puede saturarse internamente debido a que es el modo integral el que se satura.

Hay una manera ingeniosa de limitar la integración cuando la salida del controlador alcanza su límite. Considérese la función de transferencia del controlador PI

$$M(s) = K_c\left[1 + \frac{1}{\tau_I s}\right]E(s)$$

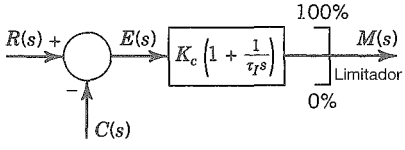


Figura 5-3.15 Controlador con limitación en la salida.

o bien,

$$M(s) = K_c E(s) + M_I(s) \tag{5-3.31}$$

donde

$$M_I(s) = \frac{K_c}{\tau_I s} E(s)$$

o bien,

$$\tau_I s M_I(s) = K_c E(s) \tag{5-3.32}$$

De la ecuación 5-3.31 se obtiene

$$K_c E(s) = M(s) - M_I(s) \tag{5-3.33}$$

Igualando las ecuaciones 5-3.32 y 5-3.33 y reordenando términos se obtiene

$$M_I(s) = \frac{1}{\tau_I s + 1} M(s) \tag{5-3.34}$$

La implementación de las ecuaciones 5-3.31 y 5-3.34 se muestra en la figura 5-3.16. Cuando el limitador se coloca como se muestra en la figura, $M_I(s)$ se limitará automáticamente. $M_I(s)$ siempre está rezagada con respecto a $M(s)$ con una ganancia de 1 y un parámetro τ_I ajustable, por lo que nunca se puede salir del rango dentro del cual está limitada $M(s)$. En otras palabras, si $M(s)$ alcanza uno de sus límites, $M_I(s)$ se acercará a ese límite, por ejemplo, 100%. Entonces, en el momento en que el error se vuelva negativo la salida del controlador es

$$m(t) = 100 + K_c e(t) < 100\% \qquad \textit{cuando } e(t) < 0$$

Es decir, la salida del controlador se separa del límite ¡cerrando la válvula en el instante en que la variable controlada cruza la referencia!

Nótese que en estado estacionario el error es cero y

$$M(s) = M_I(s) = M_I(s) + K_c E(s)$$

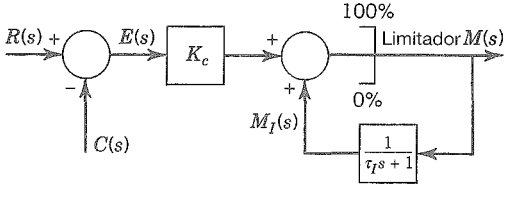


Figura 5-3.16 Diagrama de bloques de la implementación de una integral por retroalimentación.

y para que esto se cumpla, $E(s) = 0$. Por tanto, no hay corrimiento. Esta manera de implementar la protección contra la saturación se conoce comúnmente como *integral por retroalimentación* (RFB, por sus siglas en inglés).

La protección contra la saturación de la integral es una opción que se debe comprar en controladores analógicos. Es una característica estándar en cualquier controlador basado en computadora.

La saturación de la integral ocurre en cualquier momento en el cual el controlador no está a cargo, como cuando se abre una válvula de paso manual o cuando no hay suficiente potencia en la variable manipulada. También ocurre con frecuencia en los procesos por lotes, en el control en cascada y cuando más de un controlador, como en esquemas de control override, maneja un elemento final de control. El control en cascada se presenta en el capítulo 9 y el control override se presenta en el capítulo 10.

5-3.5 Resumen de los controladores por retroalimentación

En esta sección se ha presentado el tema de los controladores de procesos. El propósito de los controladores es ajustar la variable manipulada a fin de mantener la variable controlada en la referencia. Se consideró la importancia de la acción del controlador (inversa o directa) y cómo seleccionarla. Se examinaron los diferentes tipos de controladores, incluyendo la importancia de la ganancia de los parámetros de sintonización (K_c) o banda proporcional (PB), del tiempo integral (τ_I) o tasa de integración (τ_I^R) y del tiempo derivativo (τ_D). Finalmente, se presentó el tema de la saturación de la integral y se examinó su importancia.

Aún no se ha tratado el importante tema de obtener los valores óptimos de los parámetros de sintonización. La "sintonización del controlador" se presenta en el capítulo 7.

5-4 RESUMEN

En este capítulo se examinaron algunos de los elementos necesarios para construir un sistema de control. El capítulo se inició con una breve mirada a algunos de los términos relacionados con sensores y transmisores y con una discusión de los parámetros que describen a estos dispositivos. Continuó con algunas consideraciones importantes acerca de las válvulas de control, tales como la posición en falla, el dimensionamiento y las características. Se remite al lector al apéndice C para mayor información sobre sensores, transmisores y válvulas.

Se continuó con un análisis de los controladores de procesos por retroalimentación. Se presentaron los cuatro tipos más comunes de controladores, junto con algunas modificaciones. Se explicó el significado físico de sus parámetros. La sintonización de estos parámetros se presenta en el capítulo 7.

Ahora estamos listos para aplicar lo que se ha aprendido en los cinco primeros capítulos de este libro para diseñar sistemas de control de procesos.

REFERENCIAS

1. *Control Valve Handbook*, Marshalltown, Iowa: Fisher Controls Co.
2. *Masoneilan Handbook for Control Valve Sizing,* Norwood, MA: Masoneilan International, Inc.
3. *Fisher Catalog 10*, Marshalltown, Iowa: Fisher Controls Co.

PROBLEMAS

5-1. Calcular la ganancia, en porcentaje de salida del transmisor (%TO) por unidad de variable (especificar las unidades), escribir la función de transferencia y trazar el diagrama de bloques para cada uno de los siguientes casos:

a) Un transmisor de temperatura con un rango de 100°C a 150°C y una constante de tiempo de 1.2 minutos.
b) Un transmisor de temperatura con un rango de 100°F a 350°F y una constante de tiempo de 0.5 minutos.
c) Un transmisor de presión con un rango de 0 psig a 50 psig y una constante de tiempo de 0.05 minutos.
d) Un transmisor de nivel con un rango de 0 ft a 8 ft y una constante de tiempo despreciable.
e) Un transmisor de flujo, constituido por un transmisor de presión diferencial que mide la caída de presión a través de un orificio dimensionado para un flujo máximo de 750 gpm, cuando el flujo es 500 gpm. La constante de tiempo es despreciable.

5-2. Los niveles de líquido en tanques de almacenamiento por lo general se determinan midiendo la presión en el fondo del tanque. En uno de estos tanques se cambió el material almacenado y ocurrió un derrame. ¿Por qué? (Copyright 1992, American Institute of Chemical Engineers; reproducido con permiso del Center for Chemical Process Safety del AIChE.)

5-3. A un operador le pidieron que controlara la temperatura de un reactor en 60°C. El operador ajustó la referencia del controlador de temperatura en 60. La escala indicaba en realidad entre 0% y 100% del rango de temperatura de 0°C a 200°C. Esto causó una reacción fuera de control que sobrepresurizó el tanque. Hubo una descarga de líquido y el operador sufrió heridas. ¿Cuál fue la temperatura de referencia que fijó realmente el operador? (Copyright 1992, American Institute of Chemical Engineers; reproducido con permiso del Center for Chemical Process Safety del AIChE.)

5-4. Especificar la acción de seguridad adecuada para las válvulas en las siguientes aplicaciones. Especificar si son del tipo abierta en falla o cerrada en falla.

a) Un solvente inflamable se calienta con vapor en un intercambiador de calor. La válvula manipula el flujo de vapor al intercambiador.

b) Una válvula manipula el flujo del reactivo que llega al tanque de un reactor. La reacción es exotérmica.
c) Una válvula manipula el flujo del reactivo que llega al tanque de un reactor. La reacción es endotérmica.
d) Una válvula manipula el flujo de gas natural (combustible) a un horno. Otra válvula manipula el flujo de aire de combustión al mismo horno.

(Copyright 1992, American Institute of Chemical Engineers; reproducido con permiso del Center for Chemical Process Safety del AIChE.)

5-5. Dimensionar una válvula de control para regular un flujo de vapor saturado que entra a un calentador a 50 psig. El flujo nominal es 1200 lb/h y la presión de salida es 5 psig.

a) Obtener el coeficiente C_v para 50% de sobrecapacidad (suponer que $C_f = 0.8$).
b) Obtener la ganancia de la válvula en (lb/h)/%CO (suponer que la válvula es lineal con caída de presión constante).

5-6. El flujo nominal de líquido a través de una válvula de control es 52 500 lb/h y el flujo máximo requerido es 160 000 lb/h. Las condiciones de operación requieren una presión de entrada de 229 psia y una presión de salida de 129 psia. A la temperatura de flujo de 104°F, el líquido tiene una presión de vapor de 124 psia, una gravedad específica de 0.92 y una viscosidad de 0.2 cp. La presión crítica del líquido es 969 psia. (Véanse en el apéndice C las fórmulas para el dimensionamiento de válvulas para líquidos con vaporización.) Obtener el coeficiente C_v de la válvula.

5-7. Una válvula de control debe regular el flujo de un gas con peso molecular de 44. Las condiciones de diseño del proceso requieren un flujo nominal de 45 000 scfh, una presión y una temperatura de entrada de 110 psig y 100°F, respectivamente, y una presión de salida de 11 psig.

a) Obtener el coeficiente C_v para 100% de sobrecapacidad (suponer que $C_f = 0.85$).
b) Obtener la ganancia de la válvula en scfh/%CO (suponer que la válvula es lineal con caída de presión constante).

5-8. Se le ha pedido que diseñe una válvula de control para regular el flujo de benceno en la línea mostrada en la figura P5-1. El diseño del proceso requiere un flujo nominal de 100 000 kg/h y una temperatura de 155°C. Para el flujo de diseño, la caída de presión por fricción en la línea entre los puntos 1 y 2 es 100 kPa. La densidad del benceno a la temperatura de flujo es 730 kg/m^3. Suponer que las presiones mostradas en el diagrama no cambian con el flujo.

a) Recomendar una ubicación apropiada para la válvula de control.
b) Dimensionar la válvula para 100% de sobrecapacidad.

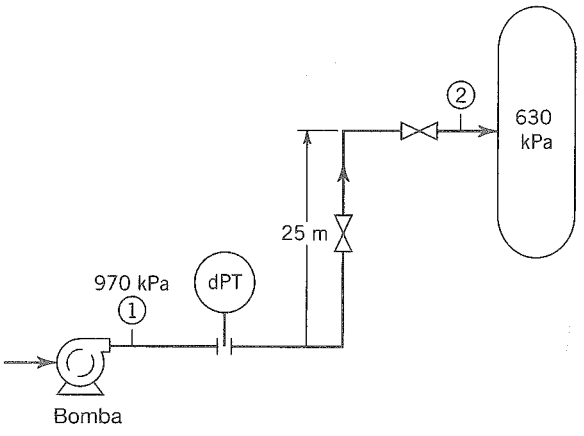


Figura P5-1 Proceso de benceno para los problemas 5-8 y 5-12.

5-9. En la línea del diagrama de la figura P5-2 fluye etilbenceno a 950 gpm (nominales) y 445°F (densidad = 42.0 lb/ft^3). La caída de presión por fricción entre los puntos 1 y 2 es 12.4 psi.

a) Recomendar una ubicación apropiada para la válvula de control.
b) Dimensionar la válvula para 100% de sobrecapacidad.

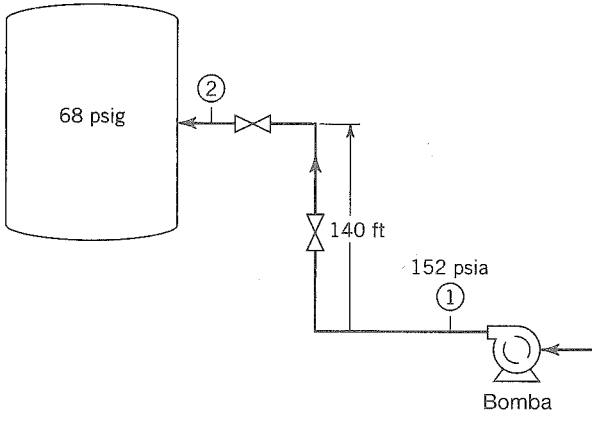


Figura P5-2 Proceso de etilbenceno para los problemas 5-9 y 5-13.

5-10. El flujo nominal de un líquido a través de una válvula de control es 480 gpm. Con este flujo, la caída de presión por fricción en la línea es 15 psi. La caída de presión total

disponible en la línea y la válvula es de 20 psi, independientemente del flujo, y la gravedad específica del líquido es 0.85.

a) Dimensionar la válvula para 100% de sobrecapacidad.
b) Encontrar el flujo a través de la válvula cuando está completamente abierta. (*Sugerencia:* no es 960 gpm.)
c) Calcular la ganancia de la válvula para el flujo de diseño suponiendo que tiene características inherentes lineales.
d) Obtener la rangeabilidad de la válvula.

Enunciar las suposiciones utilizadas para resolver este problema.

5-11. Repetir el problema 5-10 si la caída total de presión disponible se incrementa a 35 psi para tener más caída de presión a través de la válvula. Estimar también el costo incremental anual de operar la bomba para suministrar los 15 psi adicionales de caída de presión. Utilizar los parámetros económicos del ejemplo 5-2.3 y una eficiencia de la bomba de 70%.

5-12. La válvula del problema 5-8 tiene características inherentes isoporcentuales con una rangeabilidad de 50.

a) Encontrar el flujo a través de la válvula cuando está completamente abierta. (*Sugerencia:* no es 200 000 kg/h.)
b) Obtener la rangeabilidad de la válvula de control.
c) Estimar la ganancia de la válvula para el flujo de diseño, en (kg/h)/%CO.
d) Graficar las características instaladas normalizadas.

Enunciar las suposiciones utilizadas para resolver este problema.

5-13. La válvula del problema 5-9 tiene características inherentes lineales.

a) Encontrar el flujo a través de la válvula cuando está completamente abierta. (*Sugerencia:* no es 1900 gpm.)
b) Obtener la rangeabilidad de la válvula de control.
c) Estimar la ganancia de la válvula para el flujo de diseño, en gpm/%CO.
d) Graficar las características instaladas normalizadas.

Enunciar las suposiciones utilizadas para resolver este problema.

5-14. Deducir las ecuaciones 5-2.23 y 5-2.25 para un gas, si las presiones de entrada y de salida no varían con el flujo. ¿La ecuación también sería válida si el flujo de masa se reemplazara con el flujo en scfh?

5-15. *Diseño de un lazo de control de flujo para gas.* Un lazo de control de flujo, el cual consiste en un orificio en serie con una válvula de control, un transmisor de presión diferencial y un controlador, debe diseñarse para un flujo nominal de proceso de 180 000 scfh de aire. Las condiciones de entrada de la válvula son 100 psig y 60°F, y la presión de salida es 80 psig. La válvula tiene características lineales y un bloque para calcular

raíces cuadradas está integrado en el transmisor, de tal modo que su señal de salida es lineal con el flujo. La constante de tiempo de la válvula es 0.06 min y la constante de tiempo del transmisor es despreciable. El flujo se regula con un controlador proporcional integral (PI).

a) Obtener el factor de capacidad de la válvula, C_v, y la ganancia de la válvula. Dimensionarla para 100% de sobrecapacidad, y suponer que $C_f = 0.9$ (Masoneilan).
b) Calcular la ganancia del transmisor si está calibrado para un rango de 0 scfh a 250 000 scfh.
c) Trazar el diagrama de instrumentación y el diagrama de bloques del lazo de control de flujo, mostrando las funciones de transferencia específicas del controlador, la válvula de control y el transmisor de flujo.

5-16. Considérese el sistema de control de presión que se muestra en la figura P5-3. El transmisor de presión, PT25, tiene un rango de 0 psig a 100 psig. El controlador, PC25, es proporcional, con su valor base ajustado a la mitad de la escala y con referencia de 10 psig. Obtener la acción correcta del controlador y la banda proporcional requerida para que cuando la presión en el tanque sea 30 psig la válvula esté completamente abierta.

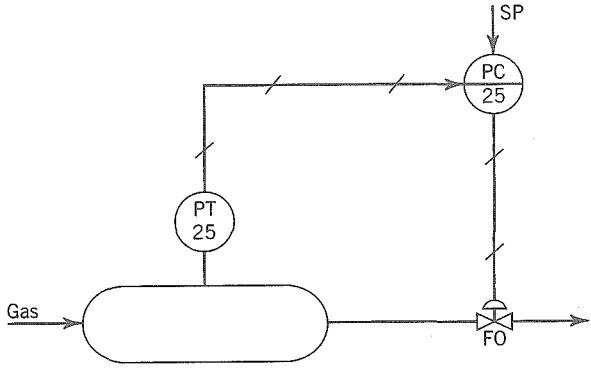


Figura P5-3 Sistema de control de presión para el problema 5-16.

5-17. Ahora se modifica el sistema de control de presión del problema 5-16. En la figura P5-4 se muestra el nuevo esquema de control. Este esquema se llama control en cascada; en el capítulo 9 se examinan sus ventajas y principios. En este esquema, el controlador de presión ajusta la referencia del controlador de flujo. El transmisor de presión tiene un rango de 0 psig a 100 psig y el transmisor de flujo tiene un rango de 0 scfh a 3000 scfh. Ambos controladores son proporcionales. La tasa de flujo normal a través de la válvula es 1000 scfh, y para entregar este flujo la válvula debe estar abierta 33%. La válvula de control tiene características lineales.

a) Obtener la acción de ambos controladores.
b) Elegir los valores base ($\bar{m}$) de ambos controladores de tal modo que en ninguno haya corrimiento.

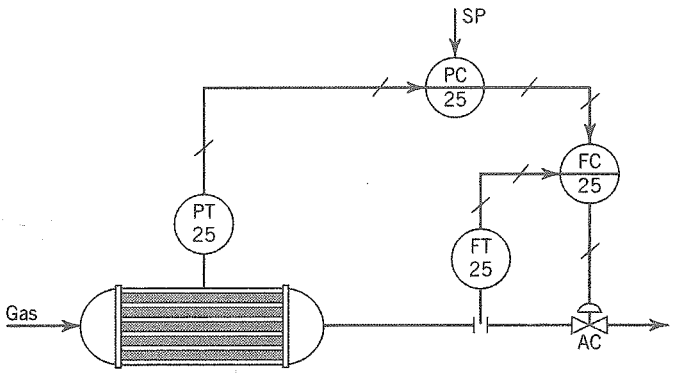


Figura P5-4 Sistema de control de presión para el problema 5-17.

c) Obtener la sintonización de la banda proporcional del controlador de presión para que cuando la presión del tanque alcance 40 psig, la referencia al controlador de flujo sea 1700 scfh. La referencia del controlador de presión es 10 psig.
d) Obtener la acción de ambos controladores si la válvula fuera del tipo cerrada en falla (aire para abrir).

5-18. Considérese el lazo de nivel que se presenta en la figura 5-3.2. Las condiciones de operación de estado estacionario son $\bar{f}_i = \bar{f}_o = 150$ gpm y $\bar{h} = 6$ ft. Para este estado estacionario, la válvula del tipo cerrada en falla requiere una señal de 50%. El transmisor de nivel tiene un rango de 0 a 20 ft. En el proceso se utiliza un solo controlador proporcional con $K_c = 1$. Calcular el corrimiento si el flujo de entrada se incrementa a 170 gpm y la válvula requiere una señal de 57% para entregar este flujo. Dar el corrimiento en porcentaje de la escala y en pies.

5-19. Un controlador recibe la señal de un transmisor de temperatura con un rango de 100°C a 150°C. Suponer que el controlador es proporcional integral (PI) con una ganancia de 3 %CO/%TO y un tiempo integral (o de reajuste) de 5 min.

a) Escribir la función de transferencia del controlador que relaciona la salida $M(s)$ con la señal del error $E(s)$; suponer que ambas señales están en porcentaje del rango. Dar los valores numéricos de los parámetros del controlador.
b) Calcular la ganancia del transmisor y escribir su función de transferencia suponiendo que se puede representar por un retardo de primer orden con una constante de tiempo de 0.1 min.
c) Trazar un diagrama de bloques del transmisor y el controlador que muestre todas las funciones de transferencia. Las señales de entrada del diagrama son la temperatura del proceso $T(s)$ y su referencia $T^{set}(s)$, ambas en °C.

d) Suponer que se aplica un cambio escalón sostenido al controlador en la referencia de 1°C y que debido a una pérdida en la señal a la válvula de control, la temperatura de proceso permanece constante e igual a la referencia original. Calcular el error sostenido en %TO y la salida del controlador en %CO en los siguientes tiempos: cuando el cambio de la referencia acaba de ocurrir, 5 minutos después y 10 minutos después. Hacer una gráfica del error y la salida del controlador contra el tiempo.

5-20. Considérese el lazo de control de la concentración para los dos reactores con agitación que se muestran en la figura P5-5. La tasa de consumo del reactivo A en cada reactor está dada por la siguiente fórmula:

$$r_A(t) = kc_A(t)$$

donde $r_A(t)$ es la tasa de reacción en lbmol/gal-min, y $c_A(t)$ es la concentración del reactivo A en el reactor, en lbmol/gal. Suponer que los volúmenes de los reactores, V_1 y V_2, gal, los coeficientes de reacción, k_1 y k_2, min^{-1}, y la densidad del fluido ρ, lb/gal, son constantes.

a) Obtener las funciones de transferencia que relacionen la concentración de los reactores, $C_{A1}(s)$ y $C_{A2}(s)$, con las variables de entrada, el flujo $F(s)$ y la concentración de entrada, $C_{Ai}(s)$. Trazar el diagrama de bloques de los reactores.

b) Dimensionar la válvula de control para 100% de sobrecapacidad y un flujo nominal de 100 gpm. La caída de presión a través de la válvula es constante en 9 psi y la

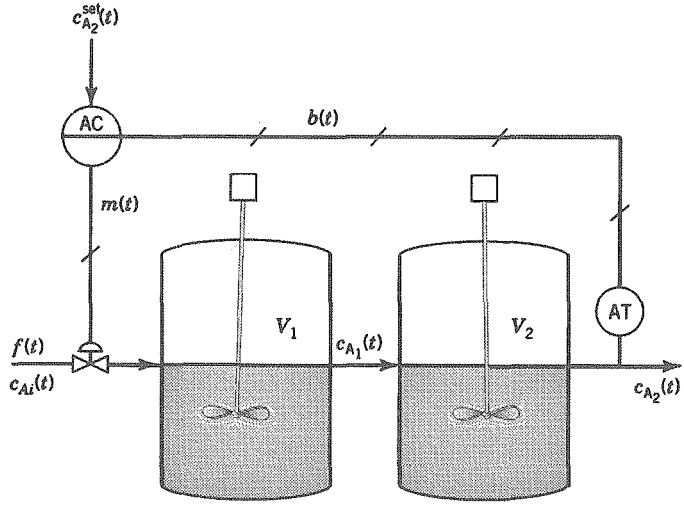


Figura P5-5 Reactores con agitación en serie para el problema 5-20.

gravedad específica del caudal del reactivo es 0.81. Suponer que la constante de tiempo del actuador de la válvula es despreciable y que la válvula es del tipo aire para abrir con características lineales. Calcular la ganancia de la válvula y trazar el diagrama de bloques de la válvula.

c) Además, el transmisor de concentración tiene un rango calibrado de 0 lbmol/gal a 0.2 lbmol/gal y una constante de tiempo de 0.5 min. Calcular la ganancia del transmisor y trazar el diagrama de bloques del transmisor.

d) Trazar un diagrama de bloques para el lazo de control de la concentración en el que se muestren todas las funciones de transferencia. Usar un controlador proporcional integral derivativo (PID). ¿La acción del controlador debe ser directa o inversa?

5.21. Indicar la manera en que las relaciones dadas en la ecuación 5-3.20 se obtuvieron a partir de las ecuaciones 5-3.16 y 5-3.19.

Capítulo 6

Diseño de sistemas de control de procesos de lazo simple

En los capítulos anteriores nos hemos familiarizado con las características dinámicas de procesos, sensores-transmisores, válvulas de control y controladores. También aprendimos a escribir funciones de transferencia linealizadas para cada uno de estos componentes así como a identificar los parámetros que son significativos para el diseño de sistemas de control automáticos, es decir, la ganancia de estado estacionario, las constantes de tiempo y el tiempo muerto (retardo de transporte o tiempo de retraso). En este capítulo se estudiará la manera en que estos conceptos se integran para diseñar sistemas de control por retroalimentación de lazo simple. Primero se analizará un lazo de control por retroalimentación sencillo y se aprenderá a trazar su diagrama de bloques y a determinar su ecuación característica. Después se examinará la importancia de la ecuación característica en términos de cómo se puede usar para determinar la estabilidad del lazo de control.

Los métodos que se estudiarán en este capítulo son aplicables en particular al diseño de lazos de control por retroalimentación para procesos industriales. En el capítulo 8 se presentan otras dos técnicas de diseño, el lugar geométrico de las raíces y el análisis de la respuesta en frecuencia, los cuales se han aplicado por lo general a sistemas inherentemente lineales.

6-1 EL LAZO DE CONTROL POR RETROALIMENTACIÓN

El concepto de control por retroalimentación, aunque tiene más de 2000 años de existir, no encontró uso práctico en la industria hasta que James Watt lo aplicó al control de velocidad de su máquina de vapor hace más de 200 años. Desde entonces, el número de aplicaciones industriales ha proliferado hasta el punto de que hoy casi todos los sistemas automáticos de control incluyen control por retroalimentación. Ninguna de las técnicas de control avanzado que se han desarrollado en los últimos 70 años para mejorar el desempeño de los lazos de control por retroalimentación ha sido capaz de reemplazarlo. En capítulos subsecuentes se estudian estas técnicas avanzadas.

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

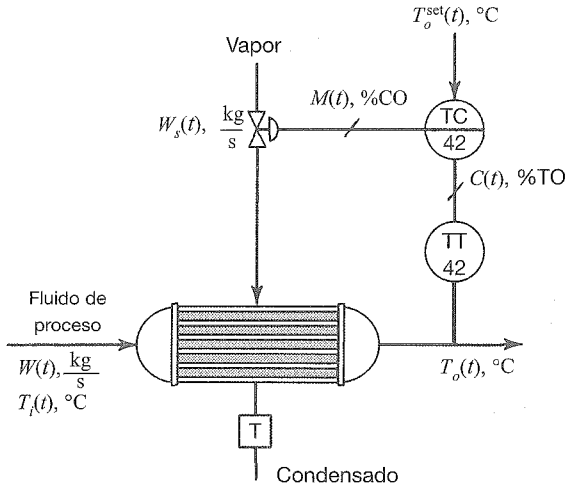


Figura 6-1.1 Lazo de control por retroalimentación para control de temperatura de un intercambiador de calor.

Para estudiar el concepto de control por retroalimentación se considera de nuevo el ejemplo del intercambiador de calor del capítulo 1. En la figura 6-1.1 se presenta el diagrama del intercambiador. El objetivo es mantener la temperatura de salida del fluido de proceso, $T_o(t)$, en su valor deseado o referencia, $T_o^{set}(t)$, en la presencia de variaciones del flujo del fluido de proceso, $W(t)$, y de la temperatura de entrada, $T_i(t)$. Se selecciona el flujo de vapor $W_s(t)$ como la variable que se puede ajustar para controlar la temperatura de salida; la cantidad de energía suministrada al fluido de proceso es proporcional al flujo de vapor.

El control por retroalimentación opera de la siguiente manera: un sensor-transmisor (TT42) mide la temperatura de salida o *variable controlada*, $T_o(t)$, genera una señal $C(t)$ proporcional a esta última y la envía al controlador (TC42), donde se compara con la referencia, $T_o^{set}(t)$. El controlador procede a calcular la señal de salida o *variable manipulada*, $M(t)$, con base en el *error* o diferencia entre la medición y la referencia. Esta señal de salida del controlador se envía al actuador de la válvula de control de vapor. El actuador posiciona la válvula en proporción a la señal de salida del controlador. Finalmente, el flujo de vapor, una función de la posición de la válvula, determina la tasa de energía que llega al intercambiador y, por consiguiente, la temperatura de salida controlada.

El término *retroalimentación* se deriva del hecho de que se mide la variable controlada y esta medición se "retro-alimenta" para reposicionar la válvula de vapor. Esto hace que las variaciones en la señal se muevan alrededor del lazo de la siguiente manera:

Las variaciones en la temperatura de salida son detectadas por el sensor-transmisor y son enviadas al controlador, lo que hace que la señal de salida varíe. Esto a su vez hace que la posición de la válvula de control y, en consecuencia, el flujo de vapor varíen. Las variaciones en el flujo de vapor inducen variaciones en la temperatura de salida, con lo que se cierra el lazo.

Esta estructura de lazo es lo que hace que el control por retroalimentación sea a la vez simple y efectivo. Cuando está sintonizado correctamente, el controlador por retroalimentación puede mantener la variable controlada en o cerca de la referencia en presencia de cualquier perturbación (por ejemplo, el flujo de proceso o la temperatura de entrada), sin saber de qué perturbación se trata o la magnitud de la misma.

Como se vio en la sección 5-3, el requerimiento más importante del controlador es la dirección de su acción (o simplemente la *acción*), directa o inversa. En el caso del controlador de temperatura, la acción correcta es inversa, debido a que un incremento en la temperatura requiere una disminución en la señal de salida del controlador para cerrar la válvula y reducir el flujo de vapor. Esto supone que la válvula de control es del tipo aire para abrir, de tal modo que el flujo de vapor será interrumpido en caso de una pérdida de energía eléctrica o de presión de aire del instrumento (cerrada en falla).

El desempeño del lazo de control se puede analizar mejor trazando el diagrama de bloques del lazo completo. Para ello, primero se traza el bloque para cada componente y después se conecta la señal de salida de cada bloque con el bloque siguiente. Se empieza con el intercambiador de calor. En los capítulos 3 y 4 se vio que la aproximación lineal de la respuesta de la salida de cualquier proceso se puede representar por la suma de una serie de bloques, uno para cada variable de entrada. Como se muestra en la figura 6-1.2, el diagrama de bloques para el intercambiador de calor consiste en tres bloques, uno para cada una de sus tres entradas: el flujo de proceso, $W(s)$, la temperatura de entrada, $T_i(s)$, y el flujo de vapor, $W_s(s)$. Las funciones de transferencia correspondientes son $G_w(s)$, $G_T(s)$ y $G_s(s)$.

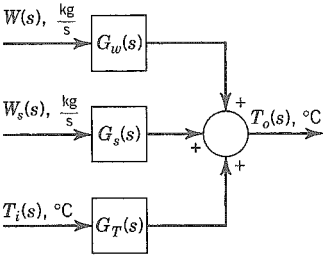


Figura 6-1.2 Diagrama de bloques del intercambiador de calor de la figura 6-1.1.

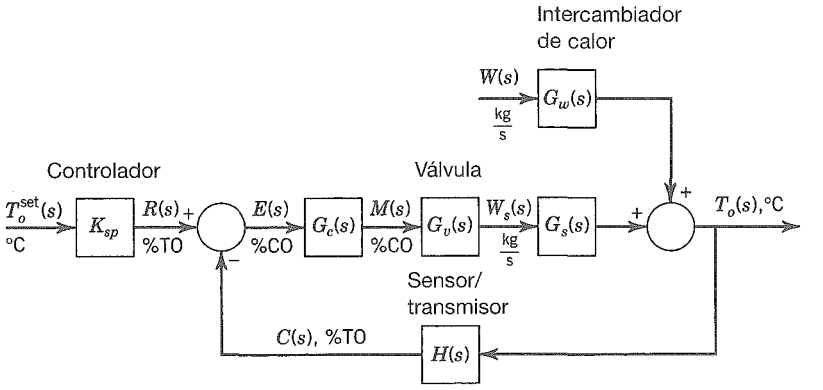


Figura 6-1.3 Diagrama de bloques del lazo de control de temperatura del intercambiador de calor.

En la figura 6-1.3 se muestra el diagrama de bloques completo para el lazo de control por retroalimentación. Para simplificar la discusión que sigue, se ha omitido a propósito la temperatura de entrada, $T_i(s)$, como una señal de entrada. Con esto se supone que la temperatura de entrada es constante y se selecciona el flujo de proceso, $W(s)$, como representativo de cualquier perturbación. Los símbolos de la figura 6-1.3 son los siguientes:

$E(s)$ = el error, % de la salida del transmisor (%TO)
$G_c(s)$ = la función de transferencia del controlador, %CO/%TO
$G_v(s)$ = la función de transferencia de la válvula de control, (kg/s)/%CO
$H(s)$ = la función de transferencia del sensor-transmisor, %TO/°C
K_{sp} = el factor de escalamiento para la temperatura de referencia, %TO/°C

Es importante notar en este punto la correspondencia entre los bloques (o grupos de bloques) en el diagrama de bloques, figura 6-1.3, y los componentes del lazo de control, figura 6-1.1. La concordancia de los símbolos utilizados para identificar las diferentes señales facilita esta comparación. También es importante recordar por el capítulo 3 que los bloques en el diagrama representan relaciones lineales entre las señales de entrada y salida, y que las señales son desviaciones respecto de los valores de estado estacionario y no los valores absolutos de las variables.

El término K_{sp} es un factor de escalamiento que convierte la referencia, por lo general calibrada en las mismas unidades que la variable controlada, a la misma base de la señal del transmisor, es decir, de °C a %TO. Se puede demostrar que para que la medición y la referencia tengan la misma escala, K_{sp} debe ser numéricamente igual a la ganancia del transmisor.

La convención de signos utilizada en el diagrama de bloques de la figura 6-1.3 concuerda con la convención usada en la sección 5-3 para el cálculo del error (referencia-medición). Esta convención se utilizará a lo largo de todo el libro. Nótese que esto hace que el signo alrededor del lazo sea negativo si el producto de los signos de todas las ganancias y otros bloques de suma en el lazo es positivo, como ocurre en este caso. *Una ganancia de retroalimentación negativa es un requisito para la estabilidad.* Siguiendo esta convención, un controlador de acción inversa debe tener una ganancia positiva, mientras que un controlador de acción directa debe tener una ganancia negativa, como se puede verificar al analizar la sección del controlador del diagrama de bloques. La convención no se ha seleccionado de esta manera para confundir al lector, sino para enfatizar gráficamente la ganancia de retroalimentación negativa en el diagrama de bloques (de otro modo el signo negativo estaría oculto en la ganancia del controlador).

6-1.1 Función de transferencia de lazo cerrado

Al inspeccionar el diagrama de bloques de lazo cerrado de la figura 6-1.3 se puede observar que el lazo tiene una señal de salida, la variable controlada $T_o(s)$ y dos señales de entrada, la referencia $T_o^{set}(s)$, y la perturbación, $W(s)$. Dado que el flujo de vapor está conectado a la temperatura de salida por el lazo de control, es de esperarse que la "respuesta de lazo cerrado" del sistema a diferentes entradas sea diferente de la respuesta cuando el lazo está "abierto". La

mayoría de los lazos de control pueden abrirse cambiando la posición de un interruptor (físico o lógico) en el controlador de "automático" a "manual" (véase la sección 5-3). Cuando el controlador está en la posición manual, su salida no responde a la señal del error y, por lo tanto, es independiente de la señal controlada y de referencia. Por otra parte, cuando el controlador está en "automático" la salida del controlador varía de acuerdo con el error de la medición.

La función de transferencia de lazo cerrado a la salida del mismo con respecto a cualquier entrada se puede determinar aplicando al diagrama del lazo las reglas del álgebra de bloques que se vieron en el capítulo 3. Para repasar, supóngase que se quiere obtener la respuesta de la temperatura de salida $T_o(s)$ al flujo de proceso $W(s)$. Primero se escriben las ecuaciones para cada bloque del diagrama como sigue:

$$E(s) = K_{sp}T_o^{\text{set}}(s) - C(s) \tag{6-1.1}$$

$$M(s) = G_c(s)E(s) \tag{6-1.2}$$

$$W_s(s) = G_v(s)M(s) \tag{6-1.3}$$

$$T_o(s) = G_s(s)W_s(s) + G_w(s)W(s) \tag{6-1.4}$$

$$C(s) = H(s)T_o(s) \tag{6-1.5}$$

A continuación se supone que la referencia no cambia, es decir, que su variable de desviación es cero

$$T_o^{\text{set}}(s) = 0$$

y se eliminan todas las variables intermedias combinando las ecuaciones 6-1.1 a 6-1.5. El resultado es

$$T_o(s) = G_s(s)G_v(s)G_c(s)[-H(s)T_o(s)] + G_w(s)W(s) \tag{6-1.6}$$

Despejando $T_o(s)$ y dividiendo entre $W(s)$, se obtiene

$$\frac{T_o(s)}{W(s)} = \frac{G_w(s)}{1 + H(s)G_s(s)G_v(s)G_c(s)} \tag{6-1.7}$$

Ésta es la función de transferencia de lazo cerrado entre el flujo de proceso y la temperatura de salida. Del mismo modo, se hace $W(s) = 0$ y se combinan las ecuaciones 6-1.1 a 6-1.5 para obtener la función de transferencia de lazo cerrado entre la referencia y la temperatura de salida:

$$\frac{T_o(s)}{T_o^{\text{set}}(s)} = \frac{K_{sp}G_s(s)G_v(s)G_c(s)}{1 + H(s)G_s(s)G_v(s)G_c(s)} \tag{6-1.8}$$

Como se vio en el capítulo 3, el denominador es el mismo para ambas entradas mientras que el numerador es diferente para cada una de ellas. Se recuerda asimismo que el denominador es la unidad más el producto de las funciones de transferencia de todos los bloques ubicados en el lazo, mientras que el numerador de cada función de transferencia es el producto de los bloques que están en la trayectoria directa entre la entrada específica y la salida del lazo. Estos resultados se aplican a cualquier diagrama de bloques que contiene un solo lazo.

Es esclarecedor revisar las unidades del producto de los bloques en el lazo, como sigue:

$$H(s)\cdot G_s(s)\cdot G_v(s)\cdot G_c(s) = \left(\frac{\%\text{TO}}{^\circ\text{C}}\right)\left(\frac{^\circ\text{C}}{\text{kg/s}}\right)\left(\frac{\text{kg/s}}{\%\text{TO}}\right)\left(\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}\right) = \text{adimensional}$$

Esto muestra que el producto de las funciones de transferencia de los bloques en el lazo es adimensional, como debería serlo. También se puede verificar que las unidades del numerador de cada función de transferencia del lazo cerrado son las unidades de la variable de salida dividida entre las unidades de la variable de entrada correspondiente.

Diagrama de bloques simplificado

Resulta conveniente simplificar el diagrama de bloques de la figura 6-1.3 combinando bloques. Aplicando las reglas del álgebra de bloques del capítulo 3, se obtiene el diagrama de la figura 6-1.4. Las funciones de transferencia del diagrama simplificado son

$$G_1(s) = G_v(s)G_s(s)H(s) \tag{6-1.9}$$

$$G_2(s) = G_w(s)H(s) \tag{6-1.10}$$

En el diagrama simplificado las señales del lazo están expresadas en porcentaje del rango y la ganancia de retroalimentación es la unidad, razón por la cual al lazo del diagrama se le llama en ocasiones *lazo de retroalimentación unitaria*. La función de transferencia del lazo cerrado de la señal de salida, que es ahora la salida del transmisor, es

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_1(s)}{1+G_c(s)G_1(s)}R(s) + \frac{G_2(s)}{1+G_c(s)G_1(s)}W(s) \tag{6-1.11}$$

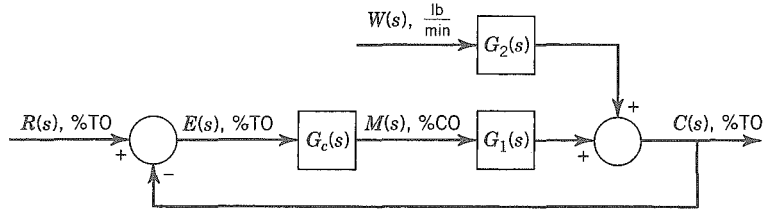


Figura 6-1.4 Diagrama de bloques simplificado de un lazo de control por retroalimentación.

donde $R(s)$ es la señal de la referencia en %TO. Excepto por el nombre de la perturbación de flujo, el diagrama de bloques de la figura 6-1.4 puede representar cualquier lazo de control por retroalimentación.

En el siguiente ejemplo se muestra cómo desarrollar la función de transferencia de lazo cerrado a partir de los principios aprendidos en los capítulos 3, 4 y 5.

Ejemplo 6-1.1 ***Control de temperatura de un tanque calentador con agitación continua.*** El tanque con agitación que se muestra en la figura 6-1.5 se utiliza para calentar un caudal de proceso para que sus compuestos premezclados alcancen una composición uniforme. El control de la temperatura es importante porque una temperatura elevada tiende a descomponer el producto mientras que una temperatura baja resulta en un mezclado incompleto. El tanque se calienta por condensación de vapor dentro de un serpentín. Se utiliza un controlador proporcional integral derivativo (PID) para regular la temperatura en el tanque mediante la manipulación de la posición de la válvula de vapor. Obtener el diagrama de bloques completo y la función de transferencia de lazo cerrado a partir de los siguientes datos de diseño.

Proceso. La carga tiene una densidad ρ de 68.0 lb/ft^3 y una capacidad calorífica c_p de 0.80 Btu/lb-°F. El volumen V de líquido en el reactor se mantiene constante en 120 ft^3. El serpentín consiste en 205 ft de tubería de acero de 4 pulg Schedule 40, que pesa 10.8 lb/ft con capacidad calorífica de 0.12 Btu/lb-°F y un diámetro exterior de 4.500 pulg. El coeficiente global de transferencia de calor U, basado en el área exterior del serpentín, se estima en 2.1 Btu/min-ft^2-°F. El vapor disponible está saturado a una presión de 30 psia y se puede suponer que el calor latente de condensación λ es constante a 966 Btu/lb. También se puede suponer que la temperatura de entrada, T_i, es constante.

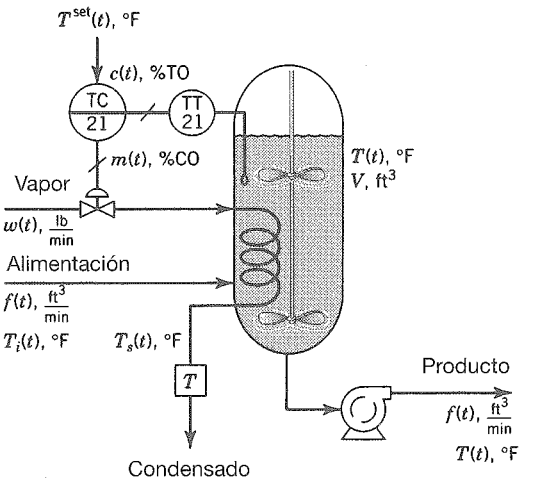


Figura 6-1.5 Control de temperatura del tanque calentador con agitación continua del ejemplo 6-1.1.

Condiciones de diseño. El flujo de alimentación f en las condiciones de diseño es 15 ft^3/min y su temperatura T_i es 100°F. El contenido del tanque debe mantenerse a una temperatura T de 150°F. Las posibles perturbaciones son los cambios en la velocidad y la temperatura de alimentación.

Sensor y transmisor de temperatura. El sensor de temperatura se ha calibrado para operar en un rango de 100°F a 200°F y tiene una constante de tiempo τ_T de 0.75 min.

Válvula de control. La válvula de control está diseñada para 100% de sobrecapacidad y las variaciones en la caída de presión pueden despreciarse. La válvula es isoporcentual con parámetro de rangeabilidad α de 50. El actuador tiene una constante de tiempo τ_v de 0.20 min.

Solución El enfoque será obtener las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del tanque, la válvula de control, el sensor-transmisor y el controlador. Después se aplicará la transformada de Laplace para obtener el diagrama de bloques del lazo.

Proceso. Un balance de energía para el líquido del tanque, suponiendo pérdidas de calor despreciables, mezclado ideal, volumen y propiedades físicas constantes, resulta en la ecuación

$$V\rho c_v \frac{dT(t)}{dt} = f(t)\rho c_p T_i(t) + UA[T_s(t) - T(t)] - f(t)\rho c_p T(t)$$

1 ec., 2 incóg. (T, T_s)

donde:

A = el área de transferencia de calor, ft^2.
$T_s(s)$ = la temperatura de la pared del serpentín, °F.

y los demás símbolos se definieron en el enunciado del problema. Para el contenido líquido del tanque, el c_v en el término de acumulación es igual a c_p.

Al hacer un balance de energía para el serpentín, suponiendo que el metal del serpentín está a la misma temperatura que el vapor de condensación, se obtiene

$$C_M \frac{dT_s(t)}{dt} = w(t)\lambda - UA[T_s(t) - T(t)]$$

2 ec., 3 incóg. (w)

donde:

$w(t)$ = el flujo másico de vapor, lb/min
C_M = capacidad calorífica del metal del serpentín, Btu/°F.

Como el flujo másico de vapor es la salida de la válvula de control y una de las entradas del proceso, el modelo del proceso está completo.

Linealización y transformación de Laplace. Utilizando los métodos aprendidos en la sección 2-6 se pueden obtener las ecuaciones linealizadas del modelo del tanque en términos de variables de desviación:

$$V\rho c_p \frac{d\Gamma(t)}{dt} = \rho c_p (T_i - \bar{T})F(t) + UA\Gamma_s(t) - (UA + \bar{f}\rho c_p)\Gamma(t)$$

$$C_M \frac{d\Gamma_s(t)}{dt} = \lambda W(t) - UA\Gamma_s(t) + UA\Gamma(t)$$

donde $\Gamma(t)$, $F(t)$ y $W(t)$ son las variables de desviación.

Tomando la transformada de Laplace de estas ecuaciones y reordenando términos, como se aprendió en los capítulos 2, 3 y 4, se obtiene

$$\Gamma(s) = \frac{K_F}{\tau s + 1} F(s) + \frac{K_s}{\tau s + 1}\Gamma_s(s)$$

$$\Gamma_s(s) = \frac{1}{\tau_c s + 1}\Gamma(s) + \frac{K_w}{\tau_c s + 1} W(s)$$

donde

$$\tau = \frac{V\rho c_p}{UA + \bar{f}\rho c_p} \qquad \tau_c = \frac{C_M}{UA}$$

$$K_F = \frac{\rho c_p (T_i - \bar{T})}{UA + \bar{f}\rho c_p} \qquad K_w = \frac{\lambda}{UA}$$

$$K_s = \frac{UA}{UA + \bar{f}\rho c_p}$$

Válvula de control. La función de transferencia para una válvula de control isoporcentual con caída de presión constante es (por la sección 5-2):

$$G_v(s) = \frac{W(s)}{M(s)} = \frac{K_v}{\tau_v s + 1}$$

3 ec., 4 incóg. (M)

donde $M(s)$ es la señal de salida del controlador en porcentaje de salida del controlador (%CO) y la ganancia de la válvula es, por la sección 5-2,

$$K_v = \frac{\bar{w}(\ln \alpha)}{100}$$

Sensor-transmisor (TT21). El sensor-transmisor se puede representar por un retardo de primer orden:

$$H(s) = \frac{C(s)}{\Gamma(s)} = \frac{K_T}{\tau_T s + 1}$$

4 ec., 5 incóg. (C)

donde $C(s)$ es la transformada de Laplace de la señal de salida del transmisor, %TO. De la sección 5-1, la ganancia del transmisor es

$$K_T = \frac{100 - 0}{200 - 100} = 1.0 \frac{\%\text{TO}}{^\circ\text{F}}$$

La función de transferencia del controlador PID es, por la sección 5-3,

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{R(s) - C(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

5 ec., 5 incóg. ¡Resuelto!

donde K_c es la ganancia del controlador, τ_I es el tiempo integral y τ_D es el tiempo derivativo. Con esto se completa la obtención de las ecuaciones para el lazo de control de temperatura.

Diagrama de bloques del lazo. En la figura 6-1.6 se muestra el diagrama de bloques completo para el lazo. Todas las funciones de transferencia en el diagrama se establecieron en los pasos anteriores. Utilizando las reglas para manipulación de diagramas de bloques que se vieron en el capítulo 3, se obtiene el diagrama simplificado de la figura 6-1.7. Las funciones de transferencia en el diagrama simplificado son

$$G_F(s) = \frac{K_F(\tau_c s + 1)}{(\tau s + 1)(\tau_c s + 1) - K_s}$$

$$G_s(s) = \frac{K_v K_s}{(\tau s + 1)(\tau_c s + 1) - K_s}$$

La función de transferencia de lazo cerrado de la temperatura a la salida del proceso es

$$\Gamma(s) = \frac{K_{sp} G_c(s) G_v(s) G_s(s)}{1 + H(s) G_c(s) G_v(s) G_s(s)} \Gamma^{\text{set}}(s) + \frac{G_F(s)}{1 + H(s) G_c(s) G_v(s) G_s(s)} F(s)$$

Estado estacionario inicial y valores de los parámetros. En la tabla 6.1.1 se presentan los valores numéricos de los parámetros de las funciones de transferencia, calculados a partir de los datos dados en el enunciado del problema. Los valores base para la linealización son las condiciones de diseño, las cuales se suponen iguales a las condiciones iniciales de estado

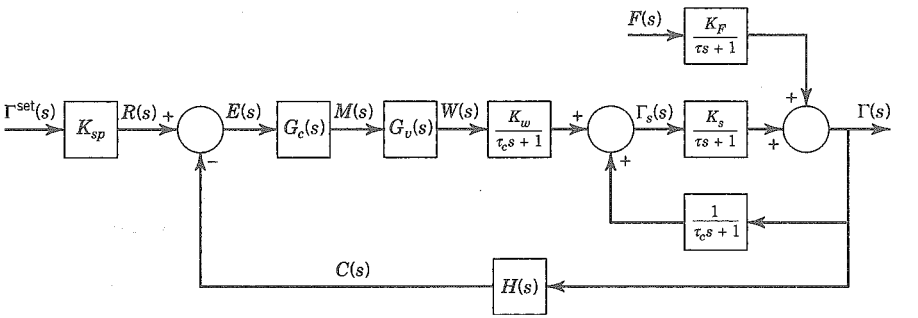


Figura 6-1.6 Diagrama de bloques del lazo de control de temperatura del tanque calentador con agitación.

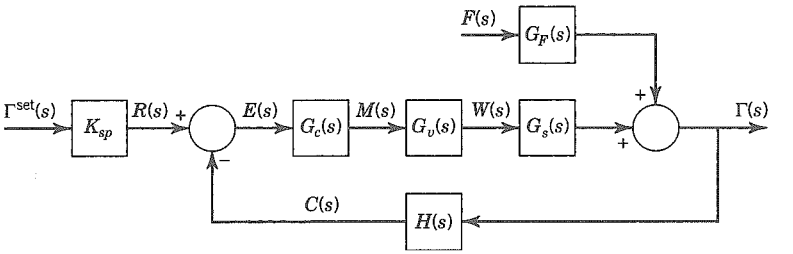


Figura 6-1.7 Diagrama de bloques simplificado del lazo de control de temperatura.

estacionario. A partir de las ecuaciones del modelo para el tanque y el serpentín se calculan los valores iniciales de estado estacionario de la temperatura de entrada y del flujo de vapor:

$$\bar{f}\rho c_p T_i + UA(\bar{T}_s - \bar{T}) - \bar{f}\rho c_p \bar{T} = 0$$

$$\bar{w}\lambda - UA(\bar{T}_s - \bar{T}) = 0$$

$$\bar{T}_s = \bar{T} + \frac{\bar{f}\rho c_p(\bar{T} - T_i)}{UA} = 150 + \frac{(15)(68)(0.8)(150-100)}{(2.1)(241.5)} = 230°\text{F}$$

$$\bar{w} = \frac{UA(\bar{T}_s - \bar{T})}{\lambda} = \frac{(2.1)(241.5)(230-150)}{966} = 42.2\frac{\text{lb}}{\text{min}}$$

Tabla 6-1.1 Parámetros para el ejemplo 6-1.1

$A = 241.5$ ft^2	$\tau = 4.93$ min
$C_M = 265.7$ Btu/°F	$\tau_c = 0.524$ min
$K_F = 2.06$°F/(ft^3/min)	$K_w = 1.905$°F/(lb/min)
$K_s = 0.383$°F/°F	$K_{sp} = K_T = 1.0$ %TO/°F
$K_v = 1.652$ (lb/min)/%CO	$\tau_v = 0.20$ min
$\tau_T = 0.75$ min	

Por la figura 6-1.6 se puede ver que el serpentín y el tanque forman un conjunto de dos retardos que interactúan. Esto significa que es necesario calcular las constantes de tiempo efectivas a partir de los parámetros en la tabla 6-1.1. Los valores de estas constantes de tiempo son 8.34 min y 0.502 min, que resultan en las funciones de transferencia siguientes:

$$G_1(s) = G_v(s)G_s(s)H(s) = \frac{1.652}{0.2s+1}\frac{1.183}{(8.34s+1)(0.502s+1)}\frac{1.0}{0.75s+1}\frac{\%\text{TO}}{\%\text{CO}}$$

$$G_2(s) = G_F(s)H(s) = \frac{-3.34(0.524s+1)}{(8.34s+1)(0.502s+1)}\frac{1.0}{0.75s+1}\frac{\%\text{TO}}{\text{ft}^3/\text{min}}$$

donde las ganancias son $K_vK_s/(1 - K_s) = (1.905)(0.383)/(1 - 0.383) = 1.183°\text{F}/(\text{lb/min})$ y $K_F/(1 - K_s) = (-2.06)/(1 - 0.383) = -3.34°\text{F}/(\text{ft}^3/\text{min})$. La transformada de lazo cerrado de la salida del transmisor de temperatura es entonces

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_1(s)}{1+G_c(s)G_1(s)}R(s) + \frac{G_2(s)}{1+G_c(s)G_1(s)}F(s)$$

Estas funciones de transferencia concuerdan con el lazo de retroalimentación unitaria de la figura 6-1.4.

En este ejemplo se ilustra cómo se pueden utilizar los fundamentos de ingeniería de procesos para analizar lazos simples de control por retroalimentación. A partir de las funciones de transferencia de lazo cerrado se puede calcular la respuesta del lazo cerrado a diferentes funciones de forzamiento de entrada para diferentes valores de los parámetros de sintonización del controlador, K_c, τ_I y τ_D.

6-1.2 Ecuación característica del lazo

Como se señaló en el análisis anterior, el denominador de la función de transferencia de lazo cerrado de un lazo de control por retroalimentación es independiente de la localización de la entrada al lazo y, en consecuencia, es característico del lazo. Recuérdese de la sección 2-3 que la respuesta no forzada del lazo y su estabilidad dependen de las raíces de la ecuación que se obtienen cuando el denominador de la función de transferencia del lazo se iguala a cero.

$$1 + H(s)G_s(s)G_v(s)G_c(s) = 0 \qquad \textbf{(6-1.12)}$$

Ésta es la *ecuación característica* del lazo. Nótese que la función de transferencia del controlador es una parte significativa de la ecuación característica del lazo. *A esto se debe que*

la respuesta del lazo se pueda moldear sintonizando el controlador. Los otros elementos que forman parte de la ecuación característica son el sensor-transmisor, la válvula de control y la parte del proceso que afecta la respuesta de la variable controlada a los cambios en la variable manipulada, $G_s(s)$. Por otra parte, la función de transferencia del proceso relacionada con la perturbación, $G_w(s)$, no es parte de la ecuación característica.

Para establecer que la ecuación característica determina la respuesta no forzada del lazo, a continuación se deriva la respuesta del lazo cerrado a un cambio en el flujo de proceso invirtiendo la transformada de Laplace de la señal de salida, como se aprendió en la sección 2-2. Supóngase que la ecuación característica se puede expresar como un polinomio de orden n en la variable s de la transformada de Laplace:

$$1 + H(s)G_s(s)G_v(s)G_c(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \tag{6-1.13}$$

donde a_n, a_{n-1},..., a_0 son los coeficientes del polinomio. Con un programa de computadora apropiado se pueden encontrar las n raíces de este polinomio y factorizarlo como sigue:

$$1 + H(s)G_s(s)G_v(s)G_c(s) = a_n(s - r_1)(s - r_2)\cdots(s - r_n) \tag{6-1.14}$$

donde r_1, r_2,..., r_n son las raíces de la ecuación característica. Estas raíces pueden ser números reales, pares de números complejos conjugados, e incluso algunas de ellas pueden estar repetidas, como se vio en la sección 2-2.

Por la ecuación 6-1.7 se obtiene

$$T_o(s) = \frac{G_w(s)}{1 + H(s)G_s(s)G_v(s)G_c(s)}W(s) \tag{6-1.15}$$

A continuación se sustituye el denominador con la ecuación 6-1.14 y se supone que otros términos aparecerán debido a la función de forzamiento de entrada, $W(s)$:

$$T_o(s) = \frac{\text{términos del numerador}}{a_n(s - r_1)(s - r_2)\cdots(s - r_n)\,(\text{términos de la entrada})} \tag{6-1.16}$$

Después se hace la expansión en fracciones parciales de esta expresión

$$T_o(s) = \frac{b_1}{s - r_1} + \frac{b_2}{s - r_2} + \cdots + \frac{b_n}{s - r_n} + (\text{términos de la entrada}) \tag{6-1.17}$$

donde b_1, b_2,..., b_n son los coeficientes constantes que se determinan por el método de expansión en fracciones parciales (ver la sección 2-2.2). Invirtiendo esta expresión con ayuda de una tabla de transformadas de Laplace (por ejemplo, la tabla 2-1.1), se obtiene

$$T_o(t) = b_1 e^{r_1 t} + b_2 e^{r_2 t} + \cdots + b_n e^{r_n t} + (\text{términos de la entrada}) \tag{6-1.18}$$

RESPUESTA NO FORZADA + RESPUESTA FORZADA

De este modo, se ha establecido que cada término de la respuesta no forzada contiene una raíz de la ecuación característica. Recuérdese que los coeficientes $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dependen de la función de forzamiento de entrada real al igual que la respuesta exacta del lazo. Sin embargo, la rapidez con que la respuesta no forzada decae ($r_i < 0$), diverge ($r_i > 0$) u oscila (r_i compleja) está determinada completamente por las raíces de la ecuación característica. En la siguiente sección se usará este concepto para determinar la estabilidad del lazo. En el ejemplo siguiente se ilustra el efecto de un controlador proporcional puro y uno integral puro sobre la respuesta de lazo cerrado de un proceso de primer orden. Se verá que el controlador proporcional puro acelera la respuesta de primer orden y produce un *corrimiento* o error de estado estacionario, como se estableció en la sección 5-3. Por otra parte, el controlador integral produce una respuesta de segundo orden que, a medida que la ganancia del controlador aumenta, cambia de sobreamortiguada a subamortiguada. Como se presentó en la sección 2-5.2, la respuesta subamortiguada es oscilatoria.

Ejemplo 6-1.2 ***Control de un proceso de primer orden.*** En el diagrama de bloques simplificado de la figura 6-1.4, el proceso se puede representar mediante un retardo de primer orden:

$$G_1(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Determinar la función de transferencia y la respuesta de lazo cerrado a un cambio escalón unitario en la referencia para

a) un controlador proporcional, $G_c(s) = K_c$.
b) un controlador integral puro, $G_c(s) = K_I/s$, donde K_I es la ganancia integral del controlador en min^{-1}.

Solución Utilizando el álgebra de los diagramas de bloques se obtiene la función de transferencia de lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_c(s)}{1 + G_1(s)G_c(s)}$$

a) Después se sustituyen las funciones de transferencia del proceso y del controlador, y se simplifica:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KK_c}{\tau s + 1 + KK_c} = \frac{\dfrac{KK_c}{1 + KK_c}}{\dfrac{\tau}{1 + KK_c}s + 1} = \frac{K'}{(\tau' s + 1)}$$

Se puede observar fácilmente que la respuesta de lazo cerrado es de primer orden, con ganancia de estado estacionario $K' = KK_c/(1 + KK_c)$ y constante de tiempo $\tau' = \tau/(1 + KK_c)$. Nótese que

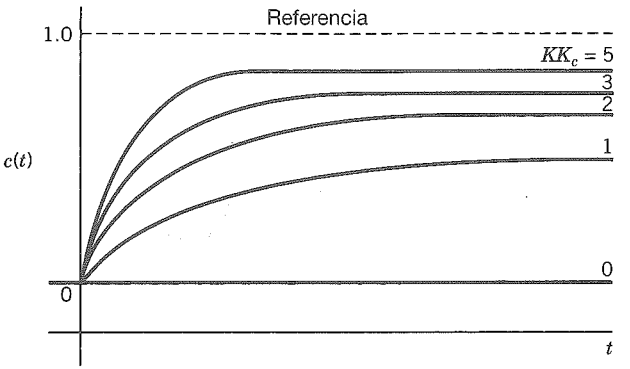


Figura 6-1.8 Respuesta escalón unitario a la referencia para el lazo cerrado de un sistema de primer orden con controlador proporcional (ejemplo 6-1.2).

la ganancia de lazo cerrado siempre es menor que la unidad y que la constante de tiempo de lazo cerrado siempre es menor que la constante de tiempo de lazo abierto τ. En otras palabras, el sistema de lazo cerrado responde más rápido que el sistema de lazo abierto, pero no corresponde del todo con la referencia de estado estacionario, es decir, habrá *corrimiento*.

En la figura 6-1.8 se muestran las respuestas escalón unitario de lazo cerrado para varios valores positivos de la ganancia del lazo, KK_c. Estas respuestas son de primer orden típicas (ver la sección 2-4). La respuesta tiende a la referencia cuando la ganancia del lazo se incrementa, como se estableció en la sección 5-3.

¿Cuál sería la respuesta si la ganancia del lazo, KK_c, fuera negativa? Es fácil verificar que para ganancias del lazo entre 0 y -1 la respuesta es estable, pero el corrimiento sería mayor que si no se tomara ninguna acción de control ($K_c = 0$). También se puede verificar que para ganancias del lazo inferiores a -1 la respuesta es inestable. En contraste, las ganancias del lazo positivas producen una respuesta estable con *corrimiento* decreciente.

b) Al sustituir la función de transferencia del controlador integral en la función de transferencia de lazo cerrado se obtiene

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{KK_I}{s}}{\tau s + 1 + \dfrac{KK_I}{s}} = \frac{KK_I}{\tau s^2 + s + KK_I}$$

Extendiendo el teorema del valor final a las funciones de transferencia (ver la sección 3-5.1), se sustituye $s = 0$ para obtener la ganancia de estado estacionario:

$$\lim_{s \to 0} \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KK_I}{KK_I} = 1$$

Esto significa que, para el controlador integral, la variable controlada siempre corresponderá con la referencia en estado estacionario, es decir, no habrá corrimiento.

La ecuación característica del lazo se obtiene igualando a cero el denominador de la función de transferencia de lazo cerrado. Las raíces de esta ecuación cuadrática son

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4KK_I\tau}}{2\tau}$$

Estas raíces son reales para $0 \leq KK_I\tau \leq \frac{1}{4}$ y son conjugadas complejas para $KK_I\tau > \frac{1}{4}$. Como se vio en la sección 2-5, cuando las raíces son reales la respuesta es sobreamortiguada, y cuando son conjugadas complejas la respuesta es subamortiguada (oscilatoria). Esto significa que para el lazo considerado aquí la respuesta se vuelve oscilatoria cuando la ganancia del lazo se incrementa. Esta propiedad es común en la mayoría de los lazos de control por retroalimentación.

En la figura 6-1.9 se muestran las respuestas escalón unitario de lazo cerrado para varios valores positivos de la ganancia del lazo. Al comparar la ecuación característica del lazo cerrado con la ecuación de un sistema subamortiguado de segundo orden estándar (ecuación 2-5.4), se puede calcular la relación de amortiguamiento y la frecuencia de oscilación como una función de los parámetros del lazo. Éstos son

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{4KK_I\tau}} \qquad \omega = \frac{\sqrt{4KK_I\tau - 1}}{2\tau}$$

En la tabla 6-1.2 se dan los valores de la razón de amortiguamiento y la frecuencia de oscilación para varios valores positivos de la ganancia del lazo que corresponden con los valores de las respuestas de la figura 6-1.9. Se establece así la manera en que la ganancia ajustable del controlador permite moldear la respuesta del lazo cerrado.

También es posible establecer fácilmente que, para este lazo, cualquier valor negativo de la ganancia del lazo KK_I produce dos raíces reales, una de las cuales es positiva. Esto significa que la respuesta divergirá exponencialmente con el tiempo. Por otra parte, para valores positivos de la ganancia del lazo, las raíces son números reales negativos o números complejos con parte real negativa. Este hecho, aunado a la ganancia unitaria, significa que la respuesta siempre converge en la referencia cuando la ganancia del lazo es positiva.

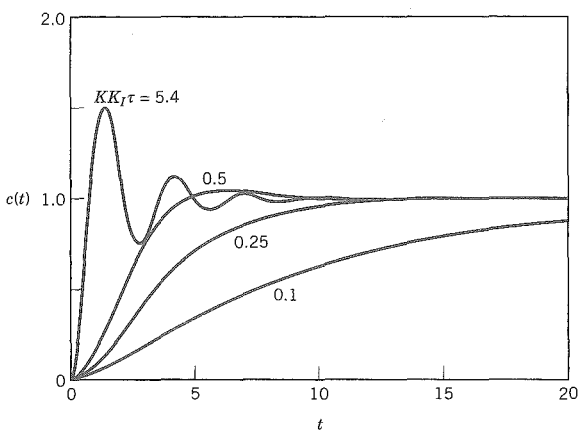


Figura 6-1.9 Respuesta escalón unitario a la referencia para el lazo cerrado de un sistema de primer orden con controlador integral (ejemplo 6-1.2).

Tabla 6-1.2 Respuesta subamortiguada para el ejemplo 6-1.2

$KK_1\tau$	ζ	$\omega\tau$	Comentarios
0.25	1.0	0	Críticamente amortiguada
0.50	0.707	0.5	5% de sobrepaso
5.40	0.215	2.3	Razón de asentamiento de un cuarto

El ejemplo anterior ilustra lo discutido en el capítulo 4 respecto al hecho de que aunque la mayoría de los procesos son inherentemente sobreamortiguados, su respuesta puede ser subamortiguada cuando forma parte de un lazo cerrado de control por retroalimentación.

Ejemplo 6-1.3 ***Lazo de control de flujo.*** Como se verá en los capítulos 9, 10 y 11, los lazos de control de flujo se usan con frecuencia como los lazos más internos en los sistemas de control en cascada, de relación y feedforward. Desarrollar la función de transferencia de lazo cerrado para un lazo de control de flujo con un controlador proporcional integral (PI).

Solución En la figura 6-1.10 se muestra el diagrama esquemático de un lazo de control de flujo y su diagrama de bloques correspondiente. A fin de concentrarse en la respuesta del flujo $F(s)$ a su referencia, $F^{set}(s)$, se supone que la caída de presión a través de la válvula de control es constante. Sin embargo, uno de los propósitos del controlador de flujo es compensar cambios en la caída de presión a través de la válvula (perturbación). Nótese que el lazo de control de flujo ¡no tiene un proceso! Esto se debe a que la variable controlada, el flujo, es la salida de la válvula de control.

Como se vio en la sección 5-2, la válvula de control se puede representar como un retardo de primer orden:

$$G_v(s) = \frac{F(s)}{M(s)} = \frac{K_v}{\tau_v s + 1} \frac{\text{gpm}}{\%\text{CO}}$$

Los transmisores de flujo suelen ser rápidos y en consecuencia se pueden representar con una sola ganancia. Suponiendo un transmisor lineal, la ganancia es, por la sección 5-1,

$$H(s) = K_T = \frac{100}{f_{máx}} \frac{\%\text{TO}}{\text{gpm}}$$

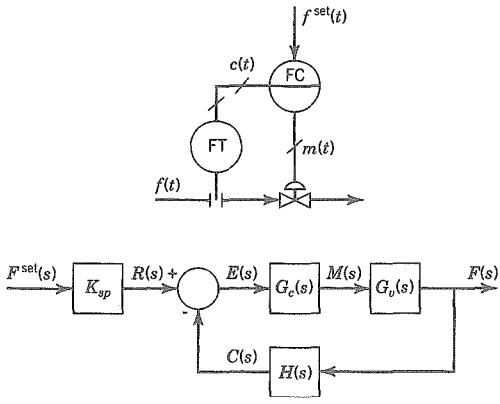


Figura 6-1.10 Representación esquemática y diagrama de bloques de un lazo de control de flujo.

Se aplica ahora el álgebra de diagramas de bloques (capítulo 3) al diagrama de la figura 6-1.10 para obtener la función de transferencia del lazo cerrado:

$$\frac{F(s)}{F^{\text{set}}(s)} = \frac{K_{sp}G_v(s)G_c(s)}{1 + K_T G_v(s)G_c(s)}$$

donde $K_{sp} = K_T$. Por la sección 5-3, la función de transferencia del controlador PI es

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) = \frac{K_c(\tau_I s + 1)}{\tau_I s}\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

Sustituyendo esta ecuación en la función de transferencia de lazo cerrado y simplificando, se obtiene

$$\frac{F(s)}{F^{\text{set}}(s)} = \frac{K_T K_v K_c(\tau_I s + 1)}{\tau_I s(\tau_v s + 1) + K_T K_v K_c(\tau_I s + 1)}$$

La respuesta es de segundo orden. Por lo tanto, puede ser subamortiguada (oscilatoria) o sobreamortiguada, dependiendo de los parámetros del controlador. Se puede obtener una respuesta de primer orden rápida ajustando el tiempo integral en un valor igual a la constante de tiempo de la válvula, $\tau_I = \tau_v$.

$$\frac{F(s)}{F^{\text{set}}(s)} = \frac{K_T K_v K_c}{\tau_v s + K_T K_v K_c} = \frac{1}{\tau_{FC} s + 1}$$

donde la constante de tiempo de lazo cerrado es $\tau_{FC} = \tau_v / K_T K_v K_c$. Nótese que la respuesta de lazo cerrado es más rápida (menor constante de tiempo) a medida que la ganancia del controlador se incrementa y que la ganancia de estado estacionario es la unidad, es decir, no hay corrimiento.

Cuando el lazo de control de flujo es parte de un sistema de control en cascada, en ocasiones su referencia se da en porcentaje del rango en vez de darla en unidades de ingeniería (gpm). En tales casos, la entrada al lazo es $R(s)$ en lugar de $F^{\text{set}}(s)$ (ver la figura 6-1.10). Así, la función de transferencia es

$$\frac{F(s)}{R(s)} = \frac{K_v K_c}{\tau_v s + K_T K_v K_c} = \frac{1/K_T}{\tau_{FC} s + 1}\frac{\text{gpm}}{\%\text{TO}}$$

Entonces la ganancia del lazo de control de flujo es $1/K_T$.

Nótese que ésta es muy similar a la ganancia de una válvula lineal con caída de presión constante, excepto porque el flujo máximo aquí es el límite superior del rango del transmisor de flujo (ver la sección 5-2).

Las fórmulas derivadas en este ejemplo se aplican a válvulas de líquido, gas y vapor con las unidades ajustadas de manera apropiada (por ejemplo, gpm, scfm, lb/h). Estas fórmulas son independientes de las características de flujo de la válvula y de si su caída de presión es constante o variable.

6-1.3 Respuesta de lazo cerrado en estado estacionario

En los ejemplos anteriores se ha visto que el valor final o de estado estacionario es un aspecto importante de la respuesta de lazo cerrado. Esto se debe a que, en la aplicación industrial del control de procesos, la presencia del error de estado estacionario o *corrimiento* suele ser inaceptable. En esta sección se verá cómo calcular el corrimiento en caso de estar presente. Para ello, se vuelve al intercambiador de la figura 6-1.1 y su diagrama de bloques correspondiente de la figura 6-1.3. Como se vio anteriormente, ésta es una representación linealizada del intercambiador de calor. El objetivo es obtener las relaciones de lazo cerrado en estado estacionario entre la variable de salida y cada una de las variables de entrada al lazo mediante la aplicación del teorema del valor final a la función de transferencia de lazo cerrado. Por la ecuación 6-1.7, la función de transferencia de lazo cerrado entre la temperatura de salida y el flujo del fluido de proceso es

$$\frac{T_o(s)}{W(s)} = \frac{G_w(s)}{1 + H(s)G_s(s)G_v(s)G_c(s)} \tag{6-1.7}$$

Recuérdese que en esta expresión se supone que las variables de desviación para la temperatura de entrada T_i y la referencia T_o^{set} son cero cuando las otras entradas se mantienen constantes. Recuérdese asimismo, de la sección 3-5, que la relación de estado estacionario entre la salida y la entrada a una función de transferencia se obtiene haciendo $s = 0$ en la función de transferencia. Esto se sigue del teorema del valor final para transformadas de Laplace. Aplicando este método a la ecuación 6-1.7 se obtiene

$$\frac{\Delta T_o}{\Delta W} = \frac{G_w(0)}{1 + H(0)G_s(0)G_v(0)G_c(0)} \tag{6-1.19}$$

donde:

ΔT_o = el cambio de estado estacionario en la temperatura de salida, °C
ΔW = el cambio de estado estacionario en el flujo del fluido de proceso, kg/s.

Si se supone, como suele ser el caso, que el proceso es estable,

$G_w(0) = K_w$, la ganancia del proceso de lazo abierto a un cambio en el flujo del fluido de proceso, °C/(kg/s).
$G_s(0) = K_s$, la ganancia del proceso de lazo abierto a un cambio en el flujo de vapor, °C/(kg/s).

Del mismo modo, para la válvula y el sensor-transmisor,

$$G_v(0) = K_v, \text{ la ganancia de la válvula, (kg/s)/\%CO}$$
$$H(0) = K_T, \text{ la ganancia del sensor-transmisor, \%TO°C}$$

Finalmente, si el controlador no tiene modo integral,

$$G_c(0) = K_c, \text{ la ganancia proporcional, \%CO/\%TO}$$

Sustituyendo estos términos en la ecuación 6-1.19 se obtiene

$$\frac{\Delta T_o}{\Delta W} = \frac{K_w}{1 + KK_c} \frac{°C}{\text{kg/s}} \tag{6-1.20}$$

donde $K = K_T K_s K_v$ es la ganancia combinada de los elementos del lazo diferentes del controlador, en %TO/%CO. Como el cambio en la referencia es cero, el error de estado estacionario o corrimiento es $e = \Delta T_o^{\text{set}} - \Delta T_o = -\Delta T_o$ °C. Combinando esta relación con la ecuación 6-1.20 se obtiene

$$\frac{e}{\Delta W} = \frac{-K_w}{1 + KK_c} \frac{°C}{\text{kg/s}} \tag{6-1.21}$$

Nótese que el corrimiento se reduce a medida que la ganancia del controlador, K_c, aumenta.

Siguiendo un procedimiento análogo para la ecuación 6-1.8, se obtiene la relación de estado estacionario ante un cambio de referencia bajo flujo constante de fluido de proceso.

$$\frac{\Delta T_o}{\Delta T_o^{\text{set}}} = \frac{K_s K_v K_c K_{sp}}{1 + K_T K_s K_v K_c} = \frac{KK_c}{1 + KK_c} \frac{°C}{°C} \tag{6-1.22}$$

donde ΔT_o^{set} es el cambio en estado estacionario en la referencia, °C, y se ha usado $K_{sp} = K_T$. El corrimiento en este caso es $e = \Delta T_o^{\text{set}} - \Delta T_o$ °C. Combinando esta relación con la ecuación 6-1.22 se obtiene

$$\frac{e}{\Delta T_o^{\text{set}}} = 1 - \frac{KK_c}{1 + KK_c} = \frac{1 + KK_c - KK_c}{1 + KK_c} = \frac{1}{1 + KK_c} \frac{°C}{°C} \tag{6-1.23}$$

Nuevamente, entre mayor sea la ganancia del controlador, menor será el corrimiento.

Efecto del modo integral

Para un controlador proporcional integral (PI)

$$G_c(0) = \lim_{s \to 0} K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) = \infty$$

en cuyo caso, al sustituir la expresión en la ecuación 6-1.19 o 6-1.23, en lugar de K_c, se observa que el corrimiento es cero. Lo mismo se cumple para un controlador PID y para un controlador integral puro.

Ejemplo 6-1.4 Para el intercambiador de calor de la figura 6-1.1, calcular las relaciones linealizadas para el error de estado estacionario en la temperatura de salida ante

a) Un cambio en el flujo de proceso.
b) Un cambio en la referencia.

Las condiciones de operación y las especificaciones de los instrumentos son

Flujo del fluido de proceso	$w = 12$ kg/s
Temperatura de entrada	$T_i = 50°C$
Referencia	$T_o^{\text{set}} = 90°C$
Capacidad calorífica del fluido	$c_p = 3.75$ kJ/kg°C
Calor latente del vapor	$\lambda = 2250$ kJ/kg
Capacidad de la válvula de vapor	$w_{s,\,\text{máx}} = 1.6$ kg/s
Rango del transmisor	50-150 °C

Solución Si se supone que las pérdidas de calor son despreciables, se puede escribir el siguiente balance de energía de estado estacionario:

$$\bar{w} c_p (\bar{T}_o - T_i) = \bar{w}_s \lambda$$

y, despejando $\bar{w}_s$, el flujo de vapor requerido para mantener T_o a 90°C es

$$\bar{w}_s = \frac{\bar{w} c_p (\bar{T}_o - T_i)}{\lambda} = \frac{(12)(3.75)(90-50)}{2250} = 0.80 \text{ kg/s}$$

El siguiente paso es calcular las ganancias de lazo abierto en estado estacionario para cada uno de los elementos del lazo.

Intercambiador. Despejando T_o en el balance de energía de estado estacionario se obtiene

$$\bar{T}_o = T_i + \frac{\bar{w}_s \lambda}{\bar{w} c_p}$$

Por linealización, como se estudió en la sección 2-6, se obtiene

$$K_w = \frac{\overline{\partial T_o}}{\partial w} = -\frac{\bar{w}_s \lambda}{\bar{w}^2 c_p} = -\frac{(0.8)(2250)}{(12)^2 (3.75)} = -3.33 \frac{°C}{\text{kg/s}}$$

$$K_s = \frac{\overline{\partial T_o}}{\partial w_s} = \frac{\lambda}{\bar{w} c_p} = \frac{(2250)}{(12)(3.75)} = 50 \frac{°C}{\text{kg/s}}$$

Tabla 6-1.3 Corrimiento para el lazo de control del intercambiador de calor

K_c, %CO/%TO	$\frac{e}{\Delta w}$, °C/kg/s	$\frac{e}{\Delta T_o^{set}}$, °C/°C
0	3.33	1.00
0.5	2.38	0.714
1.0	1.85	0.556
5.0	0.67	0.200
10.0	0.37	0.111
20.0	0.20	0.059
100.0	0.04	0.012

Válvula de control. Suponiendo una válvula lineal con caída de presión constante, la ganancia de la válvula es, por la sección 5-2,

$$K_v = \frac{w_{s,\text{máx}}}{100} = \frac{1.6}{100} = 0.016 \frac{\text{kg/s}}{\%\text{CO}}$$

Sensor-transmisor. Por la sección 5-1, la ganancia del transmisor es

$$K_T = \frac{100 - 0}{150 - 50} = 1.0 \frac{\%\text{TO}}{°\text{C}}$$

Entonces $K = K_T K_s K_v = (1.0)(50)(0.016) = 0.80$ %TO/%CO.

a) Sustituyendo en la ecuación 6-1.21 se obtiene

$$\frac{e}{\Delta w} = \frac{-K_w}{1 + KK_c} = \frac{-3.33}{1 + 0.80K_c} \frac{°\text{C}}{\text{k/s}}$$

b) Sustituyendo en la ecuación 6-1.23 se obtiene

$$\frac{e}{\Delta T_o^{\text{set}}} = \frac{1}{1 + KK_c} = \frac{1}{1 + 0.80K_c} \frac{°\text{C}}{°\text{C}}$$

En la tabla 6-1.3 se presentan los resultados para diferentes valores de K_c. Se observa que el corrimiento en la temperatura de salida tiende a cero cuando la ganancia se incrementa. Estos resultados ilustran la afirmación que se hizo en la sección 5-3 respecto al hecho de que el corrimiento disminuye cuando la ganancia del controlador proporcional aumenta. Tal como se señaló en esa sección, la ganancia del controlador está limitada por la estabilidad del lazo. Este hecho se examinará en la siguiente sección.

6-2 ESTABILIDAD DEL LAZO DE CONTROL

Como se definió en la sección 2-3.3, un sistema es estable si su salida permanece acotada para una entrada acotada. La mayoría de los procesos industriales son estables en lazo abierto, es decir, son estables cuando no forman parte de un lazo de control por retroalimentación. Esto es equivalente a decir que la mayoría de los procesos son autorregulados, es decir, la salida pasará de un estado estacionario a otro cuando sea estimulada por cambios en las señales de entrada del proceso. Como se vio en el capítulo 4, un ejemplo típico de un proceso inestable en lazo abierto es un reactor exotérmico con tanque de agitación.

Incluso para los procesos estables en lazo abierto, su estabilidad se torna una consideración importante cuando el proceso se vuelve parte de lazos de control por retroalimentación. Esto se debe a que las variaciones de las señales se pueden reforzar mutuamente cuando viajan alrededor del lazo, haciendo que la salida –y las demás señales del lazo– se vuelva no acotada. Como se señaló en el capítulo 1, el comportamiento de un lazo de control por retroalimentación es, en esencia, oscilatorio –"prueba y error"–. Bajo ciertas circunstancias, las oscilaciones pueden incrementarse en magnitud, produciendo un proceso inestable. El caso más simple de un lazo por retroalimentación inestable es el controlador cuya dirección de acción es la opuesta a la que debería tener. Por ejemplo, en el intercambiador de calor considerado en la sección anterior, si la salida del controlador se incrementara con el aumento de la temperatura (controlador de acción directa), el lazo sería inestable porque la apertura de la válvula de vapor propiciaría un incremento adicional de la temperatura. Lo que se necesita en este caso es un controlador de acción inversa que disminuya su salida cuando la temperatura se incremente para que la válvula de vapor se cierre y con esto baje la temperatura. Sin embargo, incluso para un controlador con la acción correcta, el sistema puede volverse inestable debido a los retardos en el lazo. Esto ocurre por lo general cuando se incrementa la ganancia del lazo. La ganancia del controlador en la que el lazo llega al umbral de la inestabilidad es, en consecuencia, de importancia primordial en el diseño de un lazo de control por retroalimentación. Esta ganancia máxima se denomina la *ganancia última*.

En esta sección se determina un criterio para la estabilidad de un sistema dinámico y se estudia el método de sustitución directa para calcular la ganancia última. Después se estudia el efecto de varios parámetros del lazo sobre su estabilidad.

6-2.1 Criterio de estabilidad

Se ha visto ya que la respuesta de un lazo de control a una entrada dada se puede representar (ecuación 6-1.18) por

$$C(t) = b_1 e^{r_1 t} + b_2 e^{r_2 t} + \cdots + b_n e^{r_n t} + (\text{términos de la entrada}) \qquad (6\text{-}2.1)$$

donde $C(t)$ es la variable controlada y $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son las raíces de la ecuación característica del lazo.

Suponiendo que los términos de la entrada se mantienen acotados cuando el tiempo se incrementa, la estabilidad del lazo requiere que los términos de la respuesta no forzada también

se mantengan acotados cuando el tiempo se incrementa. Esto depende únicamente de las raíces de la ecuación característica y se puede expresar como sigue:

Para raíces reales:	Si $r < 0$, entonces	$e^{rt} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$
Para raíces complejas:	$r = \sigma + i\omega$	$e^{rt} = e^{\sigma t}\ \text{sen}(\omega t + \theta)$
	Si $\sigma < 0$, entonces	$e^{\sigma t}\ \text{sen}(\omega t + \theta) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

En otras palabras, la parte real de las raíces complejas y las raíces reales debe ser negativa para que los términos correspondientes de la respuesta decaigan a cero. Este resultado no es afectado por raíces repetidas, pues esto sólo introduce un polinomio del tiempo en la solución que no puede superar el efecto de decaimiento del término exponencial (ver el capítulo 2). Nótese que, si cualquiera de las raíces de la ecuación característica es un número real positivo, o un número complejo con parte real positiva, ese término en la respuesta (ecuación 6-2.1) será no acotado y la respuesta completa será no acotada aun cuando los demás términos decaigan a cero. Lo anterior lleva a la siguiente enunciación del criterio para la estabilidad de un lazo de control:

Para que un lazo de control por retroalimentación sea estable, todas las raíces de su ecuación característica deben ser números reales negativos o números complejos con parte real negativa.

Si ahora se define el plano complejo s como un plano cartesiano con la parte real de las raíces en el eje horizontal y la parte imaginaria en el eje vertical, se puede establecer el siguiente enunciado gráfico del criterio de estabilidad (ver la figura 6-2.1):

Para que un lazo de control por retroalimentación sea estable, todas las raíces de su ecuación característica deben estar en la mitad izquierda del plano s, *también conocido como el "plano del lado izquierdo".*

Cabe señalar que ambos enunciados del criterio de estabilidad en el dominio de Laplace son válidos en general para cualquier sistema físico, no sólo para lazos de control por retroalimentación. En cada caso, la ecuación característica se obtiene igualando con cero el denominador de la función de transferencia.

Una vez establecido el criterio de estabilidad, la atención se dirige ahora a determinar la estabilidad de un lazo de control.

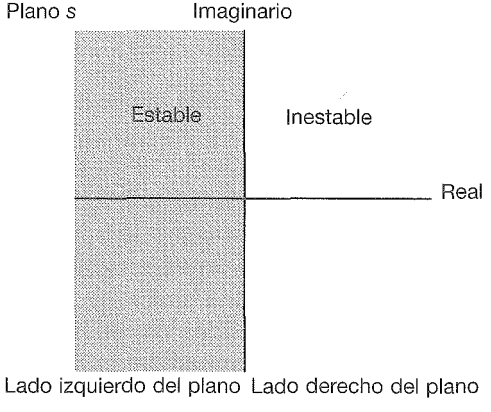


Figura 6-2.1 El plano s, el cual indica las regiones de estabilidad e inestabilidad para la localización de las raíces de la ecuación característica.

6-2.2 Método de sustitución directa

La sustitución directa es un método conveniente para determinar el rango de parámetros del controlador para el que la respuesta de lazo cerrado es estable. El método se basa en el hecho de que las raíces de la ecuación característica varían de manera continua con los parámetros del lazo. Por consiguiente, en el punto frontera de la inestabilidad, al menos una y por lo general dos de las raíces deben estar sobre el eje imaginario del plano complejo cuando cruzan del lado izquierdo del plano al lado derecho. Esto significa que estas raíces son números imaginarios puros (parte real igual a cero) al borde de la inestabilidad. En este punto, se dice que el lazo es marginalmente estable, y el término correspondiente en la salida del lazo es, en el dominio de Laplace,

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + \omega_u^2} + (\text{otros términos}) \tag{6-2.2}$$

o, bien, al invertir este término (utilizando la tabla 2-1.1) se obtiene una onda sinusoidal en el dominio del tiempo:

$$C(t) = b_1' \operatorname{sen}(\omega_u t + \theta) \tag{6-2.3}$$

donde ω_u es la frecuencia de la onda sinusoidal, θ es el ángulo de fase, y b_1' es su amplitud (constante). Esto significa que, en el punto de estabilidad marginal, la ecuación característica debe tener un par de raíces imaginarias puras en $r_{1,2} = \pm i\omega_u$. La frecuencia ω_u a la que oscila el lazo es la *frecuencia última*. La ganancia del controlador en la que se alcanza este punto de estabilidad marginal se conoce como *ganancia última*. En una ganancia ligeramente inferior a la última, el lazo oscila con amplitud decreciente, mientras que con una ganancia ligeramente mayor que la última, la amplitud de las oscilaciones se incrementa con el tiempo. En el punto de estabilidad marginal, la amplitud de las oscilaciones se mantiene constante con el tiempo. En la figura 6-2.2 se muestran estas respuestas junto con la representación gráfica del *periodo último*, T_u. Éste es el periodo de las oscilaciones que se obtienen con la ganancia última y está relacionado con la frecuencia última, ω_u, en rad/s, por

$$T_u = \frac{2\pi}{\omega_u} \tag{6-2.4}$$

El método de sustitución directa consiste en sustituir $s = i\omega_u$ en la ecuación característica. Esto resulta en una ecuación compleja que se puede convertir en dos ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} \text{Parte real} &= 0 \\ \text{Parte imaginaria} &= 0 \end{aligned}$$

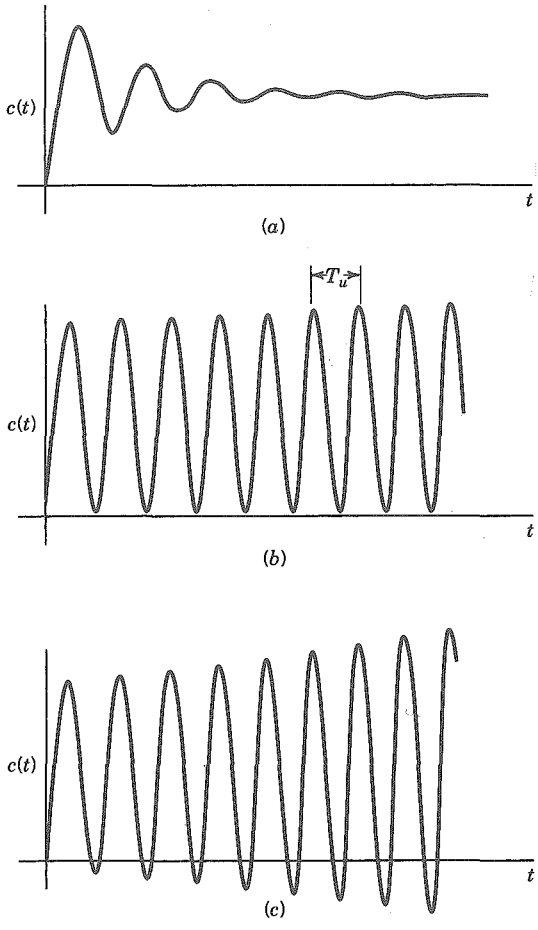


Figura 6-2.2 Respuesta de lazo cerrado con la ganancia del controlador menor que la ganancia última (*a*), igual que la ganancia última (*b*), y mayor que la ganancia última (*c*).

A partir de estas ecuaciones se puede resolver el sistema para dos incógnitas: una es la frecuencia última, ω_u, la otra es cualquiera de los parámetros del lazo, en general la ganancia del controlador en el punto de inestabilidad marginal o ganancia última. Generalmente, la respuesta de lazo cerrado es inestable cuando la ganancia del controlador es mayor que la ganancia última. En el siguiente ejemplo se muestra la manera en que se utiliza el método de sustitución directa para calcular la ganancia última y el periodo último del lazo de control del intercambiador de calor.

Ejemplo 6-2.1 ***Ganancia última y periodo último del controlador de temperatura por sustitución directa.*** Supóngase que las funciones de transferencia para los diferentes elementos del lazo de control de temperatura de la figura 6-1.3 son las siguientes:

Intercambiador. La respuesta del intercambiador al flujo de vapor tiene una ganancia de 50°C/(kg/s) y una constante de tiempo de 30*s*.

$$G_s(s) = \frac{50}{30s+1}\frac{°C}{kg/s}$$

Sensor-transmisor. El sensor-transmisor está calibrado para operar en un rango de 50°C a 150°C y tiene una constante de tiempo de 10*s*.

$$H(s) = \frac{1.0}{10s+1}\frac{\%TO}{°C}$$

Válvula de control. La válvula de control tiene una capacidad máxima de 1.6 kg/s de vapor, características lineales, caída de presión constante y una constante de tiempo de 3*s*.

$$G_v(s) = \frac{0.016}{3s+1}\frac{kg/s}{\%CO}$$

Controlador. El controlador es sólo proporcional. $G_c(s) = K_c$ %CO/%TO.

Por tanto, el problema consiste en determinar la ganancia última del controlador, es decir, el valor de K_c para el que el lazo se vuelve marginalmente estable, y el periodo último.

Solución La ecuación característica está dada por la ecuación 6-1.12:

$$1 + H(s)G_s(s)G_v(s)G_c(s) = 1 + \frac{1.0}{10s+1}\cdot\frac{50}{30s+1}\cdot\frac{0.016}{3s+1}\cdot K_c = 0$$

donde se ha sustituido la función de transferencia para cada elemento del lazo. Ahora es necesario reordenar esta ecuación en forma polinómica:

$$(10s+1)(30s+1)(3s+1) + 0.80K_c = 0$$
$$900s^3 + 420s^2 + 43s + 1 + 0.80K_c = 0$$

A continuación se sustituye $s = i\omega_u$ para $K_c = K_{cu}$:

$$900i^3\omega_u^3 + 420i^2\omega_u^2 + 43i\omega_u + 1 + 0.80K_{cu} = 0$$

Después se sustituye $i^2 = -1$ y se separan las partes real e imaginaria:

$$(-420\omega_u^2 + 1 + 0.80K_{cu}) + i(-900\omega_u^3 + 43\omega_u) = 0 + i0$$

De esta ecuación compleja se obtienen las dos ecuaciones siguientes, ya que tanto la parte real como la imaginaria deben ser iguales a cero:

$$-420\omega_u^2 + 1 + 0.80K_{cu} = 0$$
$$-900\omega_u^3 + 43\omega_u = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones tiene las siguientes posibilidades:

$$\text{Para } \omega_u = 0 \qquad K_{cu} = -1.25\ \%\text{CO}/\%\text{TO}$$
$$\text{Para } \omega_u = 0.2186\ \text{rad/s} \qquad K_{cu} = 23.8\ \%\text{CO}/\%\text{TO}$$

La primera solución corresponde a la inestabilidad monótona causada por tener la acción equivocada en el controlador. En este caso, el sistema no oscila sino que se mueve monótonamente en una u otra dirección. La intersección con el eje imaginario ocurre en el origen ($s = 0$). Esta solución es irrelevante.

La ganancia última de la segunda solución es la relevante. Con esta ganancia, la respuesta del lazo oscila con una frecuencia de 0.2186 rad/s (0.0348 hertz) o un periodo de

$$T_u = \frac{2\pi}{\omega_u} = \frac{2\pi}{0.2186} = 28.7\ \text{s}$$

En la sección anterior se vio que el corrimiento o error de estado estacionario inherente en los controladores proporcionales se puede reducir incrementando la ganancia del controlador. Se observa aquí que la estabilidad impone un límite en cuanto a lo alta que puede ser la ganancia. También es de interés estudiar la manera en que los otros parámetros del lazo afectan a la ganancia última y al periodo último.

Ejemplo 6-2.2 ***Ganancia última y periodo último del tanque calentador con agitación continua.*** Obtener la ganancia última y el periodo último del lazo de control de temperatura del tanque calentador con agitación continua del ejemplo 6-1.1, suponiendo un controlador proporcional.

Solución Por la función de transferencia para el lazo cerrado, desarrollada en el ejemplo 6-1.1, la ecuación característica del lazo es

$$1 + G_c(s)G_1(s) = 0$$

con $G_c(s) = K_c$ %CO/%TO (controlador proporcional), y

$$G_1(s) = \frac{1.954}{(0.2s+1)(8.34s+1)(0.502s+1)(0.75s+1)} \frac{\%\text{TO}}{\%\text{CO}}$$

donde $1.954 = 1.652 \cdot 1.183 \cdot 1.0$. Sustituyendo $G_1(s)$ y $G_c(s)$ en la ecuación característica y reduciendo las fracciones, se obtiene

$$(0.2s+1)(8.34s+1)(0.502s+1)(0.75s+1)+1.954K_c = 0$$

o, en forma polinómica,

$$0.628s^4 + 5.303s^3 + 12.73s^2 + 9.790s + 1 + 1.954K_c = 0$$

Sustituyendo $s = i\omega_u$ para $K_c = K_{cu}$ y agrupando las partes reales y las imaginarias,

$$(0.628\,\omega_u^4 - 12.73\,\omega_u^2 + 1 + 1.954\,K_{cu}) + i(-5.303\,\omega_u^3 + 9.790\,\omega_u) = 0 + i0$$

Despejando ω_u al igualar la parte imaginaria con cero y K_{cu} al igualar la parte real con cero se obtiene

$$\omega_u = \sqrt{\frac{9.790}{5.303}} = 1.359\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$K_{cu} = \frac{-0.628(1.359)^4 + 12.73(1.359)^2 - 1}{1.954} = 10.4\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

El periodo último es $T_u = 2\pi/1.359 = 4.6$ min.

6-2.3 Efecto de los parámetros del lazo sobre la ganancia última y el periodo último

Supóngase que el rango calibrado del sensor-transmisor de temperatura del ejemplo 6-2.1 se reduce de 75°C a 125°C. La nueva ganancia del transmisor es

$$K_T = \frac{100-0}{125-75} = 2.0\frac{\%\text{TO}}{^\circ\text{C}}$$

La ecuación característica del lazo pasa a ser

$$900s^3 + 420s^2 + 43s + 1 + 1.60K_c = 0$$

y la ganancia última y el periodo último son

$$K_{cu} = 11.9\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}} \quad T_u = 28.7\ \text{s}$$

Ésta es exactamente la mitad de la ganancia última para el caso base, lo cual indica que la ganancia última del lazo sigue siendo la misma. La ganancia del lazo se define como el producto de las ganancias de todos los bloques del lazo:

$$K_L = K_v K_s K_T K_c \tag{6-2.5}$$

donde K_L es la ganancia del lazo (adimensional).

Del mismo modo, si se duplicara la capacidad de la válvula de control, y por tanto su ganancia, la ganancia última del controlador se reduciría a la mitad de su valor para el caso base.

Supóngase ahora que un sensor-transmisor más rápido, con constante de tiempo de 5 s, se instala en la aplicación en cuestión reemplazando el instrumento con constante de 10 s. La nueva función de transferencia es

$$H(s) = \frac{1.0}{5s+1}\frac{\%\text{TO}}{^\circ\text{C}}$$

Entonces la ecuación característica es

$$1 + \frac{1.0}{5s+1}\cdot\frac{50}{30s+1}\cdot\frac{0.016}{3s+1}\cdot K_c = 0$$

$$450s^3 + 255s^2 + 38s + 1 + 0.80K_c = 0$$

y la ganancia última, la frecuencia última y el periodo último son

$$\omega_u = 0.2906\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \qquad T_u = 21.6\ \text{s}, \quad K_{cu} = 25.7\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

La reducción de la constante de tiempo del sensor ha resultado en un ligero incremento de la ganancia última y una reducción del periodo de oscilación del lazo. Esto se debe a que se ha reducido el retardo de medición en el lazo de control. Se habría obtenido un resultado similar si la constante de tiempo de la válvula de control se hubiera reducido. Sin embargo, el incremento de la ganancia última habría sido aún menor, pues la válvula no es tan lenta como el sensor-transmisor. Se invita al lector a verificar lo anterior.

Finalmente, se considera el caso en que un cambio en el diseño del intercambiador de calor resulta en una constante de tiempo menor para el proceso, a saber de 30 s a 20 s. La nueva función de transferencia es

$$G_s(s) = \frac{50}{20s+1}\frac{°C}{kg/s}$$

Entonces, la ecuación característica es

$$1 + \frac{1.0}{10s+1}\cdot\frac{50}{20s+1}\cdot\frac{0.016}{3s+1}\cdot K_c = 0$$
$$600s^3 + 290s^2 + 33s + 1 + 0.80K_c = 0$$

y la frecuencia última, la ganancia última y el periodo último son

$$\omega_u = 0.2345\ \frac{rad}{s}, \qquad T_u = 26.8\ s, \qquad K_{cu} = 18.7\ \frac{\%CO}{\%TO}$$

Sorprendentemente, la ganancia última disminuye por una reducción de la constante de tiempo del proceso. Este es el efecto opuesto a la reducción de la constante de tiempo del sensor-transmisor. La razón es que cuando la constante de tiempo mayor o dominante se reduce, el efecto relativo de los demás retardos presentes en el lazo se vuelve más pronunciado. En otras palabras, en términos de la ganancia última, reducir la constante de tiempo mayor es equivalente a incrementar proporcionalmente las demás constantes de tiempo del lazo. Sin embargo, el lazo con la constante de tiempo menor del proceso responde más rápido que el lazo original, como lo indica el periodo último menor. En la tabla 6-2.1 se resumen los resultados del método de sustitución directa para los cuatro casos tratados aquí. Cabe señalar que el lazo puede oscilar significativamente más rápido cuando la constante de tiempo del sensor-transmisor se reduce de 10 s a 5 s. Asimismo, el lazo oscila ligeramente más rápido cuando la constante de tiempo del

Tabla 6-2.1 Resultados de la sustitución directa para el lazo de control del intercambiador de calor

	K_{cu}	ω_u, rad/s	T_u, s
1. Caso base	23.8	0.2186	28.7
2. $H(s) = \frac{2.0}{10s+1}$	11.9	0.2186	28.7
3. $H(s) = \frac{1.0}{5s+1}$	25.7	0.2906	21.6
4. $G_s(s) = \frac{50}{20s+1}$	18.7	0.2345	26.8

intercambiador se reduce de 30 s a 20 s, a pesar de la significativa reducción en la ganancia última. Cambiar las ganancias de los bloques en el lazo no tiene efecto en la frecuencia de oscilación ni en la ganancia última de lazo.

6-2.4 Efecto del tiempo muerto

Se ha visto la manera en que el método de sustitución directa permite estudiar el efecto de diferentes parámetros del lazo sobre la estabilidad del lazo de control por retroalimentación. Desafortunadamente, el método falla cuando cualquiera de los bloques del lazo contiene un término de tiempo muerto (retardo de transporte o tiempo de retraso). Esto se debe a que el tiempo muerto introduce una función exponencial de la variable de la transformada de Laplace en la ecuación característica. Esto significa que la ecuación deja de ser polinómica y los métodos que se han aprendido en esta sección ya no son aplicables. Un incremento en el tiempo muerto tiende a reducir con gran rapidez la ganancia última del lazo. Este efecto es similar al de incrementar las constantes de tiempo no dominantes del lazo en que están relacionados con la magnitud de la constante de tiempo dominante. El efecto exacto del tiempo muerto sobre la estabilidad del lazo podrá examinarse cuando se estudie el método de respuesta en frecuencia en el capítulo 8.

Cabe señalar que el intercambiador que se ha utilizado en este capítulo constituye un sistema de parámetros distribuidos; es decir, la temperatura del fluido de proceso se distribuye a través del intercambiador. Las funciones de transferencia para estos sistemas por lo general contienen al menos un término de tiempo muerto, el cual, para simplificar, se ha ignorado.

En ocasiones se puede obtener una estimación de la ganancia última y de la frecuencia última de un lazo con tiempo muerto utilizando una aproximación de la función de transferencia del tiempo muerto. La aproximación de primer orden de Padé es muy popular, y está dada por

$$e^{-t_0 s} \approx \frac{1-\frac{t_0}{2}s}{1+\frac{t_0}{2}s} \tag{6-2.6}$$

donde t_0 es el tiempo muerto. Se cuenta con aproximaciones de orden superior más precisas, pero son muy complejas para ser prácticas. En el siguiente ejemplo se ilustra el uso de la aproximación de Padé con el método de sustitución directa.

Ejemplo 6-2.3 ***Ganancia última y frecuencia última del proceso de primer orden más tiempo muerto.*** Sea la función de transferencia del lazo de la figura 6-1.4

$$G_1(s) = \frac{Ke^{-t_0 s}}{\tau s + 1}$$

donde K es la ganancia, t_0 el tiempo muerto y τ es la constante de tiempo. Determinar la ganancia última y la frecuencia última del lazo como una función de los parámetros del proceso si el controlador es proporcional, $G_c(s) = K_c$ %CO/%TO.

Solución Por el ejemplo 6-1.2, la ecuación característica del lazo es

$$1+G_1(s)G_c(s)=1+\frac{KK_ce^{-t_0s}}{\tau s+1}=0$$

Sustituyendo la aproximación de Padé de primer orden, ecuación 6-2.6, se obtiene

$$1+\frac{K\,K_c\left(1-\dfrac{t_0}{2}s\right)}{(\tau s+1)\left(1+\dfrac{t_0}{2}s\right)}=0$$

Reduciendo la fracción,

$$\frac{t_0}{2}\tau s^2+\left(\tau+\frac{t_0}{2}-KK_c\frac{t_0}{2}\right)s+1+KK_c=0$$

Por el método de sustitución directa, $s=i\omega_u$ para $K_c=K_{cu}$. Después de igualar a cero las partes real e imaginaria y de resolver simultáneamente las dos ecuaciones, se obtiene

$$\omega_u=\frac{2}{t_0}\sqrt{\frac{t_0}{\tau}+1}$$

$$KK_{cu}=1+2\left(\frac{\tau}{t_0}\right)$$

Estas fórmulas indican que la ganancia última del lazo tiende a infinito –sin límite de estabilidad– cuando el tiempo muerto tiende a cero, en concordancia con los resultados del ejemplo 6-1.2. Sin embargo, cualquier cantidad finita de tiempo muerto le impone un límite de estabilidad a la ganancia del lazo. La frecuencia última se incrementa con la reducción del tiempo muerto y se vuelve muy pequeña si el tiempo muerto se incrementa. Esto significa que el tiempo muerto desacelera la respuesta del lazo.

6-2.5 Resumen de los ejemplos

De los resultados del análisis de la sustitución directa de los ejemplos anteriores, se pueden resumir los siguientes efectos generales de los diferentes parámetros del lazo:

- La estabilidad le impone un límite a la ganancia global del lazo, de tal modo que un incremento en la ganancia de la válvula de control, el transmisor o el proceso resulta en una reducción de la ganancia última del controlador.
- Un incremento en el tiempo muerto o en cualquiera de las constantes de tiempo no dominantes (las más pequeñas) del lazo resulta en una reducción de la ganancia última.
- Una reducción en la constante de tiempo dominante (la mayor) del lazo resulta en una reducción de la ganancia última del lazo y en un incremento de la frecuencia última del lazo.

6-3 RESUMEN

En este capítulo se ha presentado el análisis de los lazos de control por retroalimentación. Se ha visto cómo desarrollar las funciones de transferencia de lazo cerrado y la ecuación característica del lazo. Asimismo, se ha visto cómo estimar la ganancia de lazo cerrado en estado estacionario, la ganancia última y el periodo último del lazo. También se ha estudiado la manera en que los diferentes parámetros del lazo afectan la ganancia última y el periodo último. En el siguiente capítulo se presentarán varios métodos importantes para sintonizar controladores por retroalimentación.

PROBLEMAS

6-1. Un lazo de control por retroalimentación está representado por el diagrama de bloques de la figura 6-1.4. El proceso se puede representar con dos retardos en serie:

$$G_1(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

donde la ganancia del proceso es $K = 0.10$ %TO/%CO y las constantes de tiempo son

$$\tau_1 = 1\,\text{min}$$
$$\tau_2 = 0.8\,\text{min}$$

El controlador es proporcional: $G_c(s) = K_c$.

a) Escribir la función de transferencia de lazo cerrado y la ecuación característica del lazo.
b) ¿Para qué valores de la ganancia del controlador la respuesta del lazo a un cambio escalón en la referencia es sobreamortiguada, críticamente amortiguada y subamortiguada? ¿El lazo puede ser inestable?
c) Encontrar las constantes de tiempo efectivas, o la constante de tiempo de segundo orden y la relación de amortiguamiento de lazo cerrado, para $K_c = 0.1$, 0.125 y 0.20 %CO/%TO.

d) Determinar el corrimiento de estado estacionario para cada una de las ganancias del inciso c) y un cambio escalón unitario en la referencia.

6-2. Resolver el problema 6-1 para la función de transferencia del proceso

$$G(s) = \frac{6(1-s)}{(s+1)(0.5+1)} \frac{\%}{\%}$$

Las funciones de transferencia como ésta son típicas de procesos que constan de dos retardos en paralelo con acción opuesta (véase la sección 4-4.3). El controlador es proporcional como en el problema 6-1.

6-3. Un lazo de control por retroalimentación está representado por el diagrama de bloques de la figura 6-1.4. El proceso se puede representar con un retardo de primer orden y el controlador es proporcional integral (PI):

$$G_1(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)$$

Sin pérdida de la capacidad de generalizar, se puede hacer la constante de tiempo del proceso τ igual a 1, y la ganancia del proceso K igual a 1.

a) Escribir la función de transferencia de lazo cerrado y la ecuación característica para el lazo. ¿Hay corrimiento?
b) ¿Hay una ganancia última para este lazo?
c) Determinar la respuesta del lazo cerrado a un cambio escalón en la referencia para $\tau_I = \tau$ cuando la ganancia del controlador varía de cero a infinito.

6-4. Dado el lazo de control por retroalimentación del problema 6-1 y un controlador integral puro

$$G_c(s) = \frac{K_I}{s}$$

a) Determinar la ganancia última del controlador y el periodo último.
b) Recalcular la ganancia última del controlador para $\tau_2 = 0.10$ y para $\tau_2 = 2$. ¿Los resultados son los que se esperarían?

6-5. Para el lazo de control por retroalimentación del problema 6-1 y un controlador proporcional integral

$$G_c(s) = K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)$$

a) Determinar la ganancia última del lazo KK_{cu} y el periodo último de oscilación como una función del tiempo integral τ_I.
b) Determinar la razón de amortiguamiento y la razón de asentamiento cuando la ganancia del controlador se hace igual a la mitad de la ganancia última y el tiempo integral se hace igual a 1.

6-6. *Diseño de un lazo de control de flujo de gas.* Un lazo de control de flujo, el cual consiste en un orificio en serie con la válvula de control, un transmisor de presión diferencial y un controlador, debe diseñarse para un flujo nominal de proceso de 150 kscf/h (kscf = 1000 pies cúbicos de gas en condiciones estándar de 60°F y 1 atm). Las condiciones corriente arriba son constantes a 100 psig y 60°F, la presión corriente abajo es constante a 80 psig y el fluido es aire (peso molecular = 29). La válvula tiene características isoporcentuales con $\alpha = 50$ y un extractor de raíz cuadrada está incorporado en el transmisor, de tal modo que su señal de salida es lineal con el flujo. La constante de tiempo de la válvula es 0.06 min y la constante de tiempo del transmisor es despreciable. Un controlador proporcional integral (PI) regula el flujo. Trazar el diagrama de bloques del lazo de control de flujo indicando las funciones de transferencia específicas del controlador, la válvula de control y el transmisor de flujo. Escribir la función de transferencia de lazo cerrado del lazo y encontrar la constante de tiempo del lazo para $K_c = 0.9$ %CO/%TO y $\tau_I = \tau_v$.

6-7. *Lazo de control de flujo de vapor.* Un calentador de proceso requiere 3500 lb/h de vapor para calentar un fluido. Una válvula de control y un transmisor lineal de flujo se encuentran instalados para regular el flujo de vapor. Las condiciones son las siguientes: las condiciones corriente arriba de la válvula de control son 45 psig, con sobrecalentamiento de 50°F; la presión corriente abajo es 20 psig; el factor de flujo crítico es 0.8. Se propone el uso de una válvula lineal dimensionada para 100% de sobrecapacidad. El transmisor de flujo se dimensiona para medir un flujo máximo de 5000 lb/h y la salida es lineal con el flujo; es decir, tiene integrado un bloque de cálculo de raíz cuadrada. Trazar el diagrama de bloques del lazo de control de flujo indicando todas las funciones de transferencia y escribir la función de transferencia de lazo cerrado. Utilizar un controlador proporcional integral (PI) por retroalimentación con el tiempo integral ajustado en el valor de la constante de tiempo de la válvula de control. Encontrar la constante de tiempo del lazo para $K_c = 0.5$ %CO/%TO.

6-8. Para el lazo de control por retroalimentación representado por el diagrama de bloques de la figura 6-1.4, determinar la ganancia última y el periodo último para un controlador proporcional y cada una de las siguientes funciones de transferencia:

a) $G_1(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$

b) $G_1(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$

c) $G_1(s) = \dfrac{1}{(4s+1)(2s+1)(s+1)}$

d) $G_1(s) = \dfrac{(0.5s+1)}{(4s+1)(2s+1)(s+1)}$

e) $G_1(s) = \dfrac{1}{(4s+1)(0.2s+1)(0.1s+1)}$

f) $G_1(s) = \dfrac{e^{-0.6s}}{6s+1}$

6-9. Resolver el problema 6-8 usando un controlador integral puro, $G_c(s) = K_I/s$.

6-10. Un proceso inestable de lazo abierto puede representarse por el diagrama de bloques de la figura 6-1.4 y la siguiente función de transferencia:

$$G_1(s) = \frac{K}{(5s-1)(\tau_v s+1)(\tau_T s+1)}$$

donde τ_v y τ_T son, respectivamente, las constantes de tiempo de la válvula y del transmisor. Suponiendo un controlador proporcional, encontrar el rango de ganancias del lazo KK_c en el que el lazo es estable si:

a) Las constantes de tiempo de la válvula y del transmisor son despreciables.
b) La constante de tiempo de la válvula es despreciable y $\tau_T = 1.0$ min.
c) $\tau_v = 0.1$ min y $\tau_T = 1.0$ min.

Sugerencia: los incisos a) y b) se pueden resolver escribiendo las raíces de la ecuación característica como una función de la ganancia del lazo. El inciso c) requiere el uso del método de sustitución directa. Nótese que hay un límite inferior de estabilidad para la ganancia del lazo en cada caso.

6-11. Calcular la ganancia última y el periodo último de oscilación para un controlador-analizador proporcional instalado en el tanque de mezclado del problema 3-18. La válvula de control se debe instalar en la corriente diluida y dimensionar para 100% de sobrecapacidad. La válvula tiene características lineales, una caída de presión constante de 5 psi y se puede representar por un retardo de primer orden con una constante de tiempo de 0.1 min. El transmisor-analizador tiene un rango de 20 a 70 kg/m^3 y se puede representar con un retardo de primer orden con una constante de tiempo de 3 min. Trazar también el diagrama de bloques del lazo indicando todas las funciones de transferencia y

calcular el corrimiento causado por un cambio de 0.1 m^3/min en el flujo de la solución concentrada cuando la ganancia del controlador es la mitad de la ganancia última.
Nota: la simulación de este proceso es el tema del problema 13-11.

6-12. En la sección 4-2.3 se modeló en detalle un reactor químico no isotérmico. Calcular la ganancia última y el periodo último de un controlador de temperatura proporcional para el reactor suponiendo que la válvula de control está instalada en la línea de agua de enfriamiento del forro para regular el flujo de agua $f_c(t)$. La válvula es isoporcentual con una caída de presión constante y $\alpha = 50$, y el transmisor de temperatura tiene un rango de 640°R a 700°R. Las constantes de tiempo de la válvula y del transmisor pueden despreciarse. Trazar también el diagrama de bloques del lazo de control de temperatura indicando todas las funciones de transferencia. *Sugerencia:* para simplificar, el flujo de agua de enfriamiento se puede considerar como la única variable de entrada, es decir, se puede suponer que las demás variables de entrada permanecen constantes.
Nota: la simulación de este lazo es el tema del problema 13-21.

6-13. Resolver el problema 6-12 suponiendo que la válvula de control está instalada en la línea de reactivos para manipular el flujo de reactivos $f(t)$. Suponer que las demás variables de entrada, incluyendo el flujo de enfriamiento, permanecen constantes. Utilizar una válvula de control lineal con caída de presión constante y dimensionada para 100% de sobrecapacidad.

6-14. En el problema 4-3 se pidió modelar tres tanques de mezclado en serie. Encontrar la ganancia última y el periodo último de un controlador proporcional que debe regular la composición de salida del tercer tanque, $x_6(t)$, manipulando el flujo de agua de entrada al primer tanque, $f_1(t)$. Suponer una válvula de control isoporcentual con caída de presión constante y $\alpha = 50$. El transmisor-analizador tiene un rango de 0.30 a 0.70 unidades de fracción másica, y las constantes de tiempo de la válvula y del transmisor pueden despreciarse. Trazar también el diagrama de bloques del lazo y calcular el corrimiento causado por un cambio de 10 gpm en el flujo f_2 cuando la ganancia del controlador se hace igual a la mitad de la ganancia última.

6-15. *Control por retroalimentación de reactores en serie.* Considérese el control de la concentración que sale del segundo reactor en serie en el problema 4-9 mediante la manipulación del flujo de reactivos. El volumen de cada reactor es de 125 ft^3, la concentración de entrada inicial es $c_{Ai}(0) = 7.0$ lbmol/ft^3 y el coeficiente de la tasa de reacción en cada reactor es $k = 0.2$ min^{-1}. El flujo de entrada inicial es $f(0) = 10$ ft^3/min y el flujo de reciclado es cero. La válvula de control es lineal, dimensionada para 100% de sobrecapacidad, y tiene un retraso de tiempo despreciable. El transmisor-analizador tiene un rango de 0 a 5 lbmol/ft^3 y se puede representar con un retardo de primer orden con una constante de tiempo de 0.5 min. La referencia del controlador-analizador inicialmente es igual al valor de estado estacionario inicial de la concentración que sale del segundo reactor. Trazar el diagrama de bloques del lazo de control indicando todas las funciones de transferencia y calcular la ganancia última y el periodo último del lazo para un controlador proporcional. Suponiendo que la ganancia del controlador se hace igual a la mitad de la ganancia última, calcular también el corrimiento del controlador para un cambio en la concentración de entrada de 7.0 a 8.0 lbmol/ft^3. ¿Cuál sería el corrimiento si el lazo estuviera abierto (controlador en modo "manual" o $K_c = 0$)? ¿Cuál sería el corrimiento si el controlador fuera proporcional-integral (PI)?
Nota: la simulación de este proceso es el tema del problema 13-16.

6-16. En el problema 4-5 se pidió modelar un tanque en el que se mezcla vapor con un fluido líquido. Obtener la ganancia última y el periodo último para el controlador proporcional que debe regular la temperatura del caudal que sale del tanque manipulando la posición de la válvula de vapor. Trazar el diagrama de bloques del lazo de control de temperatura indicando todas las funciones de transferencia. Calcular el corrimiento causado por un cambio de 2 gpm en el flujo de entrada del líquido cuando la ganancia del controlador se hace igual a la mitad de la ganancia última.

6-17. *Control de la composición de tres reactores isotérmicos en serie.* Considérese el lazo de control de la concentración para los tres reactores con agitación que se muestran en la figura P6-1. Cada reactor tiene un volumen de 1000 gal y el flujo de diseño de los reactivos es de 100 gpm. La concentración de entrada inicial del componente A al primer reactor es de 4 lb/gal, y la tasa de reacción es proporcional a la concentración de A en cada reactor con un coeficiente constante de 0.1 min^{-1}. El transmisor de la concentración de salida del tercer reactor tiene un rango de 0 a 1.0 lb/gal y una constante de tiempo despreciable. La válvula de control del reactivo es lineal con una caída de presión constante de 5 psi y está dimensionada para un factor de 100% de sobrecapacidad. La constante de tiempo de la válvula es 0.1 min.

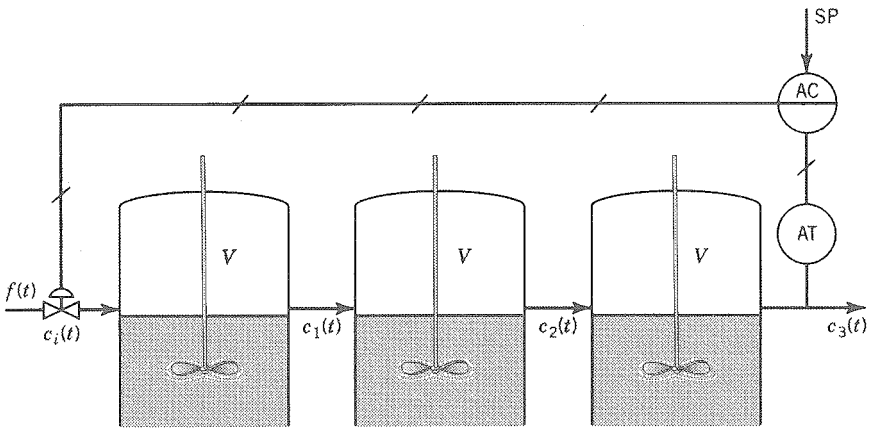


Figura P6-1 Tres reactores con agitación en serie para el problema 6-17.

a) Trazar el diagrama de bloques del lazo indicando todas las funciones de transferencia.

b) Si en este sistema se instala un controlador proporcional con una ganancia de 1.0 %CO/%TO, ¿cuál sería el corrimiento causado por un cambio de 1.0 lb/gal en la concentración de entrada del reactivo? ¿Cuál sería el corrimiento si la ganancia del controlador fuera cero? ¿Cuál sería el corrimiento para un controlador proporcional integral (PI)?

c) Suponiendo un controlador proporcional, calcular la ganancia última y el periodo último del lazo.

Nota: la simulación de este proceso es el tema del problema 13-23.

6-18. *Control de la presión de succión de una compresora.* La figura P6-2 muestra el diagrama esquemático de un lazo de control de la presión de succión de una compresora. Un balance de masa del volumen de succión resulta en el siguiente modelo linealizado aproximado para la presión de succión:

$$P_s(s) = \frac{0.5}{7.5s+1}[F_i(s) - F_c(s)] \text{ psi}$$

donde $F_i(s)$ y $F_c(s)$ son, respectivamente, los flujos de entrada y el de la compresora, kscf/min (1 kscf = 1000 ft^3 en condiciones estándar de 1 atm y 60°F), y la constante de tiempo está en segundos. Por tanto, la respuesta del flujo de la compresora a la salida del controlador, $M(s)$, en %CO, es

$$F_c(s) = \frac{0.36}{2.5s+1} M(s)$$

El transmisor de presión tiene un rango de 0 a 20 psig y se puede representar con un retraso de primer orden con una constante de tiempo de 1.2 s.

a) Trazar el diagrama de bloques del lazo y escribir las funciones de transferencia de lazo cerrado y la ecuación característica. ¿El controlador debe ser de acción directa o inversa?
b) Calcular la ganancia última y el periodo último suponiendo un controlador proporcional.

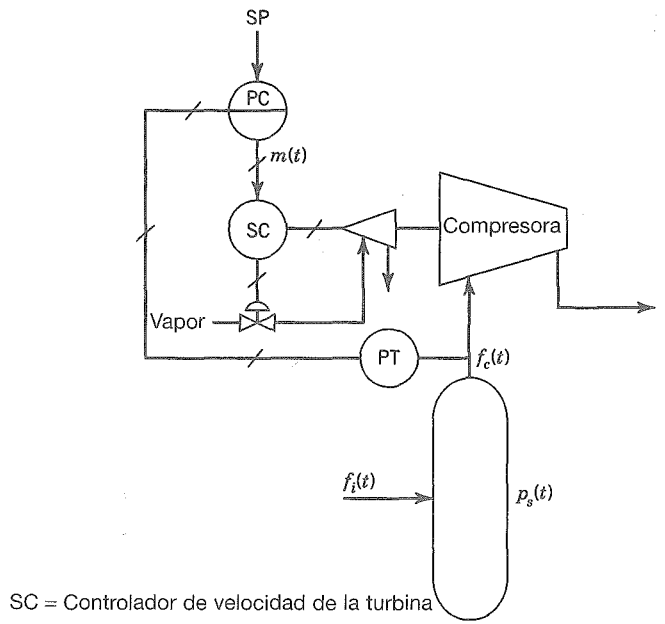


Figura P6-2 Control de presión de la compresora del problema 6-18.

c) Calcular el corrimiento causado por un cambio de 1.0 kscf/min en el flujo de entrada cuando la ganancia del controlador es la mitad de la ganancia última.

6-19. Los parámetros para el tanque de enfriamiento con agitación del problema 4-7 son: $V = 5.0\ m^3$, $U = 200$ kJ/min-m^2-°C, $A = 4.0\ m^2$, $V_c = 1.1\ m^3$, $\rho = 800\ kg/m^3$, $c_p = 3.8$ kJ/kg-°C, $\rho_c = 1000\ kg/m^3$, $c_{pc} = 4.2$ kJ/kg-°C. Las condiciones de diseño son las siguientes: flujo de proceso = $0.10\ m^3$/min, temperatura de entrada del proceso = 70°C, temperatura de salida del proceso = 45°C, y temperatura de entrada del líquido de enfriamiento = 25°C. El transmisor de temperatura (TT) tiene un rango de 20°C a 70°C y se puede representar con un retardo de primer orden con una constante de tiempo de 0.6 min. El transmisor de flujo (FT) del líquido de enfriamiento tiene un rango de 0 a $0.8\ m^3$/min, y la constante de tiempo del lazo de control de flujo (FIC) es 0.1 min.

a) Trazar el diagrama de bloques del lazo de control de temperatura indicando todas las funciones de transferencia. ¿La válvula de enfriamiento debe ser del tipo abierta en falla o cerrada en falla? ¿El controlador debe ser de acción directa o de acción inversa?
b) Calcular la ganancia última y el periodo último para el lazo de control de temperatura suponiendo un controlador proporcional (TIC).
c) Calcular el corrimiento causado por un incremento de 5°C en la temperatura de entrada del proceso cuando la ganancia del controlador de temperatura es la mitad de la ganancia última. ¿Cuál es el corrimiento cuando la ganancia del controlador es cero (modo manual)? ¿Cuál es el corrimiento si el controlador es proporcional integral (PI)?

Nota: la simulación de este proceso es el tema del problema 13-18.

6-20. El tanque de almacenamiento de gas que se muestra en la figura P6-3 abastece un gas con peso molecular de 50 a dos procesos. El primero recibe un flujo normal de 500 scf/min (scf = ft^3 a 1 atm y 60°F) y opera a una presión de 30 psig, mientras que el segundo proceso opera a una presión de 15 psig. Un proceso que opera a 90 psig abastece de gas al tanque de almacenamiento con una tasa de 1500 scf/min. El tanque tiene una capacidad de 550 000 ft^3 y opera a 45 psig y 350°F. Se puede suponer que el transmisor de presión responde instantáneamente con un rango calibrado de 0 a 100 psig.

a) Dimensionar las tres válvulas con un factor de 100% de sobrecapacidad. Para las tres válvulas se puede utilizar un factor $C_f = 0.9$.
b) Trazar el diagrama de bloques completo del sistema. Se pueden considerar como perturbaciones $P_1(t)$, $P_3(t)$, $P_4(t)$, $vp_3(t)$, $vp_4(t)$ y la referencia del controlador.
c) ¿El lazo de control por retroalimentación se puede hacer inestable? De ser así, ¿cuál es la ganancia última?
d) Usando un controlador sólo proporcional con una ganancia de 50 %CO/%TO, ¿cuál es el corrimiento que se observa para un cambio en la referencia de +5 psi?

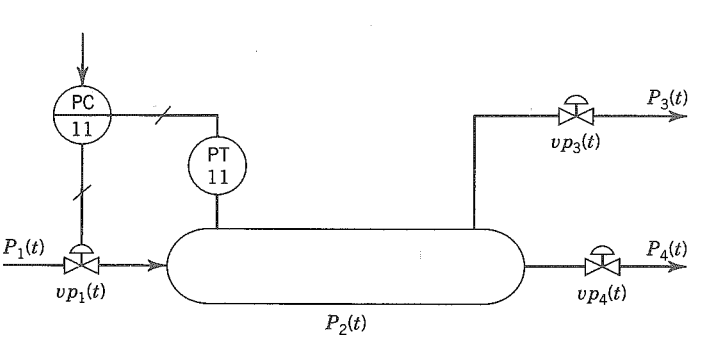


Figura P6-3 Tanque de almacenamiento de gas del problema 6-20.

6-21. Considérese el calentador eléctrico que se muestra en la figura P6-4. Dos corrientes con flujos másicos variables $w_A(t)$ y $w_B(t)$ pasan por el calentador donde se mezclan perfectamente y se calientan a la temperatura $T(t)$. La temperatura de salida se controla manipulando la corriente a través de una resistencia eléctrica. La fracción másica de salida del componente B también se controla manipulando la corriente de entrada del componente B. Se conoce la siguiente información:

- La caída de presión a través de cada válvula se puede suponer constante y por lo tanto los flujos están dados por

$$w_A(t) = K_{v1}\, vp_1(t) \quad w_B(t) = K_{v2}\, vp_2(t)$$

Estas dos corrientes son puras en los componentes A y B, respectivamente.

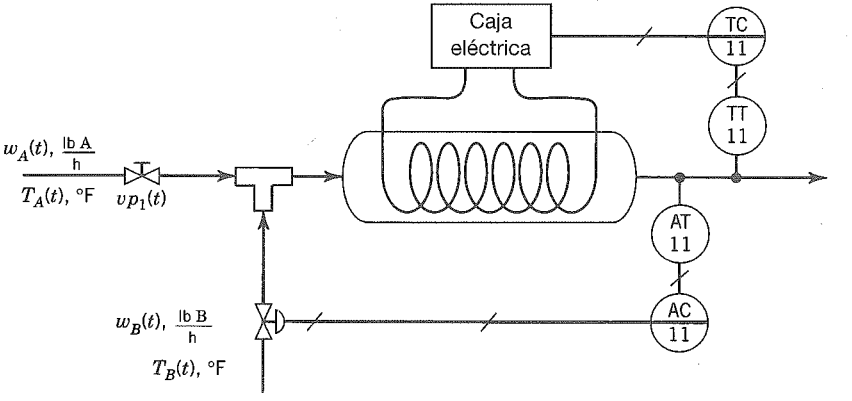


Figura P6-4 Calentador eléctrico para el problema 6-21.

- La fracción másica de B en el caudal de salida está relacionada con la conductividad eléctrica del caudal. La conductividad de este caudal es inversamente proporcional a la fracción másica, x_B, es decir,

$$\text{Conductividad} = \frac{\beta}{x_B}$$

donde β es una constante en mho-fracción másica/m. El transmisor de conductividad tiene un rango de C_L a C_H mho/m.

- Se puede suponer que la transferencia de calor, q, está relacionada linealmente con la salida del controlador en el rango de 0 a $q_{\text{máx}}$. Las perturbaciones de este sistema son $vp_1(t)$, $T_A(t)$ y $T_B(t)$.

a) A partir de principios básicos de ingeniería, derivar el sistema de ecuaciones que describe el lazo de control de la composición (conductividad). Indicar todas las suposiciones empleadas.

b) Linealizar las ecuaciones del inciso a) y trazar el diagrama de bloques completo del lazo de control de la conductividad. Indicar la función de transferencia de cada bloque. Especificar la acción requerida del controlador de la composición suponiendo que la válvula es del tipo aire para abrir.

c) A partir de principios básicos de ingeniería, derivar el sistema de ecuaciones que describe el lazo de control de la temperatura. Indicar todas las suposiciones empleadas.

d) Linealizar las ecuaciones del inciso c) y trazar el diagrama de bloques completo del lazo de control de la temperatura. Indicar la función de transferencia de cada bloque. Especificar la acción requerida del controlador de la temperatura.

e) Escribir la ecuación característica de cada lazo. ¿Alguno de los dos lazos se puede hacer inestable al incrementar la ganancia del controlador? Explicar brevemente la respuesta.

6-22. Considérese el sistema que se muestra en la figura P6-5. En cada uno de los dos tanques ocurre la reacción A → E. La tasa de reacción está dada por

$$r(t) = kc_A(t), \quad \frac{\text{lbmol}}{\text{gal-min}}$$

donde k es el coeficiente de la tasa de reacción, min^{-1}, y $c_A(t)$ es la concentración, lbmol/gal. Las perturbaciones de este proceso son $f_i(t)$ y $c_{Ai}(t)$. La concentración de salida del segundo reactor se controla manipulando un caudal de A puro al primer reactor. La densidad de este caudal es ρ_A en lbmol/gal. La temperatura en cada reactor se puede suponer constante. Se conocen los siguientes datos de diseño:

Volumen de los reactores:	$V_1 = 500$ gal,	$V_2 = 500$ gal
Coeficientes de la tasa de reacción:	$k_1 = 0.25$ min^{-1},	$k_2 = 0.50$ min^{-1},
Propiedades del caudal A:	$\rho_A = 2.0$ lbmol/gal,	$MW_A = 25$
Condiciones de diseño:	$\bar{c}_{Ai} = 0.8$ lbmol/gal,	$\bar{f}_i = 50$ gal/min,
	$f_A = 50$ gal/min	
Válvula de control:	$\Delta p_v = 10$ psi, características lineales.	
Rango del transmisor de concentración:	0.05 a 0.5 lbmol/gal. La dinámica de este transmisor se puede representar con un retardo de primer orden con una constante de tiempo de 0.5 min.	

a) Dimensionar la válvula de control para un factor de 100% de sobrecapacidad. Dar el valor de C_v y la ganancia de la válvula.
b) A partir de principios básicos de ingeniería, derivar el sistema de ecuaciones que describe el lazo de control de la composición. Indicar todas las suposiciones empleadas.
c) Linealizar las ecuaciones del inciso b) y trazar el diagrama de bloques completo del lazo de control de la composición. Indicar todas las funciones de transferencia con los valores numéricos y las unidades de las ganancias y las constantes de tiempo, excepto para el controlador.
d) Obtener las funciones de transferencia de lazo cerrado

$$\frac{C_{A2}(s)}{C_{A_2}^{\text{set}}(s)}; \qquad \frac{C_{A2}(s)}{F_i(s)}; \qquad \frac{C_{A2}(s)}{C_{Ai}(s)}$$

e) Calcular la ganancia última y el periodo último del lazo.

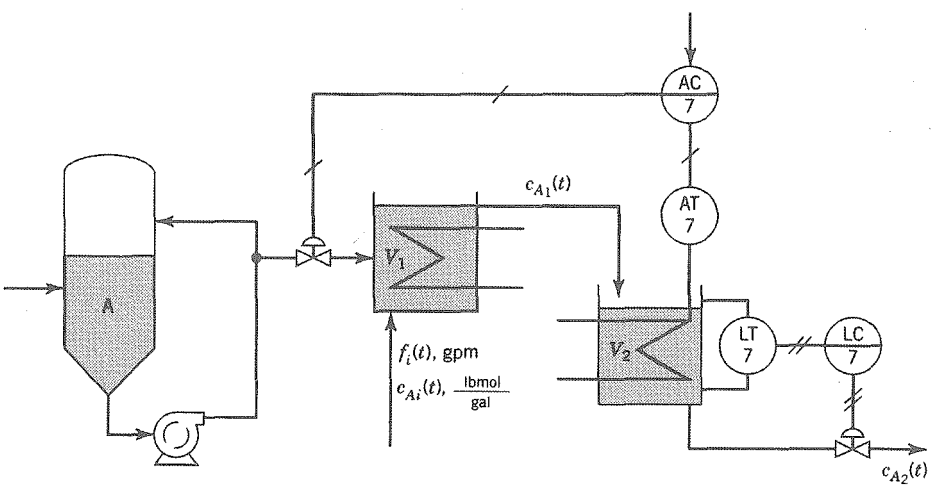


Figura P6-5 Reactores en serie para el problema 6-22.

6-23. Considérese el proceso que se muestra en la figura P6-6. En el primer tanque se mezclan y se calientan dos corrientes con flujos $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente. El medio de calentamiento fluye con tal rapidez que el cambio en su temperatura de la entrada a la salida no es significativo. Por tanto, la transferencia de calor se puede describir por $UA[T_{c1}(t) - T_3(t)]$. También se puede suponer que las densidades y la capacidad calorífica de todos los caudales no son funciones directas de la temperatura o la composición. El caudal de salida del primer tanque fluye al segundo tanque, donde se vuelve a calentar, esta vez utilizando vapor de condensación. La tasa de transferencia de calor se puede describir por $w_s(t)\lambda$, donde $w_s(t)$ es el flujo másico del vapor y λ es el calor de vaporización latente del vapor. Se supone que la caída de presión a través de la válvula es constante y que su constante de tiempo es τ_v. El transmisor de temperatura tiene un rango de T_L a T_H y una constante de tiempo τ_T. Suponiendo que las pérdidas de calor de los dos tanques son despreciables y que las perturbaciones importantes son $T_1(t)$, $T_2(t)$ y $T_{c1}(t)$, obtener el diagrama de bloques completo del lazo de control de la temperatura y su ecuación característica. Desarrollar la función de transferencia para cada bloque.

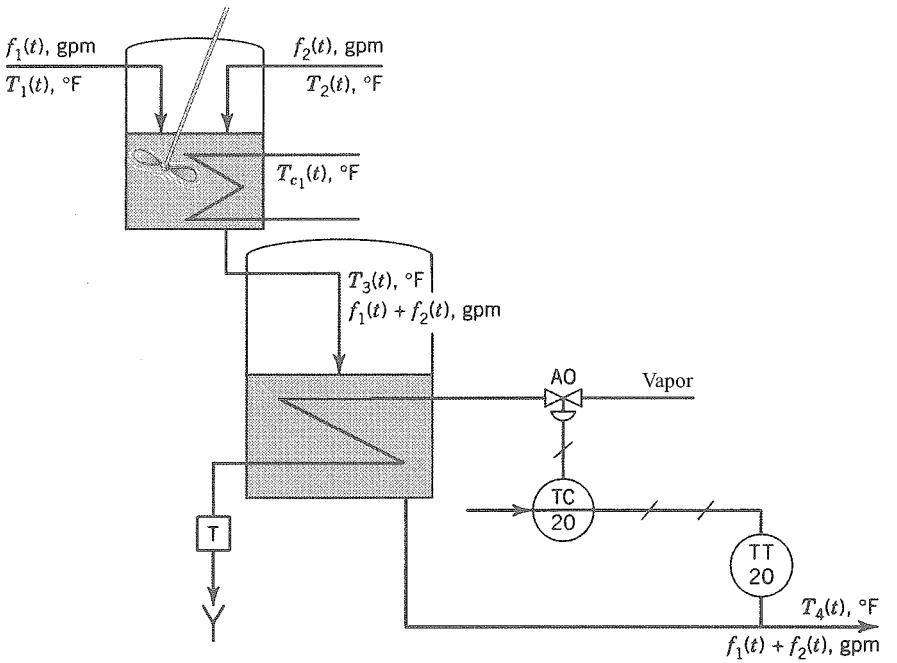


Figura P6-6 Calentadores para el problema 6-23.

6-24. Considérese el proceso que se muestra en la figura P6-7. El fluido que entra al tanque es aceite con una densidad de 53 lb/ft^3, una capacidad calorífica de 0.45 Btu/lb-°F y una temperatura de entrada de 70°F. El aceite debe calentarse a 200°F utilizando vapor

saturado a 115 psig. La presión en el tanque, arriba del nivel del aceite, se mantiene a 40 psia usando una capa de gas inerte, N_2. Suponer que el tanque está bien aislado, que las propiedades físicas del aceite no son funciones directas de la temperatura, que el líquido está bien mezclado y que el nivel del aceite cubre el serpentín de calentamiento. También se conocen los datos siguientes:

$\bar{p}_1 = 45$ psig; $\bar{p}_3 = 15$ psig

Coeficiente de transferencia de calor = 136 Btu/hr-ft^2-°F

Área de la superficie de calentamiento = 127.5 ft^2

Serpentín de calentamiento: tubería de $\frac{1}{2}$ pulg D.E., BWG 20, 974 pies lineales; masa de metal de tubería = 0.178 lb/ft; c_p de metal de tubería = 0.12 Btu/lb-°F.

Diámetro del tanque = 3 ft

Transmisor de nivel: rango 7-10 ft; constante de tiempo = 0.01 min.

Transmisor de temperatura: rango 100-300°F; constante de tiempo = 0.5 min.

a) Dimensionar las válvulas de control para 50% de sobrecapacidad. El flujo nominal del aceite es de 100 gpm y la caída de presión a través de la válvula de vapor se puede considerar constante.
b) Trazar el diagrama de bloques completo para el lazo de control de nivel. Usar un controlador sólo proporcional.
c) Trazar el diagrama de bloques completo para el lazo de control de temperatura y obtener su ecuación característica. Usar un controlador PID. Indicar los valores numéricos de todas las ganancias y las constantes de tiempo en las funciones de transferencia.

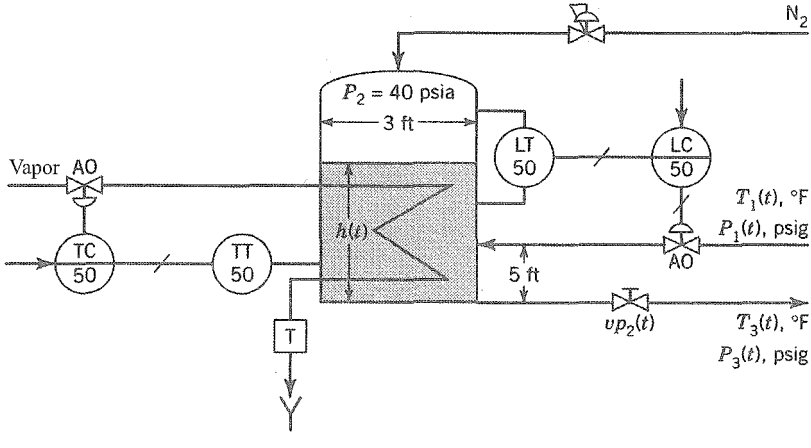


Figura P6-7 Calentador de aceite para el problema 6-24.

d) Calcular la ganancia última y el periodo último de oscilación del lazo de control de temperatura.

Nota: La simulación de este proceso es el tema del problema 13-24.

6-25. Considérese el proceso que se muestra en la figura P6-8. Suponer que las dos válvulas de salida de los tanques se mantienen en una abertura constante y que la presión corriente abajo también es constante; el flujo de la bomba es lineal con la salida del controlador en el rango de 0 a $f_{máx}$; la bomba de velocidad variable tiene una constante de tiempo, que relaciona el flujo con la señal de entrada, $m_1(t)$, o τ_p s; la válvula de control es lineal y tiene una constante de tiempo, que relaciona el flujo con la señal neumática, de τ_v s; la caída de presión a través de la válvula de control es constante; el transmisor de nivel tiene un rango de 0 a $h_{máx}$ y una constante de tiempo despreciable. Los diámetros de los tanques son D_1 y D_2. Los coeficientes de las válvulas son, C_{v1}, C_{v2} y C_{v3}.

a) Trazar el diagrama de bloques y derivar las funciones de transferencia para este sistema de control. Las perturbaciones son $f_i(t)$ y $m_1(t)$.

b) Escribir la ecuación característica del lazo de control de nivel y determinar la ganancia última y el periodo último como funciones de los parámetros del sistema.

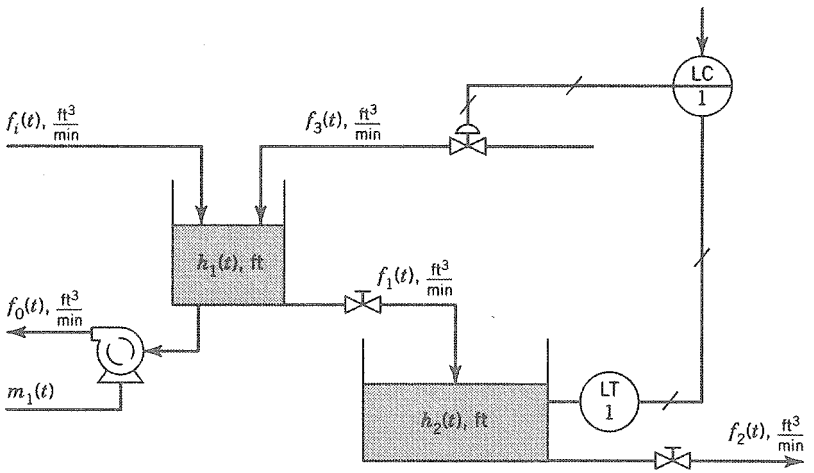


Figura P6-8 Controlador de nivel para el problema 6-25.

6-26. Considérese el proceso que se muestra en la figura P6-9. En este proceso un gas residual se enriquece con gas natural para usarlo como combustible en un horno pequeño. El gas enriquecido debe tener cierto valor calorífico para que pueda usarse como combustible. La estrategia de control requiere medir el valor calorífico del gas que sale del proceso y manipular el flujo de gas natural (utilizando un ventilador de velocidad variable) para

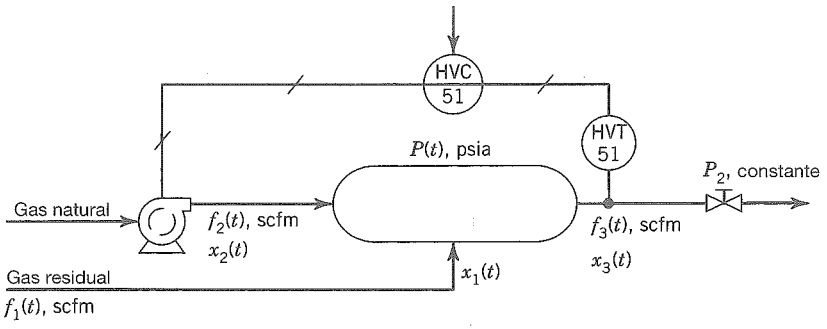


Figura P6-9 Tanque de enriquecimiento de gas para el problema 6-26.

mantener el valor calorífico en su referencia. El gas residual se compone de metano (CH_4) y otros hidrocarburos de bajo poder calorífico. La composición del gas natural se puede considerar constante y su componente principal es metano y pequeñas cantidades de otros hidrocarburos. El poder calorífico del gas residual enriquecido está relacionado con la fracción molar de metano por la siguiente relación:

$$hv(t) = c + gx_3(t)$$

donde $h_v(t)$ es el valor calorífico, $x_3(t)$ es la fracción molar de metano, y c y g son constantes. El ventilador de velocidad variable es tal que a la velocidad máxima su flujo es $f_{2\ \text{máx}}$. Se puede suponer que la relación entre el flujo y la señal de entrada al ventilador es lineal. El ventilador tiene una constante de tiempo τ_F. La abertura de la válvula de salida es constante. Se usa un controlador proporcional integral para regular el valor calorífico. El sensor-transmisor tiene una constante de tiempo de τ_T min. La gravedad específica del gas enriquecido está relacionada con la fracción molar de metano por

$$G(t) = a + bx_3(t)$$

donde a y b son constantes.

a) Trazar el diagrama de bloques para este sistema de control y derivar las funciones de transferencia. Las posibles perturbaciones son $f_1(t)$, $x_1(t)$ y $x_2(t)$.
b) Escribir la ecuación característica del lazo de control por retroalimentación.

Capítulo 7

Sintonización de los controladores por retroalimentación

En este capítulo se estudia la sintonización de los controladores por retroalimentación, es decir, el ajuste de los parámetros del controlador para que correspondan con las características (o personalidad) del resto de los componentes del lazo de control. Se examinan dos métodos para determinar las características dinámicas del proceso: el método de sintonización en línea o de lazo cerrado y la prueba escalón o método de lazo abierto. Asimismo, se examinan tres especificaciones diferentes del desempeño del lazo de control: respuesta con razón de asentamiento de un cuarto, integral mínima del error y síntesis del controlador. El último método, además de contar con algunas relaciones de sintonización del controlador simples, también arrojará luz en la selección de los modos proporcional, integral y derivativo para los diferentes tipos de funciones de transferencia de los procesos.

Sintonizar es el procedimiento de ajustar los parámetros del controlador por retroalimentación para obtener una respuesta de lazo cerrado especificada. Sintonizar un lazo de control por retroalimentación es análogo a afinar el motor de un automóvil o a ajustar una televisión o un equipo de sonido estereofónico. En cada uno de estos casos, la dificultad del problema aumenta con el número de parámetros por ajustar. Por ejemplo, sintonizar un controlador proporcional puro o integral puro es similar a ajustar el volumen de un equipo de sonido estereofónico. Como sólo es necesario ajustar un parámetro o "botón", el procedimiento consiste en moverlo en una u otra dirección hasta obtener la respuesta deseada (volumen). El siguiente grado de dificultad es la sintonización de un controlador de dos modos o controlador proporcional integral (PI), que es similar a ajustar los bajos y los agudos de un equipo de sonido estereofónico. Debido a que deben ajustarse dos parámetros, la ganancia y el tiempo integral, el procedimiento de sintonización es significativamente más complicado que cuando debe ajustarse un solo parámetro. Finalmente, la sintonización de un controlador de tres modos, o proporcional integral derivativo (PID), representa un nivel más alto de dificultad, pues es necesario ajustar tres parámetros, la ganancia, el tiempo integral y el tiempo derivativo.

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

Aunque se ha planteado una analogía entre el ajuste de un equipo estereofónico y la sintonización de un lazo de control por retroalimentación, no se pretende dar la impresión de que ambas tareas tienen el mismo grado de dificultad. La principal diferencia radica en la velocidad de respuesta del equipo estereofónico en comparación con la del lazo de control de un proceso. En el equipo estereofónico se obtiene una retroalimentación prácticamente inmediata para el efecto de la sintonización de los ajustes. Por otra parte, aunque algunos lazos de control de procesos tienen respuestas relativamente rápidas, con la mayoría de los lazos de proceso es necesario esperar varios minutos, o incluso horas, para observar la respuesta que resulta de los ajustes de la sintonización. Esto hace que la sintonización de los controladores por retroalimentación por prueba y error sea una tarea tediosa y que requiere mucho tiempo. Sin embargo, éste resulta ser el método de uso más común entre ingenieros de instrumentación y control en la industria. Se han introducido varios procedimientos y fórmulas de sintonización como ayuda y guía en el procedimiento de sintonización. En este capítulo se estudian algunos de estos procedimientos. Sin embargo, es necesario tener presente que ningún procedimiento dará mejores resultados que otro para todas las situaciones de control de procesos.

Los valores de los parámetros de sintonización dependen de la respuesta de lazo cerrado deseada y de las características dinámicas o personalidad de los demás elementos del lazo de control, en particular del proceso. En los capítulos 3 y 4 se vio que si el proceso es no lineal, como suele ser el caso, sus características cambiarán de un punto de operación al siguiente. Esto significa que un conjunto particular de parámetros de sintonización puede producir el efecto deseado en un solo punto de operación, dado que los controladores por retroalimentación comunes son básicamente dispositivos lineales. Para operar en un rango de condiciones dadas, es necesario encontrar un término medio para alcanzar un conjunto de parámetros de sintonización aceptable, pues la respuesta será lenta en un extremo del rango y oscilatoria en el otro extremo.

Una característica del control por retroalimentación que simplifica en gran medida el procedimiento de sintonización es que el desempeño del lazo de control no es una función directa de los parámetros de sintonización. En otras palabras, el desempeño no varía mucho con los parámetros de sintonización. Cambios de menos de 50% en los valores de los parámetros de sintonización rara vez tienen efecto significativo en la respuesta del lazo de control. Se hará hincapié en este hecho al no presentar nunca los valores de los parámetros de sintonización con más de dos dígitos significativos. Teniendo presente lo anterior, a continuación se consideran algunos de los procedimientos que se han propuesto para sintonizar controladores industriales.

7-1 RESPUESTA CON RAZÓN DE ASENTAMIENTO DE UN CUARTO POR EL MÉTODO DE LA GANANCIA ÚLTIMA

Ziegler y Nichols propusieron este método pionero, también conocido como *método de sintonización en línea* o *de lazo cerrado,* en 1942. El método consta de dos pasos:

Paso 1. La determinación de las características dinámicas o personalidad del lazo de control.

Paso 2. La estimación de los parámetros de sintonización del controlador que produzcan la respuesta deseada para las características dinámicas determinadas en el paso 1. En otras palabras, la personalidad del controlador que mejor se acopla con la de los demás elementos del lazo de control.

En este método, las características dinámicas del proceso están representadas por la *ganancia última* de un controlador proporcional y el *periodo último* de oscilación del lazo. Estos parámetros, presentados en la sección 6-2, se pueden determinar por el método de sustitución directa si las funciones de transferencia de todos los componentes del lazo se conocen cuantitativamente. Como por lo general no es éste el caso, con frecuencia la ganancia última y el periodo último del proceso real deben determinarse de manera experimental mediante el siguiente procedimiento:

1. Se desactivan las acciones integral y derivativa del controlador por retroalimentación para tener un controlador proporcional. En algunos controladores, la acción integral no se puede desactivar, pero se puede desintonizar ajustando el tiempo integral en su máximo valor posible o, de manera equivalente, la tasa de integración en su valor mínimo.
2. Con el controlador en *automático* (es decir, con lazo cerrado), se incrementa la ganancia proporcional (o se reduce la banda proporcional) hasta que el lazo oscile con amplitud constante. Se registra el valor de la ganancia que produce oscilaciones sostenidas como K_{cu}, la ganancia última. Este procedimiento se lleva a cabo con incrementos discretos de la ganancia, estimulando el sistema mediante la aplicación de un pequeño cambio de referencia para cada ajuste de la ganancia. A fin de evitar que el lazo se vuelva inestable, los incrementos de la ganancia se hacen más pequeños cuando está cerca de la ganancia última.
3. A partir de un registro del tiempo de la variable controlada, como el de la figura 7-1.1, se mide el periodo de oscilación y se registra como T_u, el periodo último.

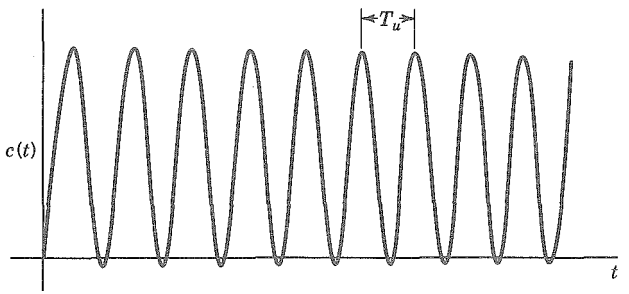


Figura 7-1.1 Respuesta del lazo con la ganancia del controlador fijada igual a la ganancia última K_{cu}. T_u es el periodo último.

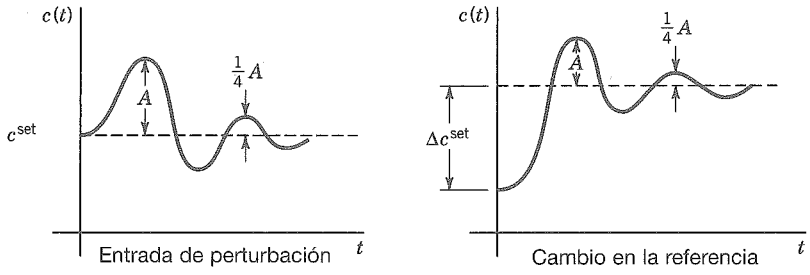


Figura 7-1.2 Respuesta con razón de asentamiento de un cuarto a la entrada de perturbaciones y al cambio en la referencia.

Para la respuesta deseada de lazo cerrado, Ziegler y Nichols (1942) especificaron una razón de asentamiento de un cuarto. La razón de asentamiento es el cociente de las amplitudes de dos oscilaciones sucesivas. Debe ser independiente de la entrada del sistema y depender únicamente de las raíces de la ecuación característica del lazo. En la figura 7-1.2 se presentan algunas respuestas típicas con razón de asentamiento de un cuarto para compensar una perturbación y un cambio de referencia.

Una vez que se determinan la ganancia última y el periodo último, sus valores se usan en las fórmulas de la tabla 7-1.1 para calcular los parámetros de sintonización del controlador que producen respuestas con razón de asentamiento de un cuarto.

La tabla 7-1.1 muestra que la introducción de la acción integral obliga una reducción de 10% en la ganancia del controlador PI, en comparación con la ganancia del controlador proporcional. Por otra parte, la acción derivativa permite un incremento tanto en la ganancia proporcional como en la tasa de integración (una reducción del tiempo integral) del controlador PID en comparación con el controlador PI. Esto se debe a que la acción integral introduce un retraso en la operación del controlador por retroalimentación, mientras que la acción derivativa introduce un avance o adelanto. El tema se examinará con mayor detalle en el capítulo 8.

Tabla 7-1.1 Fórmulas de sintonización para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto

Tipo de controlador	Ganancia proporcional	Tiempo integral	Tiempo derivativo
Sólo proporcional, P	$K_c = \frac{K_{cu}}{2}$	–	–
Proporcional integral, PI	$K_c = \frac{K_{cu}}{2.2}$	$\tau_I = \frac{T_u}{1.2}$	–
Proporcional integral derivativo, PID[a]	$K'_c = \frac{K_{cu}}{1.7}$	$\tau'_I = \frac{T_u}{2}$	$\tau'_D = \frac{T_u}{8}$

[a]Las fórmulas PID son para el controlador PID real, ecuación 5-3.19. Para hacer la conversión al controlador PID ideal, ecuación 5-3.17: $K_c = K'_c(1 + \tau'_D/\tau'_I)$; $\tau_I = \tau'_I + \tau'_D$; $\tau_D = \tau'_D\tau'_I/(\tau'_I + \tau'_D)$.

La respuesta con razón de asentamiento de un cuarto es muy deseable para compensar perturbaciones porque previene una gran desviación inicial respecto a la referencia sin ser muy oscilatoria. Sin embargo, no es una respuesta deseable para cambios escalón en la referencia, debido a que causa un 50% de sobrepaso. Esto se debe a que la desviación máxima en cada dirección respecto a la nueva referencia es la mitad de la desviación máxima anterior en la dirección contraria (ver la figura 7-1.2). Es sencillo corregir esta dificultad reduciendo la ganancia proporcional del valor obtenido con las fórmulas de la tabla 7-1.1. De hecho, la razón de asentamiento es una función directa de la ganancia del controlador, y se puede ajustar en cualquier momento tan sólo cambiando la ganancia. En otras palabras, si para un proceso dado la respuesta con razón de asentamiento de un cuarto es muy oscilatoria, una reducción de la ganancia hará más uniforme la respuesta.

El análisis del párrafo anterior revela la principal ventaja de las fórmulas de sintonización de lazo cerrado: reducen el procedimiento de sintonización al ajuste de un solo parámetro, la ganancia del controlador. Bajo el supuesto de que se puede obtener una buena estimación del periodo último observando la respuesta de lazo cerrado, los tiempos integral y derivativo se pueden fijar con base en este valor. Después la respuesta se puede moldear ajustando la ganancia proporcional. Debido a la poca sensibilidad de la respuesta a los valores precisos de los parámetros de sintonización, no es absolutamente necesario hacer que la respuesta de lazo cerrado oscile con una amplitud sostenida para estimar un valor adecuado del periodo último. Se puede usar cualquier oscilación causada por el controlador proporcional para obtener un valor aproximado del periodo último que por lo general es lo suficientemente bueno para propósitos de sintonización.

Se ha mencionado que una dificultad de la respuesta con razón de asentamiento de un cuarto es que el conjunto de parámetros de sintonización necesario para obtenerla no es único, excepto para el caso del controlador proporcional. En el caso de controladores PI, se puede verificar con facilidad que para cada valor del tiempo integral es posible encontrar un valor de la ganancia que produce una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto, y viceversa. Lo mismo es válido para los controladores PID. Las fórmulas de sintonización simples propuestas por Ziegler y Nichols dan valores aproximados que permiten obtener respuestas rápidas en la mayoría de los lazos industriales.

Las fórmulas de sintonización PID de la tabla 7-1.1 son para la función de transferencia "real" (o *en serie*) de los controladores PID dada por la ecuación 5-3.19. Se sabe esto porque los controladores PID eran el único tipo de controlador disponible cuando Ziegler y Nichols desarrollaron sus fórmulas de sintonización. Hoy en día, muchos dispositivos y software de control usan la función de transferencia PID "ideal" (o *en paralelo*) de la ecuación 5-3.18. En la tabla 7-1.1 se incluyen las fórmulas para calcular los parámetros del controlador PID ideal.

Ejemplo 7-1.1 Dada la ecuación característica del tanque calentador con agitación continua deducida en el ejemplo 6-1.1, determinar los parámetros de sintonización con razón de asentamiento de un cuarto del controlador PID por el método de la ganancia última. Asimismo, calcular las raíces de la ecuación característica para el controlador sintonizado con estos parámetros y la razón de asentamiento real.

Solución En el ejemplo 6-2.2 la ganancia última y el periodo último del lazo para un controlador proporcional se obtuvieron por sustitución directa:

$$K_{cu} = 10.4\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}, \qquad T_u = 4.6 \text{ min}$$

De acuerdo con la tabla 7-1.1, los parámetros de sintonización para la respuesta con razón de asentamiento de un cuarto de un controlador PID son:

$$K_c' = \frac{K_{cu}}{1.7} = 6.1\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}, \qquad \tau_I' = \frac{4.6}{2} = 2.3 \text{ min}, \qquad \tau_D' = \frac{4.6}{8} = 0.58 \text{ min}$$

La función de transferencia del controlador PID es:

$$G_c(s) = 6.1\left(1 + \frac{1}{2.3s}\right)(1 + 0.58s)$$

Sustituyendo en la ecuación característica del ejemplo 6-2.2 y reduciendo fracciones, se obtiene:

$$s(8.34s + 1)(0.502s + 1)(0.2s + 1)(0.75s + 1) + (1.954)(6.1)(s + 0.435)(1 + 0.58s) = 0$$

donde 0.435 = 1/2.3. En forma polinómica,

$$0.628s^5 + 5.303s^4 + 12.73s^3 + 16.74s^2 + 12.98s + 5.181 = 0$$

Usando un programa de computadora, las raíces de esta ecuación característica son:

$$-0.327 \pm i1.232, \quad -0.519, \quad -1.784, \quad -5.49$$

La respuesta del lazo cerrado tiene la forma siguiente:

$$T(t) = b_1 e^{-0.327t}\,\text{sen}\,(1.232t + \theta_1) + b_2\, e^{-0.519t} + b_3 e^{-1.784t} + b_4 e^{-5.49t} + (\text{términos de entrada})$$

donde los parámetros b_1, b_2, b_3, b_4 y θ_1 se pueden evaluar por la técnica de expansión en fracciones parciales (véase la sección 2-2.2) y dependen de la entrada particular aplicada al sistema.

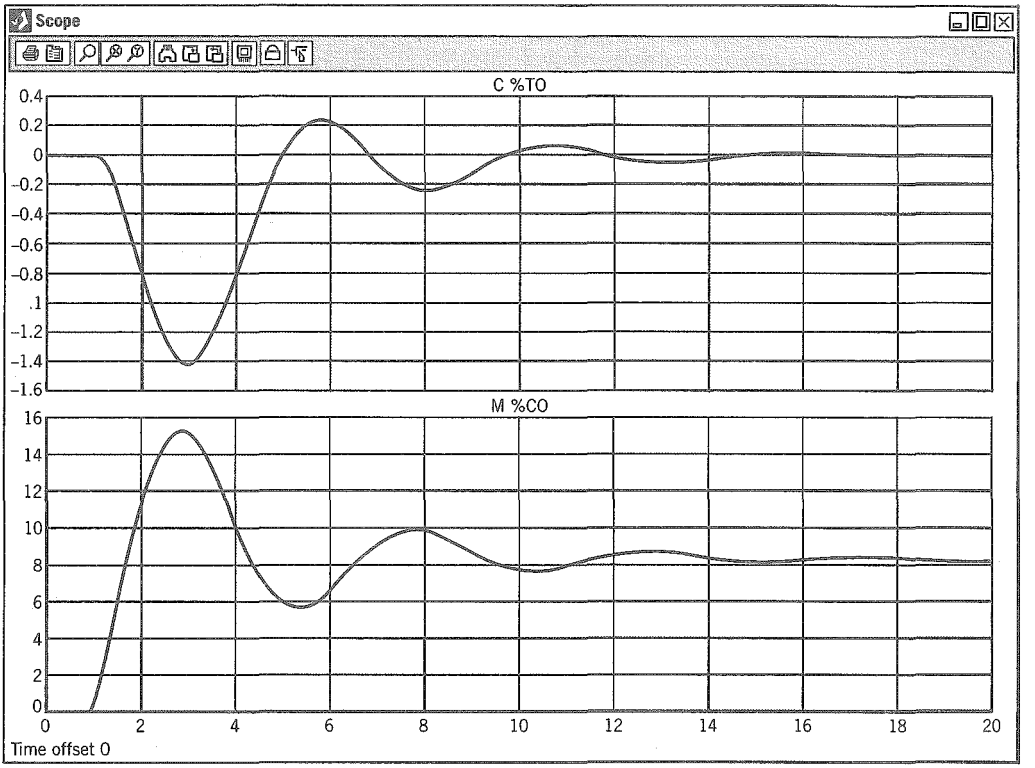


Figura 7-1.3 Respuestas de las variables controlada y manipulada a un cambio escalón de 5 ft^3/min en el flujo de proceso para el tanque calentador con agitación continua con un controlador PID en serie.

El par de raíces conjugadas complejas domina la respuesta porque los términos correspondientes en la respuesta son los de decaimiento más lento. La respuesta tiene un periodo de oscilación $T = 2\pi/1.232 = 5.1$ min, 1% del tiempo de estabilización de $-5/-0.327 = 15.3$ min y una razón de asentamiento de

$$e^{-0.327(5.1)} = 0.19$$

que está próxima a la razón de asentamiento teórica de 0.25. Lo anterior indica que las fórmulas de sintonización no son exactas en términos de la especificación de la respuesta.

La respuesta real de la temperatura de salida del tanque a un cambio en el flujo de proceso se muestra en la figura 7-1.3. Esta respuesta se obtuvo de una simulación del lazo (ver el capítulo 13). Nótese que el periodo de oscilación, el tiempo de estabilización y la razón de asentamiento concuerdan con los valores calculados.

7-2 CARACTERIZACIÓN DE PROCESOS DE LAZO ABIERTO

El método de sintonización en línea de Ziegler-Nichols que se acaba de presentar es el único que caracteriza el proceso mediante la ganancia última y el periodo último. La mayoría de los demás métodos de sintonización de controladores caracteriza el proceso mediante un modelo simple de primer o segundo orden con tiempo muerto. Para poder entender mejor las suposiciones incluidas en esta caracterización, considérese el diagrama de bloques del lazo de control por retroalimentación presentado en la figura 7-2.1. Los símbolos indicados en el diagrama de bloques son:

$R(s)$ = la transformada de Laplace de la referencia
$M(s)$ = la transformada de Laplace de la salida del controlador
$C(s)$ = la transformada de Laplace de la salida del transmisor
$E(s)$ = la transformada de Laplace de la señal del error
$U(s)$ = la transformada de Laplace de la perturbación
$G_c(s)$ = la función de transferencia del controlador
$G_v(s)$ = la función de transferencia de la válvula de control (o del elemento final)
$G_m(s)$ = la función de transferencia del proceso entre la variable controlada y la variable manipulada
$G_u(s)$ = la función de transferencia del proceso entre la variable controlada y la perturbación
$H(s)$ = la función de transferencia del sensor-transmisor.

Usando las manipulaciones simples del álgebra de diagramas de bloques que se aprendieron en el capítulo 3, se puede trazar el diagrama de bloques equivalente de la figura 7-2.2. En este diagrama sólo hay dos bloques en el lazo de control, uno para el controlador y el otro para el resto de los componentes del lazo, más un bloque para cada perturbación. La ventaja de esta representación simplificada es que resalta las dos señales en el lazo que por lo general se pueden observar y registrar: la salida del controlador $M(s)$ y la señal del transmisor $C(s)$. Para lazos simples, ninguna señal o variable se puede observar con excepción de estas dos.

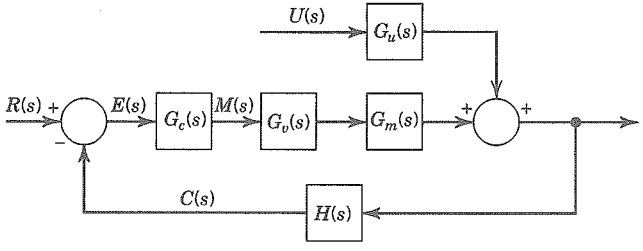


Figura 7-2.1 Diagrama de bloques del lazo de control por retroalimentación típico.

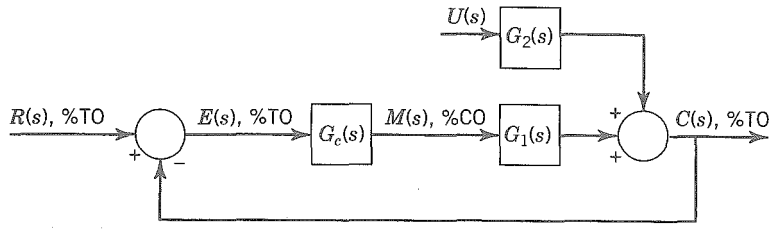


Figura 7-2.2 Diagrama de bloques simplificado equivalente en el que todos los instrumentos de campo y el proceso se han agrupado en bloques individuales.

Por lo tanto, el agrupamiento de las funciones de transferencia de la válvula de control, del proceso y del sensor-transmisor en un solo bloque no sólo es conveniente, sino una necesidad práctica. Estas combinaciones de funciones de transferencia se denominarán $G_1(s)$ y $G_2(s)$:

$$G_1(s) = G_v(s)\,G_m(s)H(s)$$
$$G_2(s) = G_u(s)H(s) \tag{7-2.1}$$

La función de transferencia combinada que está en el lazo, $G_1(s)$, es precisamente lo que se aproxima con los modelos de orden bajo con el fin de caracterizar la respuesta dinámica del proceso. El punto es que el "proceso" caracterizado incluye el comportamiento dinámico de la válvula de control y del sensor-transmisor. Los dos modelos de uso más común para caracterizar el proceso son:

Modelo de primer orden más tiempo muerto (FOPDT, por sus siglas en inglés)

$$G_1(s) = \frac{K\,e^{-t_0 s}}{\tau s + 1} \tag{7-2.2}$$

Modelo de segundo orden más tiempo muerto (SOPDT, por sus siglas en inglés)

$$G_1(s) = \frac{K\,e^{-t_0 s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \tag{7-2.3}$$

$$G_1(s) = \frac{K\,e^{-t_0 s}}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \tag{7-2.4}$$

donde:

K = la ganancia de estado estacionario del proceso
t_0 = el tiempo muerto efectivo del proceso

τ, τ_1, τ_2 = las constantes de tiempo efectivas del proceso
ζ = la razón de amortiguamiento efectivo del proceso.

Para procesos subamortiguados, $\zeta < 1$.

De éstos, el modelo FOPDT es el utilizado por la mayoría de las fórmulas de sintonización del controlador. Este modelo caracteriza el proceso con tres parámetros: la ganancia K, el tiempo muerto t_0 y la constante de tiempo τ. La pregunta entonces es: ¿cómo se pueden determinar estos parámetros para un lazo dado? La respuesta es que es necesario realizar algunas pruebas dinámicas del proceso en el sistema real o en una simulación de computadora. La prueba más simple que se puede realizar es la prueba escalón.

7-2.1 Prueba escalón de un proceso

El procedimiento de la prueba escalón se lleva a cabo como sigue:

1. Con el controlador en "manual" (es decir, en lazo abierto), se aplica al proceso un cambio escalón en la señal de salida del controlador $m(t)$. La magnitud del cambio debe ser lo suficientemente grande para que el cambio consecuente en la señal del transmisor sea medible, pero no tan grande que la respuesta sea distorsionada por las no linealidades del proceso.
2. La respuesta de la señal de salida del transmisor, $c(t)$, se registra en una graficadora continua o en un dispositivo equivalente, asegurándose de que la resolución sea la adecuada tanto en la escala de la amplitud como en la del tiempo. La gráfica resultante de $c(t)$ contra el tiempo debe abarcar el periodo de prueba completo, desde la introducción de la prueba escalón hasta que el sistema alcanza un nuevo estado estacionario. Típicamente, una prueba escalón dura desde unos pocos minutos hasta varias horas, dependiendo de la rapidez de respuesta del proceso.

Por supuesto, es imperativo que no entren perturbaciones al sistema mientras se realiza la prueba escalón. Una gráfica típica de la prueba, también conocida como *curva de reacción del proceso,* se muestra en la figura 7-2.3. Como se vio en la sección 2-5, la respuesta en forma de S es característica de los procesos de segundo orden o superior con tiempo muerto o sin él. El paso siguiente es hacer corresponder la curva de reacción del proceso con un modelo de proceso simple para determinar los parámetros del modelo. Se hará esto para el modelo de primer orden más tiempo muerto (FOPDT).

En ausencia de perturbaciones, y para las condiciones de la prueba, el diagrama de bloques de la figura 7-2.2 se puede volver a trazar como en la figura 7-2.4. La respuesta de la señal de salida del transmisor está dada por:

$$C(s) = G_1(s)M(s) \tag{7-2.5}$$

Para un cambio escalón en la salida del controlador de magnitud Δm y un modelo FOPDT, ecuación 7-2.2, se tiene:

$$C(s) = \frac{K\, e^{-t_0 s}}{\tau s + 1} \cdot \frac{\Delta m}{s} \tag{7-2.6}$$

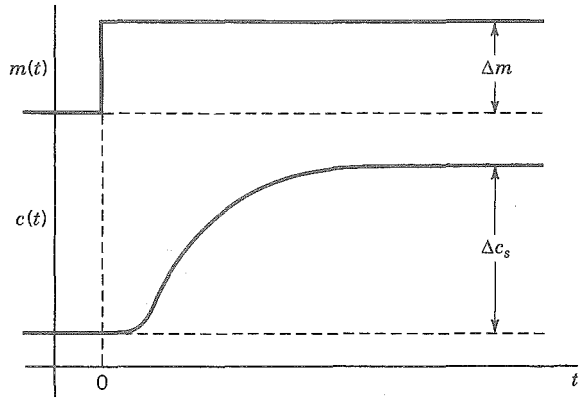


Figura 7-2.3 Curva de reacción del proceso o respuesta escalón de lazo abierto.

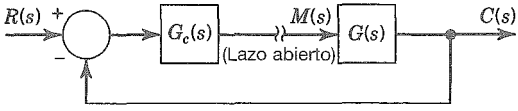


Figura 7-2.4 Diagrama de bloques para la prueba escalón de lazo abierto.

Expandiendo esta expresión en fracciones parciales (véase la sección 2-2.2), se obtiene:

$$C(s) = K\,\Delta m\, e^{-t_0 s}\left[\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1}\right] \tag{7-2.7}$$

Haciendo la inversión con la ayuda de la tabla de transformadas de Laplace (tabla 2-1.1) y aplicando el teorema de traslación real de transformadas de Laplace (véase la sección 2-1.2), se obtiene:

$$C(t) = K\,\Delta m\, u(t - t_0)\left(1 - e^{-(t-t_0)/\tau}\right) \tag{7-2.8}$$

donde la función escalón unitario $u(t - t_0)$ se incluye para indicar explícitamente que:

$$C(t) = 0 \qquad \text{para } t < t_0 \tag{7-2.9}$$

La variable C es la perturbación o cambio de la salida del transmisor respecto de su valor inicial, $C(t) = c(t) - c(0)$.

Estimación de la ganancia del proceso

En la figura 7-2.5 se presenta una gráfica de la ecuación 7-2.8. En esta figura, el término Δc_s es el cambio en estado estacionario de $c(t)$. Por la ecuación 7-2.8 se encuentra:

$$\Delta c_s = \lim_{t \to \infty} C(t) = K\,\Delta m \tag{7-2.10}$$

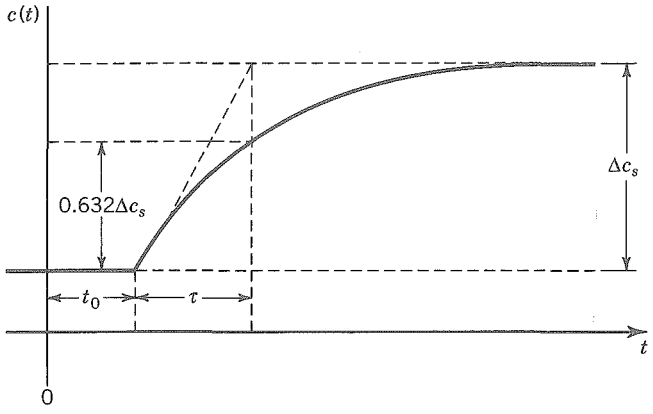


Figura 7-2.5 Respuesta escalón del proceso de primer orden más tiempo muerto; se muestra la definición gráfica del tiempo muerto t_0 y la constante de tiempo τ.

Por esta ecuación, y notando que la respuesta del modelo debe coincidir con la curva de reacción del proceso en estado estacionario, se puede calcular la ganancia de estado estacionario del proceso, que es uno de los parámetros del modelo.

$$K = \frac{\Delta c_s}{\Delta m} \tag{7-2.11}$$

Esta fórmula, como se estableció en los capítulos 2 y 3, es la definición de la ganancia.

Estimación de la constante de tiempo y el tiempo muerto

Se han propuesto tres métodos para estimar el tiempo muerto t_0 y la constante de tiempo τ, cada uno de los cuales produce valores diferentes.

Método de ajuste 1 Este método usa la recta tangente a la curva de reacción del proceso en el punto donde la tasa de cambio es máxima. Para el modelo FOPDT esto ocurre en $t = t_0$, como resulta evidente al inspeccionar la respuesta del modelo de la figura 7-2.5. Por la ecuación 7-2.8, esta tasa de cambio (máxima) inicial es:

$$\left.\frac{dC}{dt}\right|_{t=t_0} = K\,\Delta m\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\Delta c_s}{\tau} \tag{7-2.12}$$

Por la figura 7-2.5, se observa que este resultado indica que la recta de la tasa de cambio máxima cruza la recta del valor inicial en $t = t_0$ y la recta del valor final en $t = t_0 + \tau$. Este hallazgo sugiere la construcción para determinar t_0 y τ que se muestra en la figura 7-2.6*a*. La recta se traza tangente a la curva de reacción real del proceso en el punto de la tasa de cambio máxima. La respuesta del modelo que usa estos valores de t_0 y τ se indica con la línea discontinua de la figura. Evidentemente, la respuesta del modelo obtenida con este ajuste no coincide muy bien con la respuesta real.

Método de ajuste 2 En este método de ajuste, t_0 se determina de la misma manera que en el ajuste 1, pero el valor de τ es el que obliga a la respuesta del modelo a coincidir con la respuesta real en $t = t_0 + \tau$. De acuerdo con la ecuación 7-2.8, este punto es:

$$C(t_0 + \tau) = K\,\Delta m(1 - e^{-1}) = 0.632\,\Delta c_s \tag{7-2.13}$$

La figura 7-2.6*b* muestra que la respuesta del modelo del método de ajuste 2 está mucho más próxima a la respuesta real que la que se obtiene por el método de ajuste 1. El valor de la constante de tiempo obtenida por el método de ajuste 2 por lo general es menor que el obtenido por el método de ajuste 1, aunque el tiempo muerto es exactamente el mismo.

Método de ajuste 3 El paso menos preciso en la determinación de t_0 y τ con los dos métodos anteriores es el trazo de la recta tangente a la curva de reacción del proceso en el punto de tasa de cambio máxima. Incluso en el método de ajuste 2, para el cual el valor de $(t_0 + \tau)$ es independiente de la recta tangente, los valores estimados tanto de t_0 como de τ dependen de la recta. Para eliminar esta dependencia de la recta tangente, el Dr. Cecil L. Smith (1972) propuso que los valores de t_0 y τ se seleccionen de tal modo que la respuesta real y la del modelo coincidan en dos puntos en la región donde la tasa de cambio tiene valores altos. Los dos puntos

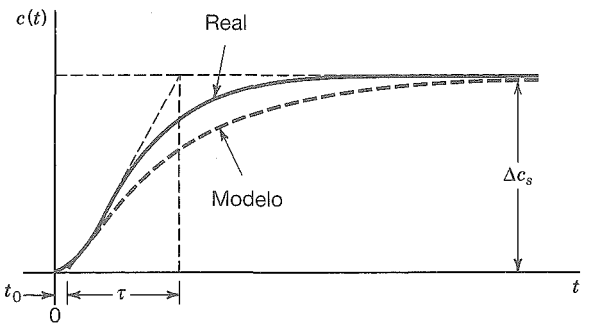


Figura 7-2.6*a* Parámetros del modelo FOPDT obtenidos por el método de ajuste 1.

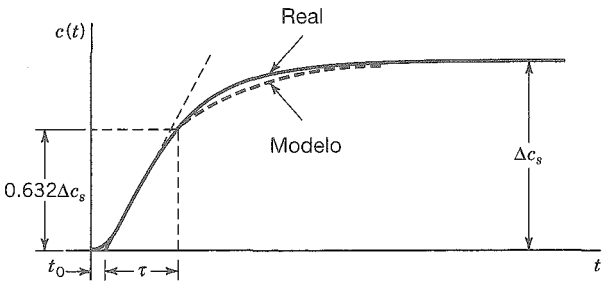


Figura 7-2.6*b* Parámetros del modelo FOPDT obtenidos por el método de ajuste 2.

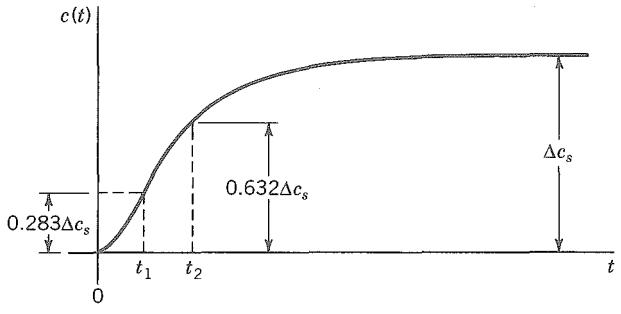


Figura 7-2.6*c* Parámetros del modelo FOPDT obtenidos por el método de ajuste 3.

recomendados son $(t_0 + \tau/3)$ y $(t_0 + \tau)$. El segundo de estos puntos se localiza como en el método de ajuste 2, mientras que el primero se localiza, por la ecuación 7-2.8, en:

$$C(t) = K\,\Delta m(1 - e^{-1/3}) = 0.283\,\Delta c_s \tag{7-2.14}$$

Estos puntos se identifican como t_2 y t_1, respectivamente, en la figura 7-2.6*c*. Los valores de t_0 y τ se pueden obtener fácilmente con la solución simple del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} t_0 + \frac{\tau}{3} &= t_1 \\ t_0 + \tau &= t_2 \end{aligned} \tag{7-2.15}$$

que se reduce a:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{3}{2}(t_2 - t_1) \\ t_0 &= t_2 - \tau \end{aligned} \tag{7-2.16}$$

donde:

t_1 = tiempo en el que $C = 0.283\ \Delta c_s$
t_2 = tiempo en el que $C = 0.632\ \Delta c_s$.

Nuestra experiencia previa indica que los resultados obtenidos con este método se pueden reproducir con mayor facilidad que los obtenidos por los otros dos. Por tanto, recomendamos este método para la estimación de t_0 y τ a partir de la curva de reacción del proceso.

Se han propuesto varios métodos para estimar los parámetros de un modelo de segundo orden más tiempo muerto (SOPDT) para la curva de reacción del proceso. Nuestra experiencia indica que la precisión de estos métodos es muy reducida. La razón es que la prueba escalón no proporciona suficiente información para extraer los parámetros adicionales –la segunda constante de tiempo o la razón de amortiguamiento– requeridos para el modelo SOPDT. En otras palabras, la mayor complejidad del modelo requiere una prueba dinámica más elaborada.

Debido a que la mayoría de las fórmulas de sintonización del controlador que se introducen a continuación se basan en los parámetros del modelo FOPDT, quizá se presente una situación en la que se tengan parámetros de un modelo de orden superior y sea necesario estimar los parámetros del modelo de primer orden equivalente. Aunque no existe un procedimiento general para hacer esto, la siguiente regla empírica podría proporcionar una estimación razonable para una primera aproximación:

Si una de las constantes de tiempo del modelo de orden superior es mucho mayor que las otras, se puede estimar que la constante de tiempo efectiva del modelo de primer orden es igual a la constante de tiempo más grande. Después el tiempo muerto efectivo del modelo de primer orden se puede aproximar con la suma de todas las demás constantes de tiempo menores más el tiempo muerto del modelo de orden superior.

Ejemplo 7-2.1 Estimar los parámetros del modelo FOPDT para el lazo de control de temperatura del intercambiador de calor del ejemplo 6-2.1. La función de transferencia combinada de la válvula de control, del intercambiador y del sensor-transmisor para dicho ejemplo es:

$$G(s) = \frac{0.80}{(10s+1)(30s+1)(3s+1)}$$

Solución Suponiendo que la constante de tiempo de $30s$ es mucho mayor que las otras dos, se puede llegar a la aproximación:

$$\tau = 30\ \text{s}$$
$$t_0 = 10 + 3 = 13\ \text{s}$$

y, por supuesto, la ganancia es la misma, es decir, $K = 0.80$. La función de transferencia del modelo FOPDT resultante es entonces

$$G(s) = \frac{0.80e^{-13s}}{30s+1} \qquad \textbf{(Modelo A)}$$

Ahora se comparará esta aproximación simple con los parámetros del modelo FOPDT determinados experimentalmente a partir de la curva de reacción del proceso. En la figura 7-2.7 se muestra la curva de reacción del proceso para los tres retardos de primer orden en serie que se supone representan al intercambiador de calor, la válvula de control y el sensor-transmisor. La respuesta de la figura 7-2.7 se obtuvo con una simulación de computadora de los tres retardos en serie, aplicando un cambio escalón de 5% en la señal de salida del controlador, y graficando la salida del sensor-transmisor contra el tiempo. A partir de este resultado se pueden calcular los parámetros del modelo FOPDT utilizando los tres métodos de ajuste presentados arriba.

$$\textit{Ganancia del proceso: } K = \frac{\Delta c_s}{\Delta m} = \frac{4°\text{F}}{5\ \%\text{CO}} \cdot \frac{100\ \%\text{TO}}{(150-50)°\text{F}} = 0.80\frac{\%\text{TO}}{\%\text{CO}}$$

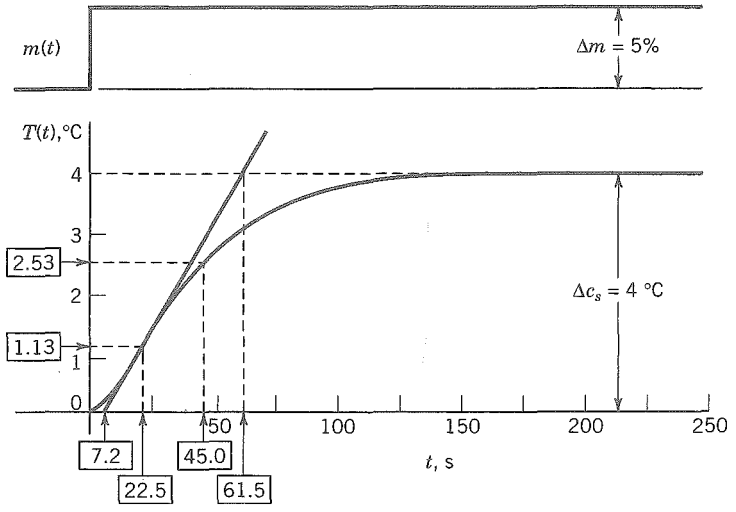


Figura 7-2.7 Respuesta escalón para la temperatura del intercambiador de calor (ejemplo 7-2.1).

Método de ajuste 1 Por la figura 7-2.7, $t_0 = 7.2$ s, $\tau = 61.5 - 7.2 = 54.3$ s. Entonces,

$$G(s) = \frac{0.80e^{-7.2s}}{54.3s+1} \qquad \textbf{(Modelo B)}$$

Método de ajuste 2 Por la figura 7-2.7, $t_0 = 7.2$ s; en $C(t_2) = 0.632$ (4°F) = 2.533°F, $t_2 = 45$ s. Entonces, $\tau = 45 - 7.2 = 37.8$ s, y

$$G(s) = \frac{0.80e^{-7.2s}}{37.8s+1} \qquad \textbf{(Modelo C)}$$

Método de ajuste 3 Por la figura 7-2.7, en $C(t_1) = 0.283$ (4°F) = 1.13°F, $t_1 = 22.5$ s. Entonces, $\tau = (3/2)(45.0 - 22.5) = 33.8$ s, y $t_0 = 45.0 - 33.8 = 11.2$ s. Entonces

$$G(s) = \frac{0.80e^{-11.2s}}{33.8s+1} \qquad \textbf{(Modelo D)}$$

Como se verá en las siguientes secciones, un parámetro importante en términos de la sintonización es el cociente del tiempo muerto y la constante de tiempo. Los valores para las cuatro aproximaciones del modelo FOPDT son las siguientes:

Modelo	A (aproximado)	B (ajuste 1)	C (ajuste 2)	D (ajuste 3)
t_0, s	13.0	7.2	7.2	11.2
τ, s	30.0	54.3	37.8	33.8
t_0/τ	0.43	0.13	0.19	0.33

Se observa que el cociente t_0/τ es el parámetro más sensible, variando por un factor un poco mayor que 3:1. Recuérdese que los métodos de ajuste 2 y 3 proveen las aproximaciones más cercanas a la respuesta escalón real.

Ejemplo 7-2.2 Dado un proceso de segundo orden

$$G(s) = \frac{C(s)}{M(s)} = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad \tau_1 \geq \tau_2$$

determinar los parámetros de un modelo de primer orden más tiempo muerto (FOPDT)

$$G'(s) = \frac{K\, e^{-t_0' s}}{\tau' s + 1}$$

usando el método de ajuste 3, como una función del cociente τ_2/τ_1.

Solución Para obtener la respuesta escalón unitario del proceso real se despeja $C(s)$ y se sustituye $M(s) = 1/s$ en la función de transferencia:

$$C(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \frac{1}{s}$$

Haciendo la expansión en fracciones parciales e invirtiendo con la ayuda de la tabla de transformadas de Laplace (tabla 2-1.1), se obtiene

$$C(t) = K\left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2}\right]$$

Cuando $t \to \infty$, $C(t) \to K$. Para el método de ajuste 3, en $t_1 = t_0' + \tau'/3$,

$$C(t_1) = (1 - e^{-1/3})K = K\left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t_1/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t_1/\tau_2}\right]$$

y en $t_2 = t_0' + \tau'$,

$$C(t_2) = (1 - e^{-1})K = K\left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t_2/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t_2/\tau_2}\right]$$

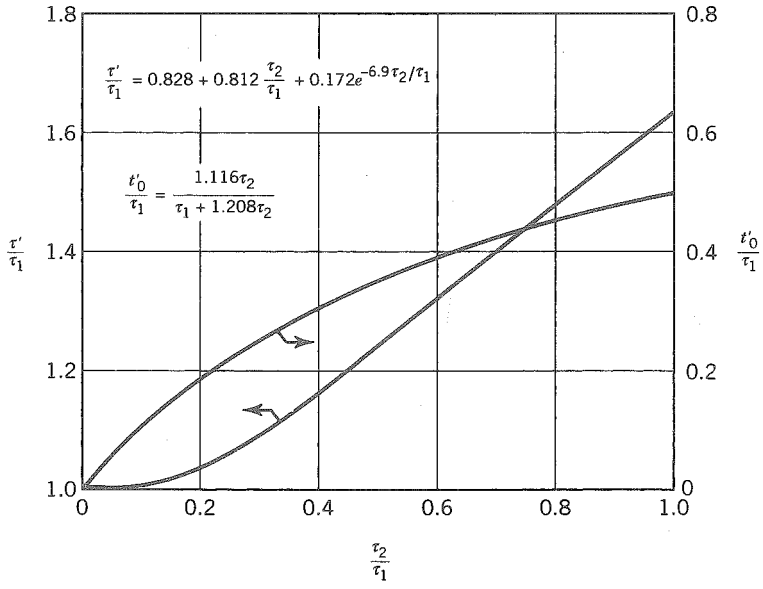


Figura 7-2.8 Tiempo muerto y constante de tiempo del modelo FOPDT para la aproximación de un sistema de segundo orden sobreamortiguado por el método de ajuste 3. (Reproducido con autorización de la referencia 3.)

o bien,

$$e^{-1/3} = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\left(e^{-t_1/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1}e^{-t_1/\tau_2}\right) \qquad \textbf{(A)}$$

$$e^{-1} = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\left(e^{-t_2/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1}e^{-t_2/\tau_2}\right) \qquad \textbf{(B)}$$

Es posible obtener fórmulas similares para el caso especial $\tau_1 = \tau_2$. Los valores de t_1 y t_2 se obtienen por prueba y error a partir de estas ecuaciones. Así, de la ecuación 7-2.16 resulta

$$\tau' = \frac{3}{2}(t_2 - t_1) \quad t'_0 = \tau_2 - \tau'$$

Martin (1975) utilizó un programa de computadora para resolver este problema, cuyos resultados se grafican en la figura 7-2.8. Como se observa en la figura, el tiempo muerto efectivo máximo ocurre cuando las dos constantes de tiempo son iguales:

$$\text{Para } \tau_1 = \tau_2 \quad t'_0 = 0.505\tau_1 \quad \tau' = 1.64\tau_1$$
$$\text{Para } \tau_2 \ll \tau_1 \quad t'_0 \to \tau_2 \quad \tau' \to \tau_1$$

Esta es la base para la regla empírica antes presentada. Se puede usar la figura 7-2.8 para perfeccionar esta regla empírica para los sistemas representados por tres o más retardos de primer orden en serie. Por ejemplo, en el ejemplo del intercambiador de calor, la aproximación original se puede perfeccionar como sigue:

Se supone que $\tau_1 = 30$ s, $\tau_2 = 10 + 3 = 13$ s, de tal modo que $\tau_2/\tau_1 = 13/30 = 0.433$. Entonces, por la figura 7-2.8, $t'_0 = 0.33\tau_1 = 9.9$ s, $\tau' = 1.2\tau_1 = 36$ s. Estos valores están próximos a los valores obtenidos por el método de ajuste 3, modelo C, en el ejemplo 7-2.1. En este caso τ_2 no es mucho menor que τ_1.

7-2.2 Sintonización para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto

Además de sus fórmulas de sintonización en línea, Ziegler y Nichols (1942) propusieron un conjunto de fórmulas basadas en los parámetros del ajuste de un modelo de primer orden para la curva de reacción del proceso. Estas fórmulas se dan en la tabla 7-2.1. Aunque los parámetros que usaron no eran exactamente la ganancia, la constante de tiempo y el tiempo muerto, sus fórmulas se pueden modificar y expresar en términos de estos parámetros. Ziegler y Nichols usaron el método de ajuste 1 para determinar los parámetros del modelo.

Como se puede ver en la tabla 7-2.1, las magnitudes relativas de la ganancia, el tiempo integral y el tiempo derivativo entre los controladores P, PI y PID son las mismas que para las fórmulas de sintonización en línea que se basan en la ganancia última y el periodo último (tabla 7-1.1). Las fórmulas para la ganancia muestran que la ganancia del lazo, KK_c, es inversamente proporcional a la relación del tiempo muerto efectivo y la constante de tiempo efectiva.

Tabla 7-2.1 Fórmulas de sintonización para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto

Tipo de controlador	Ganancia proporcional	Tiempo integral	Tiempo derivativo
Sólo proporcional, P	$K_c = \frac{1}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-1}$	–	–
Proporcional-integral, PI	$K_c = \frac{0.9}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-1}$	$\tau_I = 3.33t_0$	–
Proporcional-integral-derivativo, PID[a]	$K'_c = \frac{1.2}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-1}$	$\tau'_I = 2.0t_0$	$\tau'_D = \frac{t_0}{2}$

[a]Las fórmulas PID son para el controlador PID real, ecuación 5-3.19. Para hacer la conversión al controlador PID ideal, ecuación 5-3.17: $K_c = K'_c(1 + \tau'_D/\tau'_I)$; $\tau_I = \tau'_I + \tau'_D$; $\tau_D = \tau'_D\tau'_I/(\tau'_I + \tau'_D)$.

Al utilizar las fórmulas de la tabla 7-2.1, se debe tener presente que son empíricas y únicamente son válidas en un rango limitado de relaciones del tiempo muerto y la constante de tiempo. En nuestra experiencia, estas fórmulas son particularmente válidas para un rango de t_0/τ entre 0.10 y 0.5.

Como se señaló en el análisis de la sintonización en línea, las fórmulas para una razón de asentamiento de un cuarto se pueden ajustar a respuestas menos oscilatorias mediante la simple reducción de la ganancia proporcional a partir del valor dado por la fórmula de sintonización. Desafortunadamente, las fórmulas de la tabla 7-2.1 dan el tiempo integral y derivativo como funciones del tiempo muerto del proceso, cuya estimación no es tan directa como la del periodo último.

Ejemplo 7-2.3 Comparar los valores de los parámetros de sintonización para el control de temperatura del intercambiador de la figura 6-1.1 usando la sintonización en línea con razón de asentamiento de un cuarto y los parámetros del modelo FOPDT estimados en el ejemplo 7-2.1. En ejemplos anteriores se establecieron los siguientes resultados para el lazo de control de temperatura del intercambiador:

Por el método de sustitución directa, del ejemplo 6-2.1:

$$K_{cu} = 23.8\ \%\text{CO}/\%\text{TO} \quad T_u = 28.7\ \text{s}$$

Por la aproximación con el método de ajuste 1, del ejemplo 7-2.1:

$$K = 0.80\ \%\text{CO}/\%\text{TO} \quad t_0 = 7.2\ \text{s} \quad \tau = 54.3\ \text{s}$$

Solución Para un controlador sólo proporcional (P):

Sintonización en línea (tabla 7-1.1)

$$K_c = \frac{1}{2}(23.8) = 12\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

Sintonización en lazo abierto (tabla 7-2.1)

$$K_c = \frac{1}{0.80}\left(\frac{7.2}{54.3}\right)^{-1} = 9.4\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

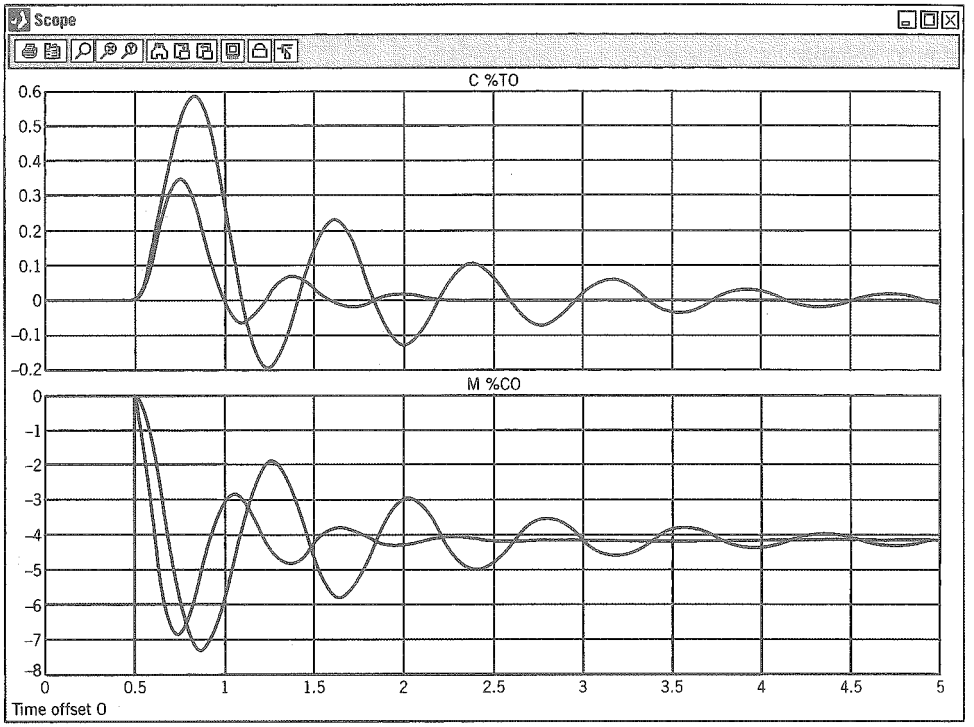


Figura 7-2.9 Comparación de las respuestas PI y PID para el intercambiador de calor del ejemplo 7-2.3. La entrada es un incremento escalón de 2 kg/s en el flujo de proceso.

Para un controlador proporcional integral (PI):

$$K_c = \frac{23.8}{2.2} = 11\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}} \qquad K_c = \frac{0.9}{0.80}\left(\frac{7.2}{54.3}\right)^{-1} = 8.5\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

$$\tau_I = \frac{28.7}{1.2} = 24\text{ s}\ (0.40\text{ min}) \qquad \tau_I = 3.33(7.2) = 24\text{ s}\ \ (0.40\text{ min})$$

Para un controlador proporcional integral derivativo (PID):

$$K_c' = \frac{23.8}{1.7} = 14\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}} \qquad K_c' = \frac{1.2}{0.80}\left(\frac{7.2}{54.3}\right)^{-1} = 11\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

$$\tau_I' = \frac{28.7}{2.0} = 14\text{ s}\ (0.24\text{ min}) \qquad \tau_I' = 2.0(7.2) = 14\text{ s}\ \ (0.24\text{ min})$$

$$\tau_D' = \frac{28.7}{8} = 3.6\text{ s}\ (0.06\text{ min}) \qquad \tau_D' = 0.5(7.2) = 3.6\text{ s}\ \ (0.06\text{ min})$$

La concordancia es evidente. Sin embargo, nótese que esta concordancia depende del uso de los parámetros del modelo obtenidos con el método de ajuste 1, que resultan ser los que utilizaron Ziegler y Nichols.

En la figura 7-2.9 se comparan las respuestas de las salidas del transmisor y del controlador usando los parámetros para los controladores PI y PID calculados en la columna derecha anterior. Para generar estas gráficas se hizo una simulación del intercambiador usando las funciones de transferencia del ejemplo 6-2.1 y una simulación del controlador como se describe en la sección 13-4. La figura muestra que en las respuestas a un cambio en el flujo de proceso, el controlador PID produce una menor desviación inicial de la referencia, menos oscilaciones y un tiempo de asentamiento más rápido que el controlador PI. Se concluye que el controlador PID debe usarse siempre que el modelo del proceso presente una relación alta del tiempo muerto y la constante de tiempo, por ejemplo, mayor que 0.05.

7-2.3 Sintonización para criterios de la integral mínima del error

Debido a que los parámetros de sintonización con razón de asentamiento de un cuarto no son únicos, se realizó un proyecto de investigación sustancial en Louisiana State University (LSU) bajo la dirección de los profesores Paul W. Murrill y Cecil L. Smith para desarrollar relaciones de sintonización que fueran únicas. Usaron los parámetros del modelo de primer orden más tiempo muerto (FOPDT) para caracterizar el proceso. Su especificación de la respuesta de lazo cerrado es, en esencia, un error o desviación mínima de la variable controlada respecto a su referencia. Como el error es una función del tiempo en la duración de la respuesta, es necesario minimizar la suma de los errores en cada instante de tiempo. Esto es por definición la integral del error en el tiempo, o las áreas sombreadas en las respuestas ilustradas en la figura 7-2.10. Puesto que el objetivo de las relaciones de sintonización es minimizar la integral del error, se les conoce como *sintonización de la integral mínima del error.* Sin embargo, la integral del error no se puede minimizar directamente porque el error mínimo sería un valor negativo muy grande. Una manera de evitar los valores negativos en la función de desempeño consiste en calcular la integral del valor absoluto del error (IAE, por sus siglas en inglés).

$$\text{IAE} = \int_0^\infty |\, e(t) \,|\, dt \tag{7-2.17}$$

Otras estrategias incluyen el error cuadrático (ISE) y las integrales ponderadas en el tiempo, ITAE e ITSE, pero aquí sólo se usará el IAE. El lector puede consultar las publicaciones originales de López *et al.* (1967) para las fórmulas de sintonización con otras integrales del error.

La integral se extiende desde el momento en que ocurre la perturbación o cambio en la referencia ($t = 0$) hasta un gran tiempo posterior ($t = \infty$). Esto se debe a que el final de la respuesta no se puede determinar con anticipación. El único problema con esta definición de la integral es que se vuelve indeterminada cuando el error no es forzado a ser cero. Esto ocurre únicamente cuando el controlador no tiene acción integral, debido al corrimiento o error de estado estacionario. En este caso, el error en la definición se reemplaza con la diferencia entre la variable controlada y su valor final de estado estacionario.

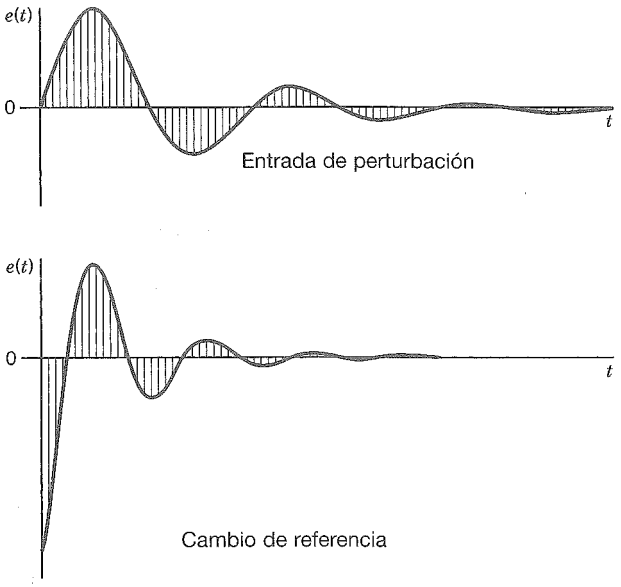


Figura 7-2.10 Definición de las integrales del error para perturbaciones y para cambios en la referencia.

La ecuación 7-2.17 constituye la integral del error que se puede minimizar para un lazo dado ajustando los parámetros del controlador. Desafortunadamente, el conjunto óptimo de valores de los parámetros es una función del tipo de entrada –perturbación o referencia– y de su forma –por ejemplo, cambio escalón, rampa, etc.–. En términos de la forma de la entrada, por lo general se selecciona el cambio escalón porque es el peor de los casos que puede ocurrir en la práctica, mientras que en términos del tipo de entrada, para la sintonización se debe seleccionar la referencia o la perturbación, dependiendo de cuál de ellas se espera que afecte el lazo con mayor frecuencia. Cuando la referencia sea la más importante, el propósito del controlador es hacer que la variable controlada siga a la referencia, y en tal caso el controlador se conoce como un *servo-regulador*. Cuando el propósito del controlador es mantener la variable controlada en una referencia constante en presencia de perturbaciones, el controlador se conoce como *regulador*. Los parámetros óptimos de sintonización en términos de la integral mínima del error son diferentes en cada caso. La mayoría de los controladores de procesos se considera reguladores, con excepción de los controladores esclavos en los esquemas de control en cascada, donde son servo-reguladores. El control en cascada se estudia en el capítulo 9.

Cuando el controlador se sintoniza para la respuesta óptima a una perturbación, es necesario tomar una decisión adicional respecto a la función de transferencia del proceso para la perturbación particular. Esto se complica por el hecho de que la respuesta del controlador no puede ser óptima para cada perturbación si hay más de una señal de perturbación principal entrando al lazo. Como la función de transferencia del proceso es diferente para cada perturbación y para la señal de salida del controlador, los parámetros de sintonización óptima son funciones de la velocidad relativa de la respuesta de la variable controlada a la perturbación. Entre más lenta sea la respuesta a la entrada de una perturbación, más rigurosa se puede hacer la sintonización del controlador, es decir, se puede ajustar en un valor mayor la ganancia del

controlador. En el otro extremo, si la variable controlada responde instantáneamente a la perturbación, la sintonización del controlador debería hacerse lo menos rigurosa posible, que sería el equivalente exacto de la sintonización para cambios en la referencia.

López *et al.* (1967) desarrollaron fórmulas de sintonización para los criterios de la integral mínima del error basadas en la suposición de que la función de transferencia del proceso para la entrada de perturbaciones es idéntica a las funciones de transferencia para la señal de salida del controlador. En otras palabras, con referencia a la figura 7-2.2, partieron del supuesto de que $G_2(s) = G_1(s)$. Las fórmulas de sintonización para la IAE mínima se presentan en la tabla 7-2.2.

Estas fórmulas indican la misma tendencia que las de la razón de asentamiento de un cuarto, excepto porque el tiempo integral depende en cierta medida de la constante de tiempo efectiva del proceso y menos del tiempo muerto del proceso. Nuevamente, es necesario tener presente que estas fórmulas son empíricas y no deberán extrapolarse más allá del rango de (t_0/τ) de entre 0.1 y 1.0. (Éste es el rango de valores usado por López en sus correlaciones.) Tal como ocurre con las fórmulas de sintonización para una razón de asentamiento de un cuarto, estas fórmulas predicen que tanto la acción proporcional como la integral tienden a infinito cuando el desarrollo se aproxima a un proceso de primer orden sin tiempo muerto. Este comportamiento es típico de las fórmulas de sintonización para la entrada de perturbaciones.

Tabla 7-2.2 Fórmulas de IAE mínima para entradas de perturbaciones

Tipo de controlador	Ganancia proporcional	Tiempo integral	Tiempo derivativo
Sólo proporcional, P	$K_c = \frac{0.902}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-0.985}$	–	–
Proporcional-integral, PI	$K_c = \frac{0.984}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-0.986}$	$\tau_I = \frac{\tau}{0.608}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{0.707}$	–
Proporcional-integral-derivativo, PID	$K_c = \frac{1.435}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-0.921}$	$\tau_I = \frac{\tau}{0.878}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{0.749}$	$\tau_D = 0.482\tau\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{1.137}$

Tabla 7-2.3 Fórmulas de IAE mínima para cambios en la referencia

Tipo de controlador	Ganancia proporcional	Tiempo integral	Tiempo derivativo
Proporcional-integral, PI	$K_c = \frac{0.758}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-0.861}$	$\tau_I = \frac{\tau}{1.02 - 0.323\left(\frac{t_0}{\tau}\right)}$	–
Proporcional-integral-derivativo, PID	$K_c = \frac{1.086}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-0.869}$	$\tau_I = \frac{\tau}{0.740 - 0.130\left(\frac{t_0}{\tau}\right)}$	$\tau_D = 0.348\tau\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{0.914}$

Las fórmulas de sintonización para la referencia dadas en la tabla 7-2.3 fueron desarrolladas por Rovira (1981), quien omitió las relaciones para los controladores proporcionales puros con base en la suposición de que los criterios de la integral mínima del error no son apropiados para las aplicaciones en las que se prescribe un controlador proporcional puro, por ejemplo, en la promediación del flujo para el control proporcional del nivel (ver la sección 7-3). Estas fórmulas también son empíricas y no deberán extrapolarse más allá del rango de (t_0/τ) de entre 0.1 y 1.0. Las fórmulas predicen que para un proceso con una sola capacitancia (primer orden) sin tiempo muerto, el tiempo integral tiende a la constante de tiempo del proceso mientras que la ganancia proporcional tiende a infinito y el tiempo derivativo a cero. Estos resultados son típicos de las fórmulas de sintonización para la referencia.

Ejemplo 7-2.4 ***Sintonización IAE mínima para un intercambiador de calor.*** Determinar los parámetros de sintonización que resultan de la integral mínima del valor absoluto del error para una entrada de perturbaciones en el controlador de temperatura de un intercambiador de calor utilizando la función de transferencia del modelo FOPDT del ejemplo 7-2.1. Considérese: a) un controlador P, b) un controlador PI, y c) un controlador PID.

Solución Los parámetros del modelo FOPDT del ejemplo 7-2.1 son, para el método de ajuste 3,

$$K = 0.80\ \%/\%; \qquad \tau = 33.8\ \text{s}; \qquad t_0 = 11.2\ \text{s}$$

Los parámetros de sintonización de la integral mínima del error para una entrada de perturbaciones se pueden calcular usando las fórmulas de la tabla 7-2.2:

a) *CONTROLADOR P*

$$K_c = \frac{0.902}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-0.985} = 3.3\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

Compárese este valor con la ganancia para la razón de asentamiento de un cuarto, obtenida en el ejemplo 7-2.3, de 9.4 %CO/%TO.

b) *CONTROLADOR PI*

$$K_c = \frac{0.984}{0.80}\left(\frac{11.2}{33.8}\right)^{-0.986} = 3.7\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}} \qquad \tau_I = \frac{33.8}{0.608}\left(\frac{11.2}{33.8}\right)^{0.707} = 25.5\ \text{s}\ \ (0.42\ \text{min})$$

Compárense estos valores con los de la razón de asentamiento de un cuarto, obtenidos en el ejemplo 7-2.3, de $K_c = 8.5$ %CO/%TO y $\tau_I = 0.40$ min.

c) *CONTROLADOR PID*

$$K_c = \frac{1.435}{0.80}\left(\frac{11.2}{33.8}\right)^{-0.921} = 5.0\frac{\%CO}{\%TO}$$

$$\tau_I = \frac{33.8}{0.878}\left(\frac{11.2}{33.8}\right)^{0.749} = 16.8\text{ s}\,(0.28\text{ min})$$

$$\tau_D = 0.482 \cdot 33.8 \cdot \left(\frac{11.2}{33.8}\right)^{1.137} = 4.64\text{ s}\,(0.077\text{ min})$$

Estos son los parámetros para el controlador PID ideal o en paralelo. Para compararlos con los parámetros para la razón de asentamiento de un cuarto del ejemplo 7-2.3, que corresponden al controlador PID real o en serie, debe hacerse su conversión a los parámetros equivalentes del controlador PID ideal (véase la tabla 7-2.1):

$$K_c = K_c'\left(1 + \frac{\tau_D'}{\tau_I'}\right) = 11\left(1 + \frac{0.06}{0.24}\right) = 14\frac{\%CO}{\%TO}$$

$$\tau_I = \tau_I' + \tau_D' = 0.24 + 0.06 = 0.30\text{ min}$$

$$\tau_D = \frac{\tau_I'\tau_D'}{\tau_I' + \tau_D'} = \frac{0.24 \cdot 0.06}{0.24 + 0.06} = 0.048\text{ min}$$

La conclusión a la que se puede llegar después de comparar estos parámetros de sintonización con los parámetros para la razón de asentamiento de un cuarto es que todas estas fórmulas resultan en valores del mismo orden de magnitud o aproximados. Nótese que las ganancias para la razón de asentamiento de un cuarto son mayores que las obtenidas para la IAE mínima, indicando que resultan en un control más agresivo.

En la figura 7-2.11 se muestran las respuestas del controlador PID de las salidas del transmisor y del controlador utilizando las sintonizaciones de la IAE mínima y la razón de asentamiento de un cuarto. Las respuestas para la razón de asentamiento de un cuarto muestran una desviación inicial menor respecto de la referencia para el cambio en el flujo de proceso y una aproximación más rápida a la nueva referencia cuando ésta ha cambiado. Este mejor desempeño se obtiene a costa de un comportamiento más oscilatorio y con mayor variación en la salida del controlador.

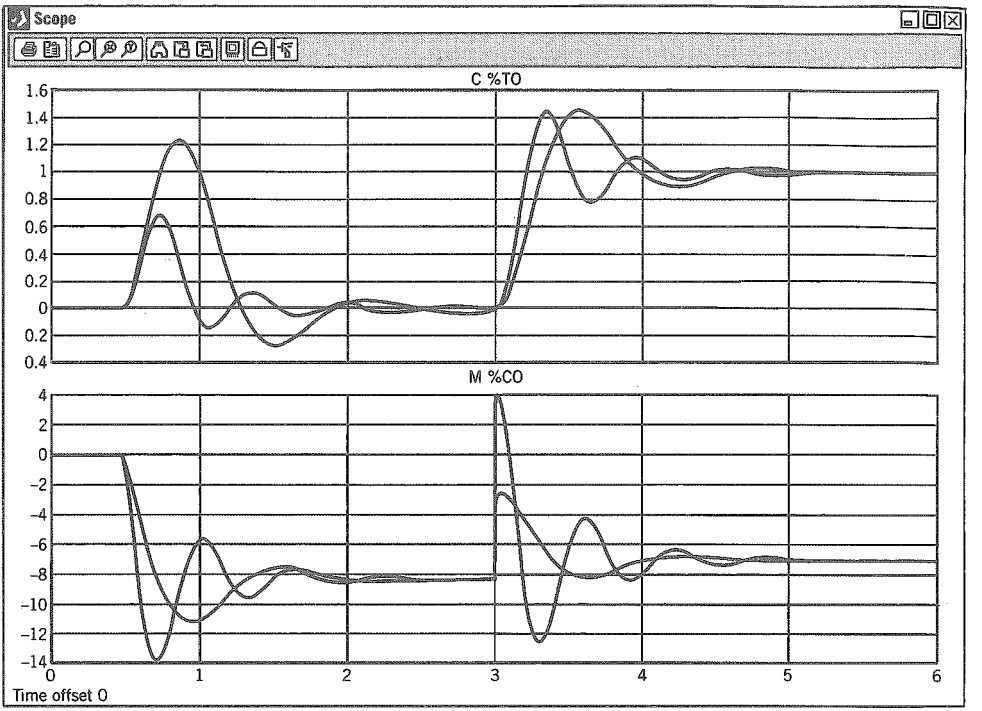


Figura 7-2.11 Comparación de las respuestas de un controlador PID para una sintonización IAE mínima y una sintonización con razón de asentamiento de un cuarto para el intercambiador de calor del ejemplo 7-2.4. La entrada es un incremento escalón de 2 kg/s en el flujo de proceso seguido de un cambio de 1°C en la referencia.

Ejemplo 7-2.5 ***Comparación de fórmulas de sintonización para perturbaciones y para la referencia.*** Considérense las respuestas del intercambiador de calor a un cambio escalón unitario en la perturbación y en la referencia. Comparar las respuestas obtenidas cuando un controlador PID se sintoniza para la IAE mínima en las perturbaciones con las que se obtienen bajo los mismos criterios para cambios en la referencia.

Solución Los parámetros FOPDT son

$$K = 0.8\ \%\text{TO}/\%\text{CO} \quad \tau = 33.8\ \text{s} \quad t_0 = 11.2\ \text{s}$$

Los parámetros de la IAE mínima para la entrada de perturbaciones se determinaron en el ejemplo 7-2.4 como $K_c = 5.0\ \%\text{CO}/\%\text{TO}$, $\tau_I = 0.28$ min, $\tau_D = 0.077$ min. Para los cambios en la referencia, los parámetros del controlador PID se determinaron con las fórmulas de la tabla 7-2.3:

$$K_c = \frac{1.086}{0.80}\left(\frac{11.2}{33.8}\right)^{-0.869} = 3.5\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

$$\tau_I = \frac{33.8}{0.740 - 0.130\left(\frac{11.2}{33.8}\right)} = 48\,\text{s}\ \ (0.80\,\text{min})$$

$$\tau_D = 0.348 \cdot 33.8 \cdot \left(\frac{11.2}{33.8}\right)^{0.914} = 4.3\,\text{s}\ \ (0.071\,\text{min})$$

Se observa que las fórmulas de sintonización para la referencia resultan en una ganancia más pequeña y en un tiempo integral mayor que las fórmulas para las perturbaciones. En la figura 7-2.12 se comparan las respuestas de las salidas del transmisor y el controlador para los dos conjuntos de fórmulas de sintonización. La figura muestra que para la perturbación en el flujo de proceso, los parámetros de sintonización para perturbaciones resultan en una desviación inicial ligeramente más pequeña respecto a la referencia y un retorno más rápido a esta última que los parámetros de sintonización para la referencia. Para el cambio en la referencia, los parámetros de sintonización óptimos para esta condición resultan en un sobrepaso significativamente menor, un comportamiento menos oscilatorio y un tiempo de asentamiento menor que los parámetros de sintonización para perturbaciones. Nótese que las fórmulas para perturbaciones resultan en mayor variación en la salida del controlador. Estas variaciones quizá no sean deseables ya que dan lugar a perturbaciones en otros lazos de control.

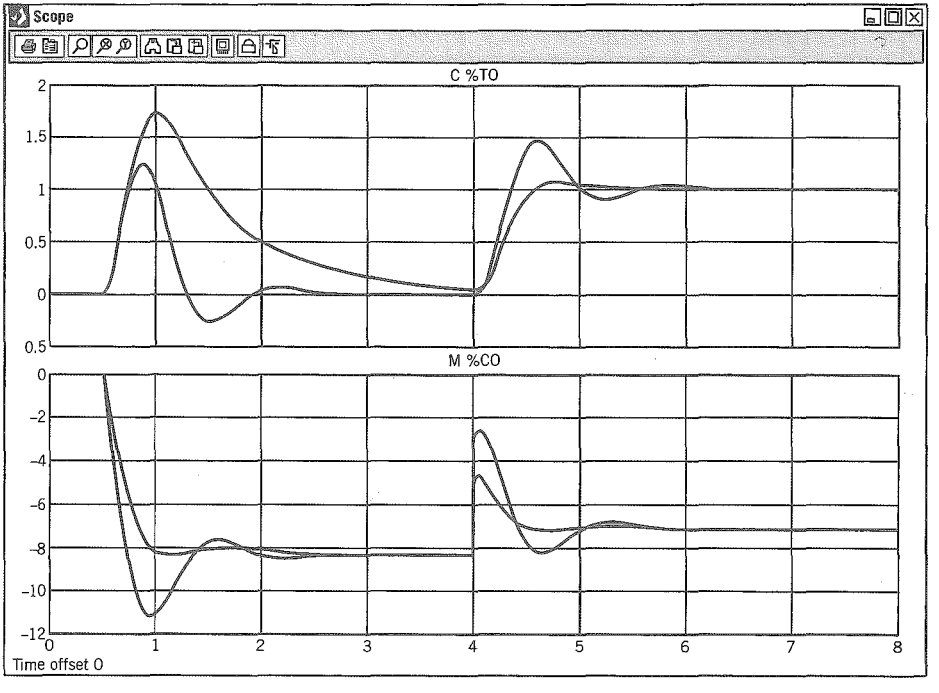


Figura 7-2.12 Comparación de las respuestas de un controlador PID con sintonización IAE mínima para la entrada de perturbaciones y con sintonización IAE mínima para cambios en la referencia para el intercambiador de calor del ejemplo 7-2.5. La entrada es un incremento de 2 kg/s en el flujo de proceso seguido de un cambio de 1°C en la referencia.

Como sería de esperarse, cada conjunto de parámetros de sintonización se desempeña mejor para la entrada para la que está diseñado. Las respuestas obtenidas son un resultado directo de la ganancia más alta y el tiempo integral menor que se obtienen con la sintonización de perturbaciones.

7-2.4 Sintonización de controladores por muestreo de datos

En la industria contemporánea, la mayoría de las funciones de control se implementan utilizando microprocesadores (controladores distribuidos), minicomputadoras y computadoras digitales. Una característica común de estas instalaciones es que los cálculos de control se realizan en intervalos regulares de tiempo T, el *tiempo de muestreo*. Esto contrasta con los instrumentos analógicos (electrónicos y neumáticos) que realizan sus funciones de manera continua en el tiempo. El muestreo también es característico de algunos analizadores, como los cromatógrafos de gas en línea.

El modo discreto de operación característico de las computadoras requiere que en cada instante de muestreo se haga el muestreo de las señales del transmisor, se calcule el valor de la variable manipulada y se actualice la señal de salida del controlador. Después las señales de salida se mantienen constantes durante un periodo de muestreo completo hasta la siguiente actualización. Lo anterior se ilustra en la figura 7-2.13. Como sería de esperarse, esta operación de muestreo y retención tiene un efecto en el desempeño del controlador y, por consiguiente, en sus parámetros de sintonización.

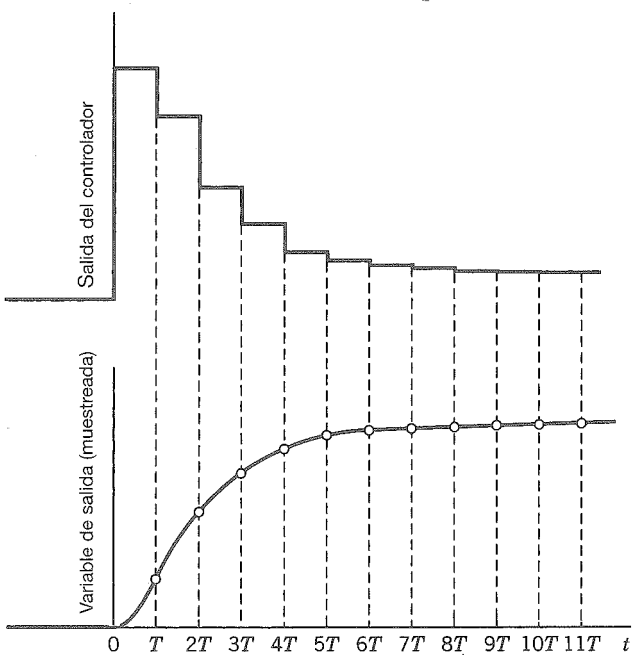


Figura 7-2.13 La salida de un controlador por muestreo de datos se actualiza a intervalos uniformes de tiempo T y se mantiene constante entre las actualizaciones.

El tiempo de muestreo de los controladores basados en computadora varía desde un tercio de segundo hasta varios minutos, dependiendo de la aplicación. *Una buena regla empírica es que el tiempo de muestreo sea aproximadamente una décima parte de la constante de tiempo efectiva del proceso.* Cuando el tiempo de muestreo es de este orden de magnitud, su efecto se puede tomar en consideración en las fórmulas de sintonización sumando la mitad del tiempo de muestreo al tiempo muerto del proceso y usando después este tiempo muerto corregido en las fórmulas de sintonización para controladores continuos (tablas 7-2.1, 7-2.2 y 7-2.3). Este método, propuesto por Moore *et al.* (1969) indica que el tiempo muerto que se debe usar en las fórmulas de sintonización es

$$t_{0c} = t_0 + \frac{T}{2} \tag{7-2.18}$$

donde:

t_{0c} = el tiempo muerto corregido
t_0 = el tiempo muerto del proceso
T = el intervalo de tiempo entre las muestras (tiempo de muestreo).

Nótese que el método de sintonización en línea incorpora inherentemente el efecto del muestreo cuando la ganancia última y el periodo último para el lazo se determinan con el controlador por muestreo de datos en automático.

Fórmulas de sintonización específicas para controladores por muestreo de datos han sido desarrolladas por Chiu *et al.* (1973) y reproducidas por Corripio (2001).

7-2.5 Resumen de sintonización de controladores

Hasta ahora se han presentado dos métodos para determinar las características dinámicas del proceso en un lazo de control por retroalimentación: el método de ganancia última y la prueba escalón o curva de reacción del proceso. También se ha presentado un conjunto de fórmulas de sintonización para el método de ganancia última y tres conjuntos de fórmulas para los parámetros del modelo de primer orden más tiempo muerto. Para un proceso dado, los cuatro conjuntos de fórmulas de sintonización resultan en parámetros del controlador que son del mismo orden de magnitud o aproximados. Estos parámetros de sintonización son tan sólo valores iniciales que deben ajustarse en el campo para que la verdadera "personalidad" del proceso específico sea compatible con el controlador. Es necesario reiterar un punto mencionado al inicio de este capítulo. Como se señaló en los capítulos 3 y 4, la mayoría de los procesos son no lineales, y sus características dinámicas (por ejemplo, la ganancia última y la frecuencia última, los parámetros del modelo FOPDT) varían de un punto de operación a otro. En consecuencia, los parámetros del controlador obtenidos por el procedimiento de sintonización son, en el mejor de los casos, un término medio entre un comportamiento lento en uno de los extremos del rango de operación del proceso y un comportamiento oscilatorio en el otro extremo. En resumen, la sintonización no es una ciencia exacta. Sin embargo, también se debe

tener presente que las fórmulas de sintonización ayudan a entender la forma en que los diferentes parámetros del controlador dependen de los parámetros del proceso tales como la ganancia, la constante de tiempo y el tiempo muerto.

7-3 SINTONIZACIÓN DE CONTROLADORES PARA PROCESOS INTEGRANTES

Los procesos integrantes constituyen un caso especial de sintonización porque los modelos comunes de primer y segundo orden presentados en la sección anterior no pueden representar el proceso. Esto se debe a que el proceso no es autorregulado, es decir, no alcanzará un estado estacionario si es estimulado por una perturbación sostenida con el lazo abierto. Una consecuencia adicional de lo anterior es que el control por retroalimentación es absolutamente necesario para operar un proceso integrante y que las pruebas escalón de lazo abierto sólo pueden llevarse a cabo durante periodos de tiempo muy reducidos. El control del nivel de líquidos es indiscutiblemente el proceso integrante más común.

Una característica especial del control del nivel de líquidos es que hay dos especificaciones opuestas en el desempeño del lazo de control: *control de nivel riguroso* y *control de nivel promedio*. El control de nivel riguroso requiere que el nivel se mantenga en la referencia o muy cerca de ella, como en evaporadores y en rehervidores de circulación natural, debido a la alta sensibilidad de la tasa de transferencia de calor a las variaciones de nivel. El control de nivel promedio se especifica para tanques de estabilización y acumuladores, donde el objetivo es promediar o atenuar las variaciones en el flujo de entrada para que el flujo de salida no varíe repentinamente. Los reactores y equipos similares requerirían una especificación intermedia donde el objetivo de controlar el nivel es mantener el volumen de líquido en el tanque aproximadamente constante. En tales aplicaciones sería aceptable permitir una variación del nivel de cerca de ±5% alrededor de la referencia, lo que representa una tolerancia mayor que para un evaporador o un rehervidor.

En esta sección se usa el control de nivel como ejemplo de un proceso integrante. Además, se deriva un modelo de un lazo de control de nivel en un tanque simple y se establece que, en muchos casos, los parámetros de sintonización se pueden calcular a partir de los parámetros de diseño del proceso.

7-3.1 Modelo de un sistema de control de nivel de líquido

El control de nivel es uno de los pocos procesos continuos que se puede tratar como un proceso integrante. En la figura 7-3.1 se muestra el diagrama de un lazo de control de nivel con la válvula de control ubicada en la descarga de la bomba que saca el líquido del tanque. En la sección 4-1.1 se modelaron procesos de nivel similares como autorregulados debido al efecto del nivel en la caída de presión a través de la válvula y, en consecuencia, del flujo de salida. Sin embargo, este efecto autorregulador suele ser despreciable, en especial cuando una bomba, como en este caso, produce la caída de presión a través de la válvula. Una demostración numérica de este hecho se presenta como un problema al final de este capítulo.

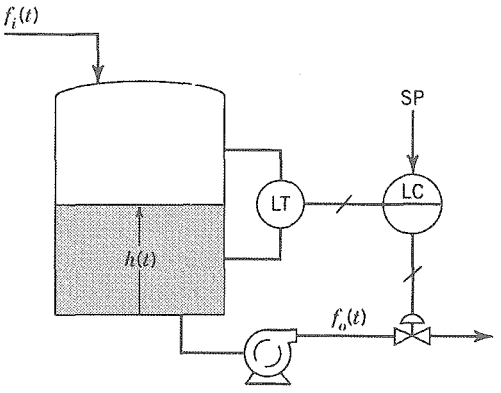


Figura 7-3.1 Diagrama esquemático de un lazo de control de nivel con manipulación del caudal de salida.

Para modelar la respuesta del nivel en el tanque, se escribe un balance de masa alrededor del tanque

$$A\frac{dh(t)}{dt} = f_i(t) - f_o(t) \tag{7-3.1}$$

Donde A es la sección transversal del tanque, $h(t)$ es el nivel del tanque, $f_i(t)$ es el flujo total de entrada al tanque, $f_o(t)$ es el flujo de salida del tanque y se está suponiendo el uso de unidades consistentes. Restando el estado estacionario inicial y tomando la transformada de Laplace de la ecuación resultante en términos de las variables de desviación se obtiene

$$H(s) = \frac{1}{As}[F_i(s) - F_o(s)] \tag{7-3.2}$$

1 ec., 2 incóg. (H, F_o)

Suponiendo que el flujo de salida sólo es una función de la posición de la válvula y modelando la válvula como un retardo de primer orden (véase la sección 5-2), se obtiene

$$F_o(s) = \frac{K_v}{\tau_v s + 1} M(s) \tag{7-3.3}$$

2 ec., 3 incóg. (M)

donde K_v es la ganancia de la válvula, τ_v es la constante de tiempo de la válvula y $M(s)$ es la señal de salida del controlador, %CO. Los transmisores de nivel suelen ser muy rápidos y pueden modelarse como ganancias simples:

$$C(s) = K_T H(s) \tag{7-3.4}$$

3 ec., 4 incóg. (C)

donde $C(s)$ es la señal de salida del transmisor, %TO, y K_T es la ganancia del transmisor. Por la sección 5-1,

$$K_T = \frac{100}{h_{\text{máx}} - h_{\text{mín}}} \tag{7-3.5}$$

donde $h_{\text{máx}}$ y $h_{\text{mín}}$ son los límites del rango del transmisor.

Un controlador de nivel por lo general se calibra en porcentaje de salida del transmisor (%TO) porque este valor indica hasta dónde está lleno el tanque sin tener que conocer los límites reales del transmisor de nivel. Debido a ello, la referencia y el nivel se presentan en %TO. En términos de estas variables, la salida del controlador es

$$M(s) = G_c(s)\left[C^{\text{set}}(s) - C(s)\right] \tag{7-3.6}$$

ec., 4 incóg.

donde $C^{\text{set}}(s)$ es la referencia en %TO, $G_c(s)$ es la función de transferencia del controlador, y se ha seguido la convención estándar de signos en el cálculo del error.

Se completa así el modelo del lazo de control de nivel. En la figura 7-3.2*a* se muestra el diagrama de bloques detallado del lazo, mientras que en la figura 7-3.2*b* se muestra el diagrama simplificado. Las dos ganancias del proceso presentadas en el segundo diagrama son

$$K = \frac{K_v K_T}{A}\frac{\%\text{TO}}{\%\text{CO-min}}$$
$$K_u = \frac{K_T}{A}\frac{\%\text{TO}}{\text{ft}^3} \tag{7-3.7}$$

Nótese que en estas fórmulas se supone el uso de unidades consistentes. Por ejemplo, si K_v está en gpm/%CO y K_T en %TO/ft, A debe estar en gal/ft y el flujo de entrada también debe estar en gpm para que K_u pueda estar en %TO/gal.

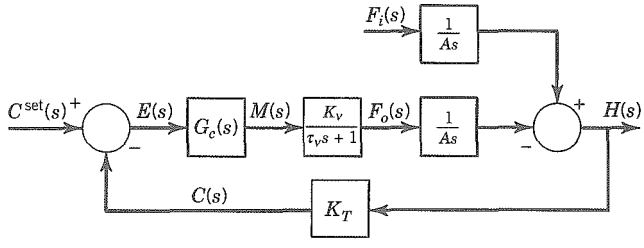


Figura 7-3.2*a* Diagrama de bloques del lazo de control de nivel de la figura 7-3.1.

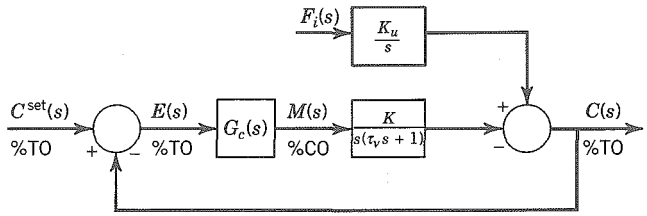


Figura 7-3.2*b* Diagrama de bloques simplificado del lazo de control de nivel de la figura 7-3.1.

Del diagrama de bloques de la figura 7-3.2*b*, después de hacer algunas manipulaciones algebraicas, se puede obtener la siguiente función de transferencia de lazo cerrado para el nivel

$$C(s) = \frac{-KG_c(s)}{s(\tau_v s+1) - KG_c(s)} C^{set}(s) + \frac{K_u(\tau_v s+1)}{s(\tau_v s+1) - KG_c(s)} F_i(s) \qquad (7\text{-}3.8)$$

donde el signo menos indica que se tiene un lazo de retroalimentación positiva, lo que significa que el controlador debe tener una ganancia negativa (acción directa). Se puede llegar exactamente a la misma conclusión al analizar la figura 7-3.1. Un incremento en el nivel debe producir un incremento en la salida del controlador para abrir la válvula de descarga e incrementar el flujo de salida. Esto requiere un controlador de acción directa.

7-3.2 Controlador de nivel proporcional

Muchos controladores de nivel, sea que estén sintonizados para un control riguroso o un control promedio, son controladores proporcionales. De hecho, en la sección siguiente se verá que la síntesis de un controlador para un proceso integrante resulta en un controlador proporcional. A continuación se examina un controlador proporcional en el lazo de control de nivel.

Para examinar un controlador proporcional de acción directa, su función de transferencia, $G_c(s) = -K_c$, se sustituye en la ecuación 7-3.8 para obtener

$$C(s) = \frac{KK_c}{s(\tau_v s+1) + KK_c} C^{set}(s) + \frac{K_u(\tau_v s+1)}{s(\tau_v s+1) + KK_c} F_i(s) \qquad (7\text{-}3.9)$$

Como un controlador proporcional normalmente resulta en un corrimiento o error de estado estacionario, se obtendrá una expresión para el corrimiento antes de pasar a la sintonización del controlador. Para obtener el corrimiento causado por un cambio sostenido en la referencia, Δc^{set}, y un cambio sostenido en el flujo de entrada, Δf_i, se hace $s = 0$ en la ecuación 7-3.9 para obtener

$$\Delta c = \Delta c^{set} + \frac{K_u}{KK_c} \Delta f_i$$

donde Δc es el cambio de estado estacionario resultante en el nivel en %TO. Entonces el corrimiento es el error de estado estacionario:

$$e = \Delta c^{\text{set}} - \Delta c = -\frac{K_u}{KK_c}\Delta f_i = -\frac{1}{K_v K_c}\Delta f_i \tag{7-3.10}$$

donde se ha sustituido la ecuación 7-3.7. Este resultado muestra que en un proceso integrante no hay corrimiento para cambios en la referencia, sólo para cambios en el flujo. El corrimiento es inversamente proporcional a la ganancia del controlador K_c.

La ecuación característica del lazo de control se obtiene igualando con cero el denominador de la ecuación 7-3.9:

$$\tau_v s^2 + s + KK_c = 0$$

Las raíces de esta ecuación se pueden obtener directamente con la fórmula cuadrática y reexpresarse en la siguiente forma:

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\tau_v KK_c}}{2\tau_v} \tag{7-3.11}$$

Esta expresión indica que las raíces de la ecuación característica son reales y negativas siempre y cuando la ganancia esté limitada a

$$0 < K_c < \frac{A}{4\tau_v K_v K_T} \tag{7-3.12}$$

donde se ha sustituido el valor de K de la ecuación 7-3.7. La expresión dada en la ecuación 7-3.12 representa la ganancia última de un controlador proporcional que generará una respuesta no oscilatoria. Se observa, por la ecuación 7-3.11, que si la ganancia del controlador se incrementa más allá de su valor máximo, la respuesta se vuelve oscilatoria, pero no puede ser inestable, sin importar lo alta que sea la ganancia del controlador, debido a que la parte real de las raíces complejas siempre es negativa (véase la sección 2-3.3).

Si la ganancia del controlador se hace igual a la expresión de la ecuación 7-3.12, la función de transferencia de lazo cerrado tendrá dos raíces iguales a $-1/2\tau_v$. Las constantes de tiempo efectivas del lazo cerrado serán iguales entre sí y al doble de la constante de tiempo de la válvula. Como la mayoría de las válvulas son bastante rápidas, esto significa que un controlador de nivel proporcional se puede sintonizar para dar una respuesta no oscilatoria muy rápida.

Ejemplo 7-3.1 Calcular la ganancia máxima de un controlador de nivel proporcional que resulte en una respuesta no oscilatoria. El transmisor de nivel tiene un rango de 2 a 10 ft por encima del fondo de una columna de destilación de 8 ft de diámetro. El flujo de diseño del producto del fondo es de 500 gpm y la válvula de control en esa línea es lineal y está dimensionada para 100% de sobrecapacidad. La constante de tiempo de la válvula es de 3 s

(0.05 min). Calcular también la constante de tiempo efectiva del lazo cerrado y el corrimiento causado por un cambio sostenido de 100 gpm en el flujo.

Solución Suponiendo una caída de presión constante a través de la válvula, por la sección 5-2.4, la ganancia de la válvula es

$$K_v = \frac{f_{o,\text{máx}}}{100} = \frac{2(500)}{100} = 10.0 \frac{\text{gpm}}{\%\text{CO}}$$

Por la ecuación 7-3.5, la ganancia del transmisor es

$$K_T = \frac{100}{10-2} = 12.5 \frac{\%\text{TO}}{\text{ft}}$$

El área de la torre es

$$A = \frac{\pi(8.0)^2}{4}\left(7.48 \frac{\text{gal}}{\text{ft}^3}\right) = 376 \frac{\text{gal}}{\text{ft}}$$

La ganancia máxima del controlador que producirá una respuesta no oscilatoria es, por la ecuación 7-3.12,

$$K_c = \frac{A}{4\tau_v K_v K_T} = \frac{(376 \text{ gal/ft})}{4(0.05 \text{ min})(10.0 \text{ gpm/\%CO})(12.5 \text{ \%TO/ft})} = 15.0 \frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

Esto representa una banda proporcional de menos de 7%. Las constantes de tiempo efectivas del lazo cerrado, cuando la ganancia se hace igual al valor calculado, son 2(0.05) = 0.10 min, o 6 s cada una, que es muy rápido, considerando el tamaño de la columna.

Finalmente, el corrimiento causado por un cambio en el flujo de 100 gpm es, por la ecuación 7-3.10,

$$e = -\frac{1}{K_v K_c}\Delta f_i = -\frac{(100 \text{ gpm})}{(10.0 \text{ gpm/\%CO})(15.0 \text{ \%CO/\%TO})} = -0.66 \text{ \%TO}$$

Se trata de un cambio imperceptible, de menos del 1% del rango del transmisor.

El ejemplo anterior muestra que un controlador de nivel proporcional se puede sintonizar para una respuesta no oscilatoria a partir de los parámetros de diseño del proceso. Obviamente, esta sintonización es para un control de nivel riguroso, es decir, para variaciones de reducción en el nivel. A continuación se examina el control de nivel promedio.

7-3.3 Control de nivel promedio

El propósito de este controlador es promediar las variaciones repentinas en las perturbaciones de flujo a fin de producir un flujo manipulado que varíe de manera uniforme. Por ejemplo, si el tanque de la figura 7-3.1 fuera un tanque de estabilización en la alimentación de una columna de destilación continua, sería muy deseable que la columna no fuera sometida a variaciones repentinas en el flujo, porque esto podría causar un exceso de líquido y alterar la composición del producto.

Un controlador proporcional es ideal para el control de nivel promedio, pero evidentemente nos gustaría que su ganancia sea tan baja como fuera posible para que permita que el nivel del tanque varíe y absorba las variaciones en las perturbaciones de flujo. ¿Qué tan baja puede ser la ganancia? La ganancia mínima del controlador es aquella que evita que el rango del transmisor de nivel sea sobrepasado en todo momento. Para obtener esta ganancia mínima del controlador, recuérdese la fórmula para un controlador proporcional, ecuación 5-3.4:

$$m(t) = \bar{m} + K_c\, e(t) \tag{7-3.4}$$

Si se hace $\bar{m}$ = 50 %CO, la válvula de control estará abierta exactamente a la mitad cuando el nivel sea igual a la referencia. Si además la referencia se ajusta en 50 %TO, entonces el valor máximo del error es ±50 %TO, debido a que el transmisor sólo puede leer de 0 a 100 %TO. De la ecuación anterior se observa que la ganancia mínima que evita que el controlador de nivel exceda los límites del transmisor es 1.0 %CO/%TO (100 %PB). Si la ganancia fuera menor que la unidad, el nivel tendría que exceder el rango del transmisor para que la válvula estuviera completamente abierta (m = 100%) o cerrada (m = 0%). Para ganancias mayores que la unidad, la válvula puede alcanzar uno de sus límites antes de que el nivel llegue al límite correspondiente en el rango del transmisor, pero entonces el flujo manipulado variaría más de lo necesario. En resumen,

El controlador de nivel promedio ideal es un controlador proporcional con la referencia en 50 %TO, la constante de salida en 50 %CO, y la ganancia fijada en 1.0 %CO/%TO.

Ejemplo 7-3.2 ***Comparación del control riguroso y el control de nivel promedio.***
En la figura 7-3.3 se muestra el esquema de un proceso en el que cada uno de los tres reactores por lotes descarga su contenido en un tanque a una tasa de 70 ft^3/min por un periodo de 4 min, comenzando en momentos diferentes. El objeto del tanque, con un área de 20 ft^2, es uniformar las variaciones súbitas en los flujos de entrada para que el flujo de salida del tanque se mantenga relativamente constante. Esto se hace porque las variaciones súbitas en el flujo de salida alterarían el proceso continuo corriente abajo del tanque.

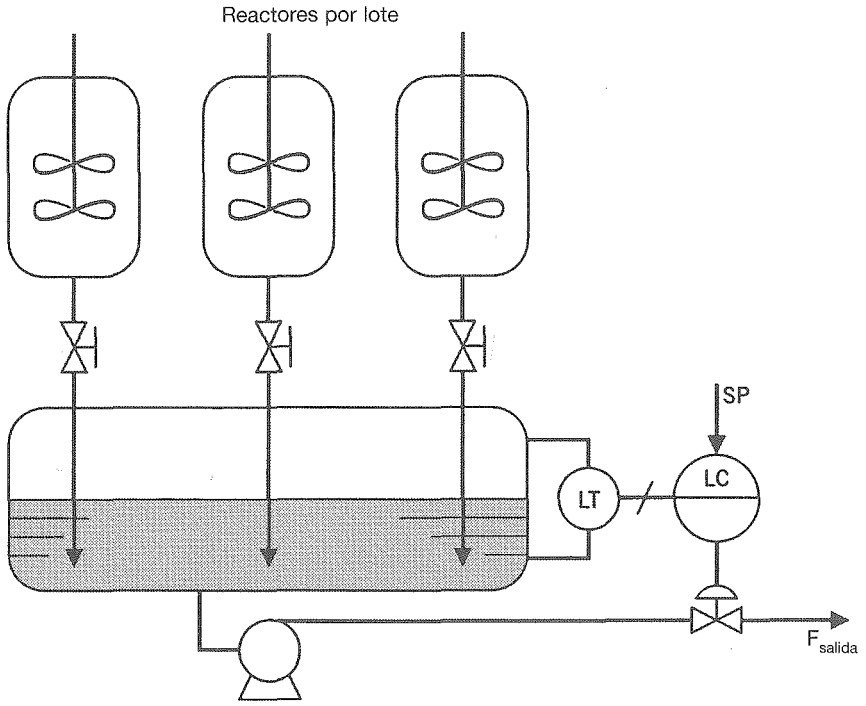


Figura 7-3.3 Control de nivel en el tanque receptor de descargas de los reactores por lotes.

El nivel en el tanque se mide con el sensor-transmisor LT y se regula con el controlador proporcional LC que ajusta la posición de la válvula de control ubicada en el caudal de salida del tanque. La válvula de control es del tipo cerrada en falla y el controlador de nivel es de acción directa.

Comparar, por simulación, la respuesta del nivel y el flujo de salida utilizando un control de nivel riguroso, K_c = 100 %CO/%TO, y un control de nivel promedio, K_c = 1.0 %CO/%TO.

Solución La simulación del tanque se hace por integración numérica de la ecuación 7-3.1 con tres flujos de entrada, un flujo de salida y un área $A = 20$ ft^2. Cada flujo de entrada se simula con una entrada escalón positiva de 70 ft^3/min, seguida de una entrada escalón negativa de la misma magnitud 4 min después. Por tanto, cada par de entradas escalón simula la descarga de un reactor. El transmisor, el controlador proporcional y la válvula de control se simulan como se discute en la sección 13.4.

En la figura 7-3.4 se muestran las respuestas del nivel y el flujo de salida. En el caso mostrado, el primer reactor comienza a descargar en t = 1 min, el segundo en t = 4 min y el tercero en t = 7 min. Así, el flujo total de entrada es cero, 70 ft^3/min y 140 ft^3/min en diferentes periodos de tiempo.

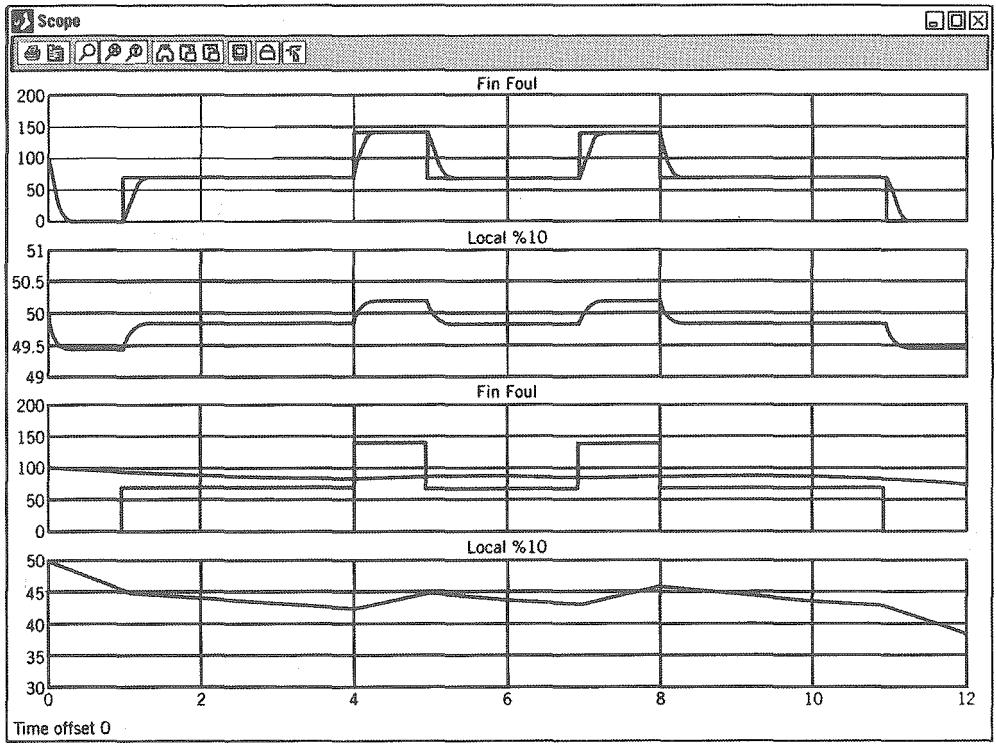


Figura 7-3.4 Respuesta del flujo de salida y el nivel del tanque a la descarga de los reactores por lotes. Las dos gráficas superiores son para un control riguroso del nivel, K_c = 100 %CO/%TO. Las dos gráficas inferiores son para un control de nivel promedio, K_c = 1 %CO/%TO.

Las dos gráficas superiores de la figura 7-3.4 corresponden al control riguroso del nivel, con una ganancia del controlador de 100 %CO/%TO. Como se puede observar, el nivel se mantiene muy cerca de la referencia de 50 %TO, pero el flujo de salida cambia casi tan rápido como el flujo de entrada. Estas variaciones súbitas alterarían el proceso corriente abajo y nulificarían la presencia del tanque. Las dos gráficas inferiores de la figura 7-3.4 muestran las respuestas del flujo de salida y del nivel para el control de nivel promedio, con una ganancia del controlador de 1.0 %CO/%TO. En esta ocasión las variaciones en el flujo de salida son muy uniformes al tiempo que se permite que el nivel cambie de 10 a 20 %TO cuando el contenido del reactor se descarga en el tanque. El control de nivel promedio aprovecha en su totalidad la habilidad del tanque para acumular líquido.

7-3.4 Resumen de sintonización de procesos integrantes

En esta sección se presentó el interesante problema de sintonizar controladores proporcionales para procesos integrantes. Se desarrolló una fórmula, la ecuación 7-3.12, que da la ganancia máxima del controlador que resulta en una respuesta no oscilatoria. También se encontró que la ganancia mínima que evita que la variable controlada exceda los límites del rango de transmisor

es la unidad. Deben emplearse ganancias próximas a la máxima en la sintonización de controladores de nivel rigurosos, mientras se usa una ganancia de 1 para el control de nivel promedio. Un problema al final de este capítulo explora la sintonización de un controlador de nivel proporcional integral (PI).

7-4 SÍNTESIS DE CONTROLADORES POR RETROALIMENTACIÓN

En las secciones anteriores se ha seguido el enfoque de sintonización de un controlador por retroalimentación mediante el ajuste de los parámetros de la estructura de control proporcional integral derivativa (PID). En esta sección se adoptará un enfoque diferente para el diseño del controlador, el de la síntesis del controlador:

Dadas las funciones de transferencia de los componentes de un lazo de control por retroalimentación, se sintetiza el controlador requerido para producir una respuesta de lazo cerrado específica.

Aunque no hay garantía de que el controlador resultante del procedimiento de síntesis se pueda construir en la práctica, se conseguirá un mayor entendimiento de la selección de los diversos modos del controlador y su sintonización.

7-4.1 Desarrollo de la fórmula de síntesis del controlador

Considérese el diagrama de bloques simplificado de la figura 7-4.1 en el que las funciones de transferencia de todos los componentes del lazo, con excepción del controlador, se han agrupado en un único bloque, $G(s)$. Utilizando el álgebra de los diagramas de bloques, la función de transferencia del lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)} \tag{7-4.1}$$

A continuación, se utiliza la expresión anterior para despejar la función de transferencia del controlador:

$$G_c(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{C(s)/R(s)}{1-C(s)/R(s)} \tag{7-4.2}$$

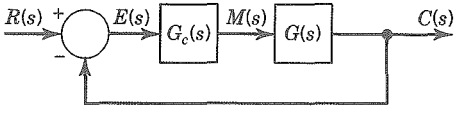


Figura 7-4.1 Diagrama de bloques simplificado para la síntesis del controlador.

Ésta es la *fórmula de síntesis del controlador.* Expresa la función de transferencia del controlador $G_c(s)$ a partir de la función de transferencia del proceso, $G(s)$, y de la respuesta de lazo cerrado especificada, $C(s)/R(s)$. Para ilustrar cómo se usa esta fórmula, considérese la especificación de control perfecto, es decir, $C(s) = R(s)$ o $C(s)/R(s) = 1$. El controlador que resulta es

$$G_c(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{1-1} = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{0} \tag{7-4.3}$$

Esto indica que para forzar a que la salida sea igual a la referencia en todo momento, la ganancia del controlador debe ser infinita. En otras palabras, el control perfecto no se puede alcanzar con el control por retroalimentación. Esto se debe a que cualquier acción correctiva por retroalimentación debe basarse en un error.

La fórmula de síntesis del controlador, ecuación 7-4.2, da lugar a diferentes controladores para diferentes combinaciones de especificaciones de la respuesta de lazo cerrado y de funciones de transferencia del proceso. A continuación se examina cada uno de estos elementos a la vez.

7-4.2 Especificación de la respuesta de lazo cerrado

La respuesta de lazo cerrado más simple que se puede alcanzar es una respuesta de retardo de primer orden. En ausencia de tiempo muerto en el proceso, esta respuesta es la que se muestra en la figura 7-4.2 y resulta de la función de transferencia de lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau_c s + 1} \tag{7-4.4}$$

donde τ_c es la constante de tiempo de la respuesta de lazo cerrado y, al ser ajustable, se convierte en el único *parámetro de sintonización* para el controlador sintetizado; entre más pequeña sea τ_c, más rigurosa será la sintonización del controlador. *Nota:* esta respuesta fue propuesta originalmente por Dahlin (1968), quien definió el parámetro de sintonización como el recíproco de la constante de tiempo de lazo cerrado, $\lambda = 1/\tau_c$. En este libro se usará τ_c.

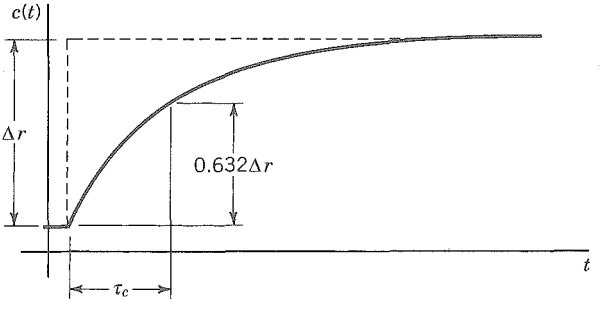


Figura 7-4.2 Especificación de la respuesta de lazo cerrado de primer orden para el controlador sintetizado.

Sustituyendo la ecuación 7-4.4 en la ecuación 7-4.2 se obtiene

$$G_c(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{\dfrac{1}{\tau_c s + 1}}{1 - \dfrac{1}{\tau_c s + 1}} = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{\tau_c s + 1 - 1}$$

o bien,

$$G_c(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{\tau_c s} \tag{7-4.5}$$

Se puede observar que este controlador tiene modo integral, el cual resulta de la especificación de la ganancia unitaria en la función de transferencia de lazo cerrado, ecuación 7-4.4. Con esto se asegura la ausencia de corrimiento.

Aunque podrían especificarse respuestas de lazo cerrado de segundo orden o superior, rara vez es necesario hacerlo. Sin embargo, cuando el proceso contiene tiempo muerto, la respuesta de lazo cerrado también debe contener un término con el tiempo muerto igual al tiempo muerto del proceso. Más adelante se examina brevemente este caso, pero primero se verá cómo la síntesis de controladores puede servir de guía en la selección de los modos del controlador para varias funciones de transferencia del proceso.

7-4.3 Modos del controlador y parámetros de sintonización

La síntesis del controlador permite establecer una relación entre la función de transferencia del proceso y los modos de un controlador PID. Esto se debe a que, para funciones de transferencia simples sin tiempo muerto, el controlador sintetizado se puede expresar en términos de los modos proporcional, integral y derivativo. La síntesis del controlador también proporciona relaciones para los parámetros de sintonización del controlador en términos de la constante de tiempo de lazo cerrado, τ_C, y de los parámetros de la función de transferencia del proceso. A continuación se obtienen estas relaciones sustituyendo en la ecuación 7-4.5 las funciones de transferencia de complejidad creciente.

Respuesta instantánea del proceso

$$G(s) = K$$

Por la ecuación 7-4.5,

$$G_c(s) = \frac{1}{K\tau_c} \cdot \frac{1}{s} \tag{7-4.6}$$

donde K es la ganancia del proceso.

Éste es un *controlador integral puro*, el cual está indicado para procesos muy rápidos, como en la regulación de flujos, mandos de turbinas de vapor y el control de la temperatura de salida de hornos reformadores.

Proceso de primer orden

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Por la ecuación 7-4.5,

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{K} \cdot \frac{1}{\tau_c s} = \frac{\tau}{K \tau_c}\left(1 + \frac{1}{\tau s}\right) \tag{7-4.7}$$

donde τ es la constante de tiempo del proceso y K es la ganancia del proceso.

Éste es un controlador proporcional integral (PI) con parámetros de sintonización

$$K_c = \frac{\tau}{K\tau_c} \qquad \tau_I = \tau \tag{7-4.8}$$

o, en palabras, el tiempo integral se hace igual a la constante de tiempo del proceso y la ganancia proporcional es ajustable o sintonizable. Nótese que si se conoce la constante de tiempo τ del proceso, la sintonización se reduce al ajuste de un solo parámetro, la ganancia del controlador. Esto se debe a que el parámetro de sintonización τ_c sólo afecta a la ganancia del controlador.

Proceso de segundo orden

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Por la ecuación 7-4.5,

$$G_c(s) = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K} \cdot \frac{1}{\tau_c s} = \frac{\tau_1}{K\tau_c}\left(1 + \frac{1}{\tau_1 s}\right)(\tau_2 s + 1) \tag{7-4.9}$$

donde:

τ_1 = la constante de tiempo mayor o dominante del proceso
τ_2 = la constante de tiempo menor del proceso.

La ecuación 7-4.9 concuerda con la función de transferencia del controlador PID real o en serie analizado en la sección 5-3, ignorando el término de filtrado del ruido ($\alpha\tau'_D s + 1$):

$$G_c(s) = K'_c\left(1 + \frac{1}{\tau'_I s}\right)\left(\frac{\tau'_D s + 1}{\alpha\tau'_D s + 1}\right) \tag{7-4.10}$$

Entonces los parámetros de sintonización son

$$K_c' = \frac{\tau_1}{K\tau_c} \qquad \tau_I' = \tau_1 \qquad \tau_D' = \tau_2 \tag{7-4.11}$$

De nueva cuenta, el procedimiento de sintonización se reduce a ajustar la ganancia del proceso con el tiempo integral fijado igual a la constante de tiempo mayor y el tiempo derivativo fijado igual a la constante de tiempo menor. Lo anterior se apoya en la experiencia que indica que el tiempo derivativo siempre debe ser menor que el tiempo integral. En la práctica industrial, los controladores PID generalmente se usan en lazos de control de temperatura para que el modo derivativo pueda compensar el retardo del sensor. Se ha llegado aquí al mismo resultado por medio de la síntesis del controlador.

Es fácil observar que un proceso de tercer orden requeriría un segundo término derivativo en serie con el primero y con su constante de tiempo igualada con la tercera constante de tiempo mayor del proceso, y así sucesivamente. Una razón por la que esta idea no se ha captado en la práctica es porque el controlador sería muy complejo y costoso. Además, los valores de la tercera constante de tiempo y las subsecuentes son muy difíciles de determinar en la práctica. El procedimiento común ha sido aproximar los procesos de orden superior con modelos de menor orden más tiempo muerto. A continuación se sintetiza el controlador para esta aproximación de la función de transferencia del proceso.

Proceso de primer orden más tiempo muerto

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_0 s}}{\tau s + 1}$$

Por la ecuación 7-4.5,

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{Ke^{-t_0 s}} \cdot \frac{1}{\tau_c s} = \frac{\tau}{K\tau_c}\left(1 + \frac{1}{\tau s}\right)e^{t_0 s} \tag{7-4.12}$$

donde t_0 es el tiempo muerto del proceso.

Se observa de inmediato que éste es un *controlador irrealizable* porque requiere el conocimiento del futuro, es decir, un tiempo muerto negativo. Esto es aún más obvio cuando la mejor respuesta de lazo cerrado posible y la respuesta especificada se comparan gráficamente, como en la figura 7-4.3. De esta comparación resulta evidente que la respuesta especificada debe retrasarse por un tiempo muerto del proceso:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{e^{-t_0 s}}{\tau_c s + 1} \tag{7-4.13}$$

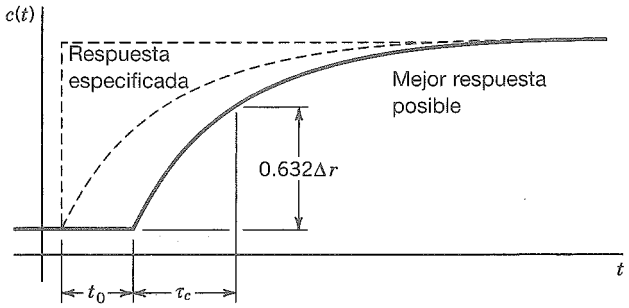


Figura 7-4.3 Especificación de la respuesta de lazo cerrado para sistemas con tiempo muerto t_0.

Esto resulta en la siguiente función de transferencia del controlador sintetizado:

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{K e^{-t_0 s}} \cdot \frac{e^{-t_0 s}}{\tau_c s + 1 - e^{-t_0 s}} = \frac{\tau s + 1}{K} \cdot \frac{1}{\tau_c s + 1 - e^{-t_0 s}} \tag{7-4.14}$$

Aunque este controlador ahora es realizable en principio, su implementación dista mucho de la práctica común. Esto se debe principalmente a que los controladores PID originales se implementaron con componentes analógicos y el término $e^{-t_0 s}$ no podía implementarse en la práctica con dispositivos analógicos. La implementación moderna de los controladores PID en microprocesadores y computadoras digitales hace posible implementar el término del tiempo muerto. Cuando se hace esto, el término se denomina *predictor* o término de *compensación de tiempo muerto.*

Para convertir el algoritmo de la ecuación 7-4.14 a la forma PID estándar, el término exponencial se expande con la aproximación de Padé de primer orden presentada anteriormente, ecuación 6-2.6,

$$e^{-t_0 s} \approx \frac{1 - \frac{t_0}{2} s}{1 + \frac{t_0}{2} s} \tag{7-4.15}$$

Sustituyendo la ecuación 7-4.15 en la ecuación 7-4.14 y simplificando, se obtiene el siguiente controlador sintetizado:

$$G_c(s) = \frac{\tau}{K(\tau_c + t_0)} \left(1 + \frac{1}{\tau s}\right) \left(\frac{1 + \frac{t_0}{2} s}{1 + \tau' s}\right) \tag{7-4.16}$$

donde $\tau' = \dfrac{\tau_c t_0}{2(\tau_c + t_0)}$. Esto es equivalente a un controlador PID real, ecuación 7-4.10, sintonizado como sigue:

$$K_c' = \frac{\tau}{K(\tau_c + t_0)} \qquad \tau_I' = \tau \qquad \tau_D' = \frac{t_0}{2} \tag{7-4.17}$$

Aunque un término del retraso está presente en la función de transferencia del controlador real para prevenir la amplificación del ruido de alta frecuencia, por lo general la constante de tiempo τ' se fija en un décimo de τ_D'. Este valor concuerda con la ecuación 7-4.16 para un control riguroso, ya que cuando $\tau_c \to 0$, $\tau' \to 0$. Nótese que si el tiempo muerto del proceso es pequeño, cuando $t_0 \to 0$, $\tau' \to t_0/2$, y el controlador de la ecuación 7-4.16 se convierte en un controlador PI cuando los términos del numerador y el denominador del último paréntesis se cancelan entre sí.

Resulta interesante notar que el tiempo derivativo de la ecuación 7-4.17 es exactamente el mismo valor que el obtenido con las fórmulas para una razón de asentamiento de un cuarto de Ziegler-Nichols (véase la tabla 7-2.1). Sin embargo, la ganancia proporcional para la razón de asentamiento de un cuarto es 20% mayor que la ganancia de síntesis máxima (obtenida haciendo $\tau_c = 0$), y el tiempo integral de la fórmula de síntesis se basa en la constante de tiempo del modelo, mientras que el tiempo integral de la fórmula para una razón de asentamiento de un cuarto está relacionado con el tiempo muerto del modelo.

Nótese que la relación de sintonización de la ecuación 7-4.17 indica que un incremento en el tiempo muerto resulta en una reducción de la ganancia del controlador para una especificación dada de la constante de tiempo de lazo cerrado. La comparación de las ecuaciones 7-4.8 y 7-4.17 muestra que la presencia de tiempo muerto impone un límite a la ganancia del controlador. En otras palabras, para el proceso de primer orden sin tiempo muerto, ecuación 7-4.8, la ganancia se puede incrementar sin límite para obtener respuestas cada vez más rápidas ($\tau_c \to 0$). Sin embargo, para el proceso con tiempo muerto efectivo, ecuación 7-4.17, se tiene el siguiente límite en la ganancia del controlador:

$$K_{c,\text{máx}} = \lim_{\tau_c \to 0} \frac{\tau}{K(\tau_c + t_0)} = \frac{\tau}{K t_0} \tag{7-4.18}$$

La respuesta de lazo cerrado se desviará de la respuesta de primer orden especificada cuando la ganancia del controlador se incremente. Es decir, incrementar la ganancia del controlador resultará al final en sobrepaso e incluso inestabilidad en la respuesta de lazo cerrado. Esto se debe a que el error de la aproximación por la expansión de Padé de primer orden se incrementa con la rapidez de la respuesta, ya que s se incrementa con la rapidez. (Recuérdese que s, la variable de la transformada de Laplace, tiene unidades del recíproco del tiempo o frecuencia. Por tanto, una rapidez de respuesta, o frecuencia, mayor corresponde a magnitudes mayores de s.)

Proceso integrante

$$G(s) = \frac{K}{s}$$

Por la ecuación 7-4.5,

$$G_c(s) = \frac{s}{K} \cdot \frac{1}{\tau_c s} = \frac{1}{K\tau_c} \tag{7-4.19}$$

Éste es un controlador proporcional con una ganancia ajustable, lo cual concuerda con el análisis en la sección 7-3 sobre la sintonización de controladores para procesos integrantes.

Ahora se han sintetizado controladores para las funciones de transferencia de los procesos más comunes. La síntesis de un controlador para un proceso con respuesta inversa se presenta como ejercicio al final de este capítulo.

Los resultados obtenidos aquí por síntesis de controladores coinciden con los obtenidos por Rivera *et al.* (1986) con la técnica de control con modelo interno (IMC, por sus siglas en inglés). En algunos artículos especializados, las fórmulas de sintonización que se han desarrollado aquí por síntesis se denominan reglas de sintonización IMC.

7-4.4 Resumen de resultados de la síntesis del controlador

En la tabla 7-4.1 se resume la selección de los modos del controlador y de los parámetros de sintonización que resulta del procedimiento de síntesis para la respuesta de Dahlin. El hecho de que la ganancia del controlador sea una función del parámetro de sintonización τ_c es tanto una ventaja como una desventaja de las fórmulas de sintonización derivadas del procedimiento de síntesis. Es una ventaja porque le permite al ingeniero lograr una respuesta especificada mediante el ajuste de un solo parámetro, la ganancia, independientemente de los modos de controlador usados. Sin embargo, la ganancia sintonizable es una desventaja porque las fórmulas no permiten obtener un valor aproximado de ella. Se presentan los siguientes criterios generales para remediar esta situación.

IAE mínima

Para entradas de perturbaciones, con $\tau_c = 0$ se minimiza aproximadamente la IAE cuando t_0/τ está en el rango de 0.1 a 0.5 para controladores PI ($\tau_D = 0$) y de 0.1 a 1.5 para controladores PID. Para cambios en la referencia, las siguientes fórmulas resultan en una IAE aproximadamente mínima cuando la relación t_0/τ está en el rango entre 0.1 y 1.5:

$$\text{Controlador PI } (\tau_D = 0): \qquad \tau_c = \frac{2}{3} t_0 \tag{7-4.20}$$

$$\text{Controlador PID:} \qquad \tau_c = \frac{1}{5} t_0 \tag{7-4.21}$$

Estas fórmulas deben utilizarse con la penúltima entrada de la tabla 7-4.1.

Tabla 7-4.1 Modos del controlador y sintonización para la síntesis de Dahlin

Proceso	Controlador	Parámetros de sintonización
$G(s) = K$	I	$K_c = \dfrac{1}{K\tau_c}$
$G(s) = \dfrac{K}{(\tau s + 1)}$	PI	$K_c = \dfrac{\tau}{K\tau_c}$ $\tau_I = \tau$
$G(s) = \dfrac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$ $\tau_1 > \tau_2$	PID	$K_c = \dfrac{\tau_1}{K\tau_c}$ $\tau_I = \tau_1$ $\tau_D = \tau_2$
$G(c) = \dfrac{Ke^{-t_0 s}}{\tau s + 1}$	PID[a]	$K_c' = \dfrac{\tau}{K(t_0 + \tau_c)}$ $\tau_I' = \tau$ $\tau_D' = \dfrac{t_0}{2}$
$G(s) = \dfrac{K}{s}$	P	$K_c = \dfrac{1}{K\tau_c}$

[a]Las fórmulas PID se aplican tanto para controladores PID como PI ($\tau_D = 0$). El PID se recomienda cuando $t_0 > \tau/4$. La fórmula PID es para el controlador PID real o en serie, ecuación 5-3.19. Para convertir a los parámetros de sintonización para el controlador PID ideal o en paralelo, véase el pie de tabla de la tabla 7-2.2.

5% de sobrepaso

Para un cambio en la referencia, es bastante deseable una respuesta que tenga un sobrepaso de 5% respecto del valor del cambio. Para este tipo de respuesta, Martin *et al.* (1976) recomiendan que τ_c se haga igual al tiempo muerto efectivo del modelo FOPDT. Esto resulta en la siguiente fórmula para la ganancia del controlador que produce un 5% de sobrepaso para los *cambios en la referencia:*

$$K_c = \frac{0.5}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-1} \tag{7-4.22}$$

Al comparar esta fórmula con la de la tabla 7-2.1 se observa que esto es cerca de 40% de la ganancia del PID requerida para una razón de asentamiento de un cuarto (50% de sobrepaso).

Un punto interesante sobre el método de síntesis del controlador es que si los controladores se hubieran diseñado de esta manera desde el principio, la evolución de los modos del contro-

lador habría seguido el patrón I, PI, PID. Se llega a este patrón considerando los modelos del proceso desde el más simple hasta el más complejo. Esto contrasta con la verdadera evolución de los controladores industriales, también del más simple al más complejo: P, PI, PID.

Un elemento de interpretación importante que se puede obtener del procedimiento de síntesis del controlador es que el efecto principal del modo proporcional, cuando se agrega al modo básico integral, es compensar el retraso dominante o más largo, en tanto que el efecto principal del modo derivativo es compensar el segundo retraso más largo o el tiempo muerto efectivo del proceso. El procedimiento de síntesis en su conjunto se basa en la suposición de que la especificación principal de la respuesta de lazo cerrado es la eliminación del corrimiento o error de estado estacionario. Esto es lo que hace del modo integral el modo básico del controlador.

Ejemplo 7-4.1 ***Sintonización por síntesis del intercambiador de calor.*** Determinar los parámetros de sintonización de un controlador PID para el intercambiador de calor del ejemplo 6-2.1 utilizando las fórmulas derivadas por el método de síntesis del controlador. Comparar estos resultados con los obtenidos con las fórmulas de sintonización de la IAE mínima para la entrada de perturbaciones.

Solución Los parámetros FOPDT del intercambiador de calor obtenidos en el ejemplo 7-2.1 con el método de ajuste 3 son

$$K = 0.80\ \%\text{TO}\%\text{CO} \qquad \tau = 33.8\ \text{s} \qquad t_0 = 11.2\ \text{s}$$

Debido a que en este caso el tiempo muerto es mayor que un cuarto de la constante de tiempo, un controlador PID es apropiado. La ganancia proporcional para la IAE mínima ante la entrada de perturbaciones se obtiene con $\tau_c = 0$. Por la penúltima entrada de la tabla 7-4.1, los parámetros de sintonización son

$$K_c' = \frac{33.8}{(0.80)(11.2)} = 3.8\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

$$\tau_I' = \tau = 33.8\ \text{s}\ (0.56\ \text{min})$$

$$\tau_D' = \frac{t_0}{2} = 5.6\ \text{s}\ (0.093\ \text{min})$$

Éstos son los parámetros para el controlador PID real. Para compararlos con los parámetros de la IAE mínima es necesario convertirlos a los parámetros del controlador ideal (véase la tabla 7-2.1):

$$K_c = K_c'\left(1 + \frac{\tau_D'}{\tau_I'}\right) = 3.8\left(1 + \frac{0.093}{0.56}\right) = 4.4\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

$$\tau_I = \tau_I' + \tau_D' = 0.56 + 0.093 = 0.65\ \text{min}$$

$$\tau_D = \frac{\tau_I'\tau_D'}{\tau_I' + \tau_D'} = \frac{0.56 \cdot 0.093}{0.56 + 0.093} = 0.080\ \text{min}$$

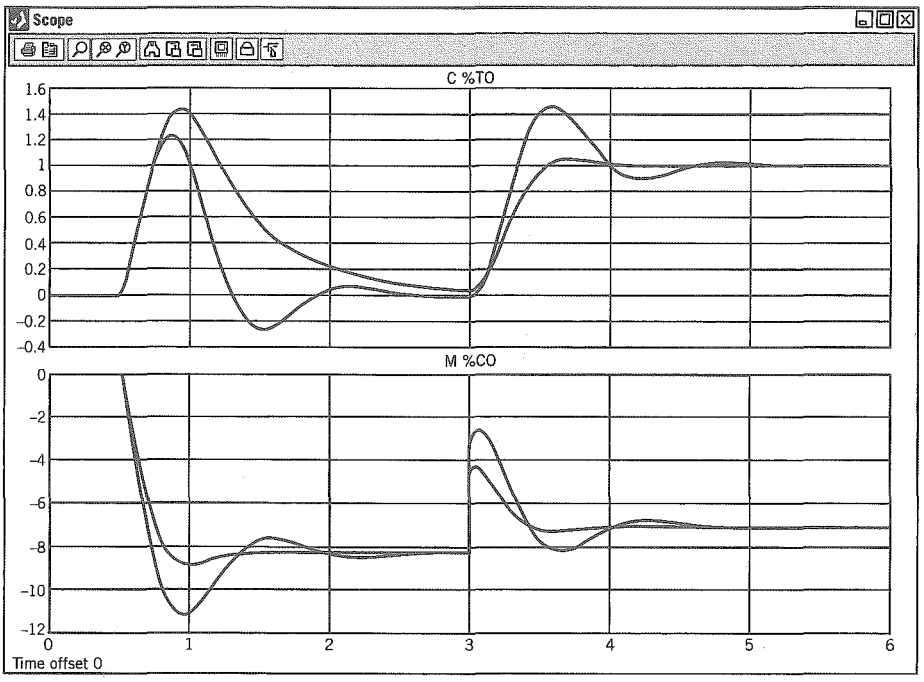


Figura 7-4.4 Comparación de las respuestas del controlador PID con sintonización IAE mínima para la entrada de perturbaciones y con sintonización por síntesis con $\tau_c = 0$ para el intercambiador de calor del ejemplo 7-4.1. La entrada es un incremento de 2 kg/s en el flujo de proceso seguido de un cambio de 1°C en la referencia.

Los parámetros de sintonización para la IAE mínima ante la entrada de perturbaciones se determinaron en el ejemplo 7-2.4: $K_c = 5$ %CO/%TO, $\tau_I = 0.28$ min, $\tau_D = 0.077$ min. Se observa que la ganancia y el tiempo derivativo tienen valores muy próximos, pero el tiempo integral de la fórmula de síntesis es mucho mayor que el de la IAE mínima. En la figura 7-4.4 se comparan las respuestas de las salidas del transmisor y del controlador utilizando estos dos conjuntos de parámetros para el intercambiador de calor. El intercambiador de calor se simula con las funciones de transferencia del ejemplo 6-2.1 y el controlador PID real se modela como se describe en la sección 13-4. La figura 7-4.4 muestra que la sintonización por IAE mínima resulta en un regreso más rápido a la referencia después del cambio en el flujo de proceso que la sintonización por síntesis. Sin embargo, la sintonización por síntesis proporciona una respuesta más uniforme al cambio en la referencia con mucho menos sobrepaso y menos variación en la salida del controlador que la sintonización por IAE mínima.

7-4.5 Reglas de sintonización por control de modelo interno (IMC)

Un método popular para sintonizar controladores por retroalimentación se conoce como las reglas de sintonización IMC. Rivera *et al.* (1986) mostraron cómo se pueden desarrollar reglas de sintonización para controladores por retroalimentación con el *control de modelo interno*

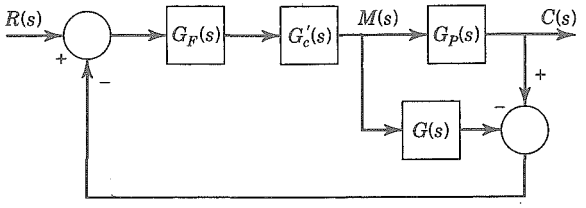


Figura 7-4.5 Diagrama de bloques para el control con modelo interno (IMC).

(IMC, por sus siglas en inglés). En esta sección se examinará el método IMC y se verá que las reglas de sintonización del controlador son básicamente las mismas que se han desarrollado en esta sección con el método de síntesis de lazo cerrado.

Considérese el lazo de retroalimentación IMC de la figura 7-4.5. En este diagrama de bloques, $G(s)$ es la función de transferencia de un *modelo interno* de la verdadera función de transferencia del proceso $G_P(s)$. El controlador por retroalimentación consta de tres bloques: el modelo interno $G(s)$, un filtro ajustable G_F y un compensador dinámico $G_c'(s)$. Por lo general el filtro es de primer orden con una constante de tiempo ajustable, mientras que el modelo interno y el compensador están diseñados para cada tipo de proceso.

Por el diagrama de bloques de la figura 7-4.5, la salida del controlador es

$$M(s) = G_c'(s)G_F(s)[R(s) - C(s) + G(s)M(s)]$$

Despejando $M(s)$ y reordenando términos, se obtiene la función de transferencia del controlador:

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{R(s) - C(s)} = \frac{G_c'(s)G_F(s)}{1 - G_c'(s)G(s)G_F(s)} \tag{7-4.23}$$

Ésta es, en esencia, la fórmula de síntesis del controlador IMC. El filtro en esta fórmula por lo general es de primer orden con ganancia unitaria:

$$G_F(s) = \frac{1}{\tau_c s + 1} \tag{7-4.24}$$

donde τ_c es la constante de tiempo ajustable del filtro. El modelo interno, $G(s)$, se selecciona para corresponder con la verdadera función de transferencia del proceso $G_P(s)$, y el compensador dinámico se selecciona como el recíproco del modelo del proceso. De esta última selección se excluye cualquier término que no sea realizable, como el tiempo muerto del proceso, o que crearía inestabilidad, como un cero positivo. Un requerimiento importante es que la ganancia de $G_c'(s)$ sea el recíproco exacto de la ganancia del modelo del proceso $G(s)$. Por la ecuación 7-4.23 se puede ver que si éste es el caso, dado que la ganancia del filtro también es unitaria, la ganancia de estado estacionario del controlador será infinita, lo que significa que no producirá corrimiento.

Para establecer que la fórmula de síntesis IMC es equivalente a la fórmula de síntesis para la respuesta de lazo cerrado, supóngase por un momento que es posible implementar $G_c'(s) = 1/G(s)$. Sustituyendo, junto con la ecuación 7-4.31, en la ecuación 7-4.30 y simplificando se obtiene

$$G_c(s) = \frac{\dfrac{1}{G(s)} \cdot \dfrac{1}{\tau_c s + 1}}{1 - \dfrac{1}{G(s)} \cdot G(s) \cdot \dfrac{1}{\tau_c s + 1}} = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{\tau_c s} \tag{7-4.25}$$

Esta fórmula es idéntica a la fórmula de síntesis de la ecuación 7-4.5. Lo anterior implica que los modos del controlador por retroalimentación y las fórmulas de sintonización de la tabla 7-4.1, las cuales se obtuvieron con la ecuación 7-4.5, también habrían resultado de la ecuación 7-4.25, con excepción del último conjunto de fórmulas, que son para un proceso con tiempo muerto. Para este caso, el compensador dinámico IMC excluye el tiempo muerto:

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_0 s}}{\tau s + 1} \qquad G_c'(s) = \frac{\tau s + 1}{K}$$

Se sustituyen estas expresiones y la ecuación 7-4.24 en la ecuación 7-4.23 y se simplifica para obtener

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{K} \cdot \frac{1}{\tau_c s + 1 - e^{-t_0 s}} \tag{7-4.26}$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación 7-4.14 que se usó para obtener el penúltimo conjunto de fórmulas de sintonización de la tabla 7-4.1.

Se ha demostrado que los modos del controlador y las fórmulas de sintonización de la tabla 7-4.1 también son las populares reglas de sintonización IMC.

7-5 SUGERENCIAS PARA SINTONIZAR CONTROLADORES POR RETROALIMENTACIÓN

Cada uno de los métodos de sintonización presentados en las secciones anteriores requiere llevar a cabo alguna forma de prueba dinámica del proceso, sea para encontrar la ganancia última y el periodo último del lazo o los parámetros de un modelo simple del proceso. Desafortunadamente, en muchos procesos no se pueden realizar pruebas formales debido a consideraciones de seguridad, calidad del producto u otras. Las sugerencias presentadas en esta sección pretenden facilitar la sintonización cuando no se puedan realizar pruebas formales. Se examina asimismo una importante consideración que con frecuencia se pasa por alto cuando se sintoniza un controlador por retroalimentación: la correlación entre el control riguroso de la variable controlada y el movimiento excesivo de la variable manipulada.

La primera sugerencia es tener presente que el desempeño de un controlador por retroalimentación es relativamente insensible a los valores de los parámetros de sintonización, hecho ya señalado en este capítulo. En la jerga del control moderno se dice que el control por retroalimentación es una técnica *robusta*. Valores aproximados de los parámetros de sintonización pueden producir una respuesta "bastante buena", si no es que "óptima". De hecho, como ya se analizó, cuando se sintonizan controladores lineales para procesos no lineales, no existe un conjunto óptimo de parámetros de sintonización. Además, es posible tener un desfase de 40% o 50% en los tiempos integral y derivativo y aún así obtener una buena respuesta mediante el ajuste de la ganancia del controlador.

Con base en esta sugerencia, el procedimiento de sintonización propuesto para un controlador es el siguiente:

1. Obtener valores aproximados para los tiempos integral y derivativo.
2. Ajustar la ganancia proporcional para obtener una respuesta aceptable.

7-5.1 Estimación de los tiempos integral y derivativo

Las fórmulas de sintonización presentadas en este capítulo se pueden utilizar como guías para estimar los tiempos integral y derivativo. En general es posible estimar el periodo último o la constante de tiempo del proceso en el lazo sin realizar una prueba formal del proceso. Por otra parte, el tiempo muerto del proceso es más difícil de estimar. Los tiempos integral y derivativo se pueden estimar a partir de los parámetros estimados del proceso como sigue:

- Las fórmulas de la tabla 7-1.1 se pueden usar para estimar los tiempos integral y derivativo a partir del periodo de oscilación del lazo. El periodo de oscilación del lazo se puede estimar observando su respuesta de lazo cerrado cuando el controlador es sólo proporcional, para lo cual se desintonizan o desactivan los modos integral y derivativo. Incluso si las oscilaciones no son sostenidas, el periodo entre dos picos suele ser entre 40% y 60% mayor que el periodo último, por lo que el periodo último se puede estimar como dos tercios del periodo de oscilaciones que decaen.
- Si la constante de tiempo dominante del proceso se puede estimar a partir de consideraciones físicas, el tiempo integral se ajusta en este valor (tabla 7-4.1) y, con base en las fórmulas para la razón de asentamiento de un cuarto (tabla 7-1.1 o 7-2.1), el tiempo derivativo se ajusta en un cuarto del tiempo integral. Sin embargo, si se sospecha que el tiempo muerto es mucho menor que la constante de tiempo, deberá usarse un controlador PI (tiempo derivativo igual a cero).
- Si se puede estimar el tiempo muerto del proceso, el tiempo derivativo se puede ajustar en la mitad del tiempo muerto (tabla 7-2.1 o 7-4.1). Este método automáticamente resulta en un controlador PI si el tiempo muerto es despreciable.

Los sistemas de control actuales proporcionan tendencias convenientes del tiempo de cualquier variable medida del proceso. La escala del tiempo en estos gráficos se puede ajustar desde algunos cuantos minutos hasta varias horas, y la escala de la variable de proceso también se puede ampliar tanto como sea necesario para obtener una mayor precisión. Estas gráficas de tendencia son invaluables para estimar los parámetros del proceso que se necesitan.

En la figura 7-5.1 se muestra la gráfica de respuesta de la temperatura de salida del serpentín de un horno que está siendo controlada mediante la manipulación del flujo a través del serpentín, el cual también se muestra en la gráfica. Esta gráfica proviene de un horno de proceso real. Si se supone que el controlador es proporcional, se observa que el periodo de oscilación es de unos 15 min. Puesto que las oscilaciones son sostenidas, se puede suponer que éste es el periodo último y el tiempo integral se puede estimar como 7.5 min y el tiempo derivativo como 1.9 min, utilizando las fórmulas de la tabla 7-1.1.

La constante de tiempo del proceso algunas veces se puede estimar a partir de modelos simples basados en principios fundamentales, como los presentados en los capítulos 3 y 4. Por ejemplo, a partir de los modelos para tanques de mezclado presentados en las secciones 3-3 y 3-7, se puede estimar que la constante de tiempo de un tanque es aproximadamente igual a su tiempo de residencia (volumen/flujo de producto). En el capítulo 3 se derivaron fórmulas similares para constantes de tiempo de tanques con gas, reactores, etcétera.

También es posible estimar la constante de tiempo y el tiempo muerto del proceso a partir de la respuesta de lazo cerrado, pero esto requiere un análisis cuidadoso. Utilizando los conceptos de la sección 2-5 se puede establecer que la respuesta de varios retardos en serie a una onda sinusoidal tipo rampa lenta es al final una rampa o una onda sinusoidal que se retrasa de la rampa de entrada por la suma de las constantes de tiempo más el tiempo muerto. Por ejemplo, considérese la respuesta de la temperatura y del flujo de salida del serpentín en la figura 7-5.1. En un inicio, la respuesta puede parecer errónea porque el flujo y la temperatura aumentan y bajan simultáneamente. Los principios fundamentales indican que cuando el flujo a través del serpentín aumenta, la temperatura de salida debe bajar porque hay más fluido que calentar con la misma cantidad de energía. La razón por la que aumentan y bajan simultáneamente es que la acción inmediata del controlador proporcional hace que el flujo aumente o disminuya con la temperatura (controlador de acción directa). Si se ve con atención, se observa que la temperatura en realidad baja cuando el fluido de proceso aumenta, y viceversa, ¡pero no de inmediato! A causa de la dinámica del proceso, hay un retraso entre el cambio en el flujo y el cambio correspondiente en la temperatura. Este retraso está indicado en dicha figura y parece ser de 8 min. La pregunta es: ¿cómo se va a modelar el serpentín?

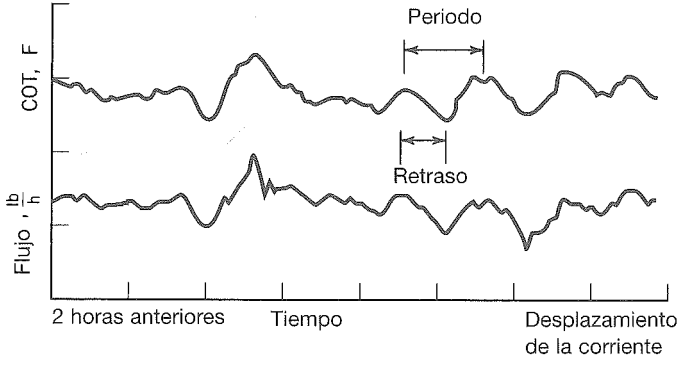


Figura 7-5.1 Tendencia de la temperatura de salida del serpentín del horno (COT) y el flujo manipulado a través del serpentín.

- Si el serpentín se modela como un sistema de mezclado perfecto, el retraso sería igual a su constante de tiempo, como en la sección 3-3.
- Si el serpentín se modela como un sistema de flujo pistón, todo el retraso sería causado por tiempo muerto puro, como en la sección 3-4.

El primero de estos modelos resulta, por la tabla 7-4.1, en un controlador PI con tiempo integral de 8 min. Este valor concuerda con la estimación anterior basada en el periodo de oscilación. El segundo modelo resulta, por la tabla 7-2.1, en un controlador PID con tiempo integral de $2 \times 8 = 16$ min, y un tiempo derivativo de $8/2 = 4$ min. Estas estimaciones son cerca del doble de las obtenidas a partir del periodo de oscilación.

Como cualquier sistema real, el serpentín no está ni perfectamente mezclado ni es de flujo pistón sino una combinación de ambos, probablemente más cercano a este último. Esto significa que el retraso de 8 min no es más que la suma de la constante de tiempo y el tiempo muerto. De los dos extremos se llega a estimaciones del tiempo integral que van de 8 a 16 min y del tiempo derivativo que van de 0 a 4 min. Podría usarse un tiempo integral de 12 min y un tiempo derivativo de 3 min con la confianza de que estos valores son suficientemente buenos para proceder con el ajuste de la ganancia proporcional para obtener la respuesta deseada.

7-5.2 Ajuste de la ganancia proporcional

Uno de los problemas con muchos métodos de sintonización ha sido su rigidez; proporcionan un conjunto de fórmulas de sintonización que no dejan abierta la posibilidad de ajustar ninguno de los parámetros. En contraste, el método de síntesis del controlador y las reglas de sintonización IMC de la sección 7-4 proporcionan fórmulas con ganancia ajustable.

Cuando se ajusta la ganancia proporcional, es necesario tener presente que un control muy riguroso de la variable del proceso requiere por lo general cambios grandes en la variable manipulada. Esto no es deseable, porque los cambios en la variable manipulada causan variaciones en el proceso y perturban otros lazos de control. Por ejemplo, una gran reducción en

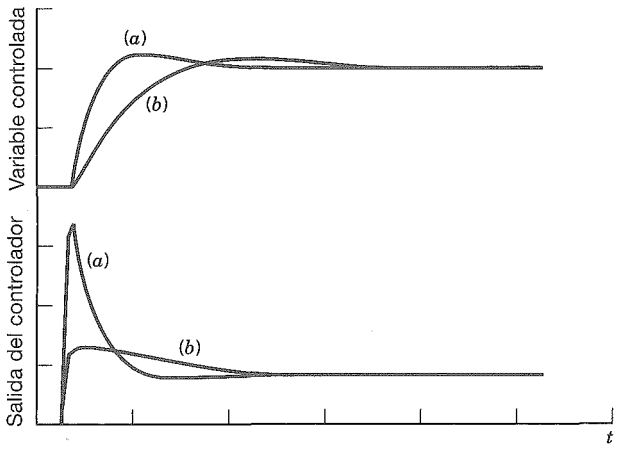


Figura 7-5.2 Comparación del ajuste riguroso (*a*) y el razonable (*b*) de la ganancia del controlador para cambios en la referencia.

el flujo de combustible de un horno podría causar que la llama se apague, y un gran incremento en el flujo de reciclado de una columna de destilación podría causar un exceso de líquido en la columna. En la figura 7-5.2 se muestran las respuestas de las variables controlada y manipulada para dos valores de la ganancia del controlador. La ganancia mayor produce un control riguroso, pero también una variación mucho más alta del proceso, debido al cambio inicial más grande en la salida del controlador. El punto es: al ajustar la ganancia, debe considerarse tanto la rigurosidad del control como la variabilidad de la variable manipulada.

Después de seleccionar los tiempos integral y derivativo, la sintonización se reduce al ajuste de un solo parámetro, la ganancia. Por lo tanto, no se requiere ningún procedimiento especial para ajustar la ganancia.

7.6 RESUMEN

En este capítulo se han presentado dos métodos para caracterizar la respuesta dinámica del proceso y para sintonizar controladores por retroalimentación. También se ha examinado la sintonización de controladores por retroalimentación para procesos integrantes. El método de síntesis del controlador ofreció un acercamiento a las funciones de los modos proporcional, integral y derivativo, así como un conjunto simple de fórmulas de sintonización. Finalmente, el capítulo concluyó con unas recomendaciones prácticas para sintonizar controladores por retroalimentación.

REFERENCIAS

1. Chiu, K. C., A. B. Corripio y C. L. Smith, "Digital Control Algorithms, Part III: Tuning PI and PID Controllers", en *Instruments and Control Systems*, Vol. 46, pp. 41-43.
2. Corripio, A. B., *Tuning of Industrial Control Systems,* Research Triangle Park, NC, Instrument Society of America, Unidad 6.
3. Dahlin, E. B., "Designing and Tuning Digital Controllers", en *Instruments and Control Systems,* Vol. 41, No. 6, p. 77.
4. López, A. M., P. W. Murrill y C. L. Smith, "Controller Tuning Relationships Based on Integral Performance Criteria", en *Instrumentation Technology*, Vol. 14, No. 11, p. 57.
5. Martin, Jacob, Jr., Tesis doctoral, Departamento de Ingeniería Química, Louisiana State University, Baton Rouge.
6. Martin, Jacob, Jr., A. B. Corripio y C. L. Smith, "How to Select Controller Modes and Tuning Parameters from Simple Process Models", en *ISA Transactions*, Vol. 15, No. 4, pp. 314-319.
7. Moore, C. F., C. L. Smith, y P. W. Murrill, "Simplifying Digital Control Dynamics for Controller Tuning and Hardware Lag Effects", en *Instrument Practice*, Vol. 23, No. 1, p. 45.
8. Murrill, Paul W., *Fundamentals of Process Control Theory.* 3a ed., Research Triangle Park, NC: Instrument Society of America.

9. Rivera, D. E., M. Morari y S. Skogestad, "Internal Model Control, 4. PID Controller Design", *I&EC Process Design and Development*, Vol. 25, p. 252.
10. Rovira, A. A., Tesis doctoral, Departamento de Ingeniería Química, Louisiana State University, Baton Rouge.
11. Smith, Cecil L., *Digital Computer Process Control,* Scranton, PA: Intext Educational Publishers.
12. Ziegler, J. G. y N. B. Nichols, "Optimum Setting for Automatic Controllers", *Transactions ASME*, Vol. 64, p. 759.

PROBLEMAS

7-1. Un lazo de control por retroalimentación está representado por el diagrama de bloques de la figura 7-2.2. La función de transferencia del proceso está dada por

$$G_1(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$$

donde la ganancia del proceso es $K = 2.5$ %TO/%CO y las constantes de tiempo son

$$\tau_1 = 5 \text{ min} \qquad \tau_2 = 0.8 \text{ min} \qquad \tau_3 = 0.2 \text{ min}$$

Determinar los parámetros de sintonización del controlador para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto por el método de ganancia última para

a) Un controlador proporcional (P).
b) Un controlador proporcional integral (PI).
c) Un controlador proporcional integral derivativo (PID).

7-2. Usando los parámetros de sintonización determinados para el lazo del problema 7-1,

a) Encontrar las raíces de la ecuación característica, identificar el par de raíces dominantes, y calcular la razón de amortiguamiento y la razón de asentamiento de la respuesta.
b) Simular el lazo de control y graficar las respuestas de las variables manipulada y controlada a un cambio escalón en la referencia. (Véase la simulación del lazo en la sección 13-2.)

7-3. Dado el lazo de control por retroalimentación de la figura 7-2.2 y la siguiente función de transferencia del proceso

$$G_1(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

donde la ganancia del proceso, las constantes de tiempo y el tiempo muerto son: K = 1.25 %TO/%CO, $\tau_1 = 1$ min, $\tau_2 = 0.6$ min, $\tau_o = 0.20$ min; usar la figura 7-2.8 para estimar los parámetros del modelo de primer orden más tiempo muerto (FOPDT). Emplear después estos parámetros para comparar los parámetros de sintonización para un controlador proporcional integral (PI) utilizando las siguientes fórmulas:

a) Respuesta con razón de asentamiento de un cuarto.
b) IAE mínima para entrada de perturbaciones.
c) IAE mínima para cambios en la referencia.
d) Síntesis del controlador para 5% de sobrepaso a un cambio en la referencia.

7-4. Resolver el problema 7-3 para un controlador proporcional integral derivativo (PID).

7-5. Resolver el problema 7-3 para un controlador por muestreo de datos (computadora) con tiempo de muestreo $T = 0.10$ min.

7-6. Para el lazo de control del problema 7-3, deducir las fórmulas de sintonización para un controlador PID real usando el procedimiento de síntesis del controlador. Considerar dos casos:

a) Sin tiempo muerto, $t_0 = 0$.
b) Para el tiempo muerto dado en el problema.

Verificar las respuestas con la información de la tabla 7-4.1.

7-7. Preparar una simulación del lazo de control del problema 7-3 para obtener las respuestas a un cambio escalón en la referencia. Utilizar los parámetros de sintonización del controlador determinados en el problema 7-3. ¿Puede el lector mejorar el desempeño del control con un ajuste por prueba y error de los parámetros de sintonización? Hacer que el programa imprima la integral del valor absoluto del error, IAE, y usarla para medir el desempeño del control. *Nota:* para un ejemplo de la simulación de un lazo de control por retroalimentación utilizando funciones de transferencia, véase la sección 13-2.

7-8. Con los resultados del problema 6-11, calcular los parámetros de sintonización con razón de asentamiento de un cuarto de un controlador PI para la composición en el tanque de mezclado. *Nota:* la simulación de este lazo de control es el tema del problema 13-11.

7-9. Con los resultados del problema 6-12, calcular los parámetros de sintonización con razón de asentamiento de un cuarto de un controlador PID para el controlador de temperatura del reactor. *Nota:* la simulación de este lazo de control es el tema del problema 13-21.

7-10. Con los resultados del problema 6-14, calcular los parámetros de sintonización con razón de asentamiento de un cuarto de un controlador PI para la composición del tercer tanque.

7-11. Para el controlador de composición de los tres reactores isotérmicos en serie del problema 6-17, calcular los parámetros de sintonización con razón de asentamiento de un cuarto de un controlador PI. Usando estos parámetros, encontrar las raíces de la ecuación característica, identificar la raíz dominante, y estimar la razón de amortiguamiento y la razón de asentamiento real de la respuesta. *Nota:* la simulación de este proceso es el tema del problema 13-23.

7-12. Resolver el problema 7-11 para el controlador de presión de succión del compresor del problema 6-18.

7-13. Resolver el problema 7-11 para el controlador de temperatura del tanque de enfriamiento con agitación del problema 6-19.

7-14. Resolver el problema 7-11 para el control de composición de los reactores en serie del problema 6-22.

7-15. Considérese el filtro de vacío de la figura P7-1. Este proceso es parte de una planta de tratamiento de desechos. El lodo entra al filtro con una concentración aproximada de 5% de sólidos. El lodo se deshidrata en el filtro de vacío a una concentración aproximada de 25% de sólidos. La filtrabilidad del lodo en el filtro rotatorio depende del pH del lodo que entra al filtro. Una manera de controlar la humedad del lodo que va al incinerador consiste en agregarle químicos (cloruro férrico) para mantener el pH necesario. En la figura P7-1 se ilustra un esquema de control propuesto. El transmisor de humedad tiene un rango de 55% a 95%.

En una prueba escalón de la salida del controlador (MIC70) de +12.5 %CO se obtuvieron los datos siguientes:

Tiempo, min	Humedad, %	Tiempo, min	Humedad, %
0	75.0	10.5	70.9
1	75.0	11.5	70.3
1.5	75.0	13.5	69.3
2.5	75.0	15.5	68.6
3.5	74.9	17.5	68.0
4.5	74.6	19.5	67.6
5.5	74.3	21.5	67.4
6.5	73.6	25.5	67.1
7.5	73.0	29.5	67.0
8.5	72.3	33.5	67.0
9.5	71.6		

Cuando la humedad de entrada al filtro se cambió en 0.5%, se obtuvieron los datos siguientes:

Tiempo, min	Humedad, %	Tiempo, min	Humedad, %
0	75	11	75.9
1	75	12	76.1
2	75	13	76.2
3	75	14	76.3
4	75.0	15	76.4
5	75.0	17	76.6
6	75.1	19	76.7
7	75.3	21	76.8
8	75.4	25	76.9
9	75.6	29	77.0
10	75.7	33	77.0

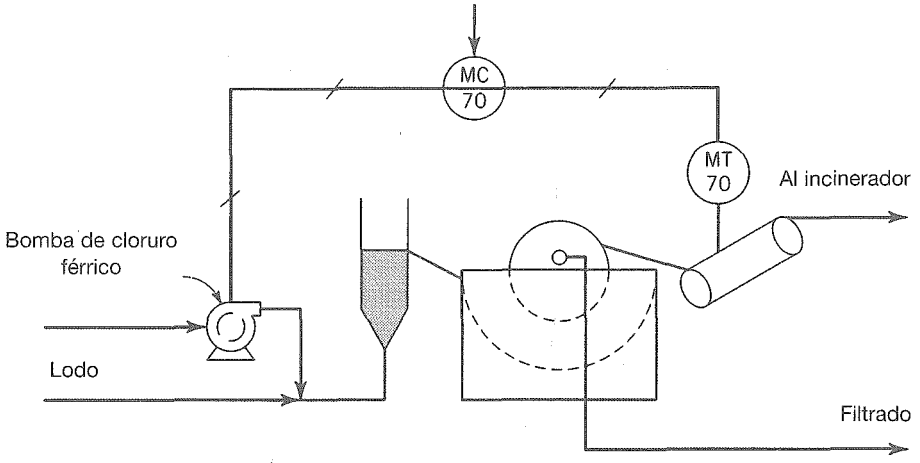


Figura P7-1 Filtro de vacío para el problema 7-15.

a) Trazar un diagrama de bloques para el lazo de control de humedad. Incluir las posibles perturbaciones.
b) Usar el método de ajuste 3 para estimar los parámetros de los modelos de primer orden más tiempo muerto de las dos funciones de transferencia. Trazar de nuevo el diagrama de bloques mostrando la función de transferencia de cada bloque.
c) Ofrecer una idea de la capacidad de control de la humedad de salida. ¿Cuál es la acción correcta del controlador?
d) Obtener la ganancia de un controlador proporcional para respuesta de IAE mínima. Calcular el corrimiento para un cambio de 1% en la humedad de entrada.
e) Sintonizar un controlador PI para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto.

7-16. Considérese el absorbedor de la figura P7-2. El gas que entra al absorbedor tiene una composición molar de 90% de aire y 10% de amoniaco (NH_3). Antes de que este gas se descargue en la atmósfera, es necesario remover la mayor parte del amoniaco que contiene. Esto se llevará a cabo absorbiéndolo con agua. La concentración de amoniaco en el caudal de gas de salida no debe exceder 200 ppm. El absorbedor se ha diseñado de tal modo que la concentración de salida de NH_3 en el vapor es de 50 ppm. A partir de simulaciones dinámicas del absorbedor, se obtuvieron los siguientes datos:

a) Diseñar un lazo de control para mantener la concentración de salida del NH_3 en una referencia de 50 ppm. Trazar el diagrama de instrumentación para el lazo. Existen algunos instrumentos en una bodega que se pueden utilizar para este propósito. Hay un analizador-transmisor calibrado para el rango 0-200 ppm. Este instrumento tiene un retardo de tiempo despreciable. También hay una válvula de control que, cuando está completamente abierta y para la caída de presión de 10 psi que está disponible, dejará

Respuesta a un cambio escalón en el flujo de agua al absorbedor

Tiempo, s	Flujo de agua, gpm	Concentración de salida de NH_3
0	250	50.00
0	200	50.00
20	200	50.00
30	200	50.12
40	200	50.30
50	200	50.60
60	200	50.77
70	200	50.90
80	200	51.05
90	200	51.20
100	200	51.26
110	200	51.35
120	200	51.48
130	200	51.55
140	200	51.63
160	200	51.76
180	200	51.77
250	200	51.77

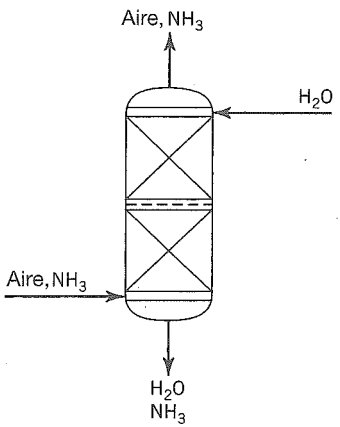


Figura P7-2 Absorbedor para el problema 7-16.

pasar 500 gpm. La constante de tiempo del actuador de la válvula es despreciable. Quizá se requiera más instrumentación para completar el diseño, así es que adelante, use lo que necesite. Especificar la posición en falla de la válvula de control y la acción apropiada del controlador.

b) Trazar un diagrama de bloques para el lazo cerrado y obtener la función de transferencia de cada bloque. Aproximar la respuesta del absorbedor con un modelo de primer orden más tiempo muerto utilizando el método de ajuste 3.
c) Sintonizar un controlador sólo proporcional para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto y calcular el corrimiento cuando la referencia se cambia a 60 ppm.
d) Repetir el inciso c) utilizando un controlador PID.

7-17. Considérese el horno que se muestra en la figura P7-3, el cual se usa para calentar el aire de suministro a un regenerador de catalizador. El transmisor de temperatura está calibrado para el rango 300-500°F. Se obtuvieron los siguientes datos de respuesta para un cambio escalón de +5% en la salida del controlador:

Tiempo, min	T(t), °F	Tiempo, min	T(t), °F
0	425	5.5	436.6
0.5	425	6.0	437.6
1.0	425	7.0	439.4
2.0	425	8.0	440.7
2.5	426.4	9.0	441.7
3.0	428.5	10.0	442.5
3.5	430.6	11.0	443.0
4.0	432.4	12.0	443.5
4.5	434.0	14.0	444.1
5.0	435.3	12.0	445.0

a) Trazar el diagrama de bloques completo especificando las unidades de cada señal que llega y sale de cada bloque. Identificar cada bloque y especificar la posición de falla segura de la válvula y la acción correcta del controlador.
b) Ajustar los datos del proceso mediante un modelo de primer orden más tiempo muerto utilizando el método de ajuste 3. Trazar de nuevo el diagrama de bloques del proceso indicando la función de transferencia para cada bloque.
c) Sintonizar un controlador PID para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto.
d) Sintonizar un controlador PID mediante el método de síntesis del controlador para 5% de sobrepaso.

7-18. Calcular los parámetros de sintonización para un controlador de temperatura PID sintonizado para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto para el calentador de aceite del problema 6-24. *Nota:* la simulación de este proceso es el tema del problema 13-24.

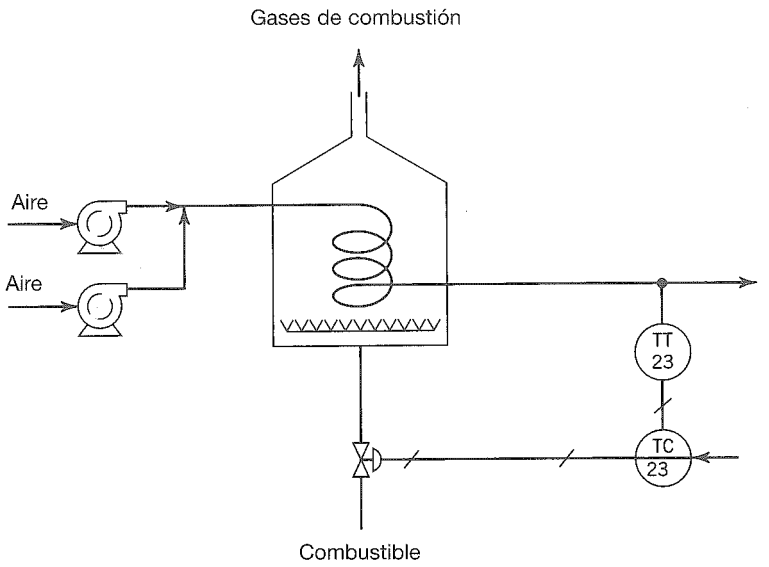


Figura P7-3 Horno para el problema 7-17.

7-19. Considérese el sistema del reactor químico de la figura P7-4. Dentro de los tubos del reactor tiene lugar una reacción catalítica exotérmica. El reactor se enfría haciendo circular aceite por el forro del reactor. Cuando el aceite sale del reactor llega a una caldera donde se enfría produciendo vapor de baja presión. La temperatura en el reactor se controla manipulando el flujo que se desvía alrededor de la caldera. Se conocen las siguientes condiciones del proceso:

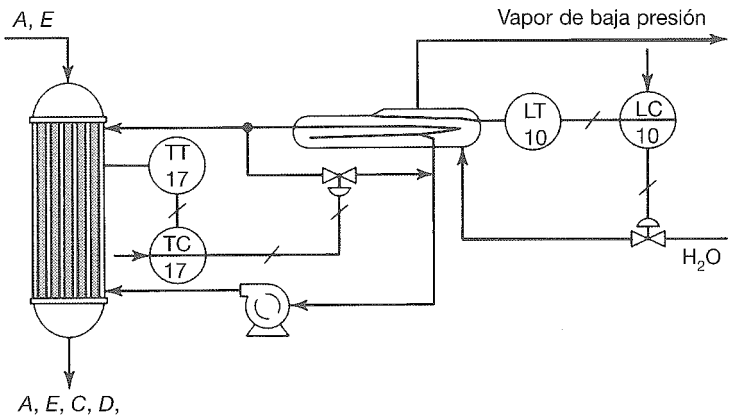


Figura P7-4 Reactor catalítico para el problema 7-19.

Temperatura de diseño del reactor en el punto de medición: 275°F
Flujo de aceite que la bomba puede entregar: 400 gpm (constantes)
Caída de presión de la válvula de control en el flujo de diseño: 10 psi
Flujo en condiciones de diseño: 200 gpm
Rango del transmisor de temperatura: 150-350°F
Densidad del aceite: 55 lb/ft^3
Prueba de lazo abierto: un cambio de 5% en la posición de la válvula resulta en un cambio de la temperatura de 4.4°F después de un tiempo muy largo.
Prueba de lazo cerrado: con una ganancia del controlador de 16 %CO/%TO, la temperatura oscila con amplitud constante y periodo de 24 min.

a) Dimensionar la válvula de control de temperatura para 100% de sobrecapacidad. Especificar la posición de falla segura de la válvula de control y la acción apropiada del controlador.
b) Si la caída de presión a través de los tubos de la caldera varía con el cuadrado del flujo y la válvula es isoporcentual con parámetro de rangeabilidad de 50, ¿cuál es la posición de la válvula en las condiciones de diseño? ¿Cuál es el flujo a través de la válvula cuando está completamente abierta?
c) Trazar un diagrama de bloques para el lazo de control de temperatura. ¿Cuál sería su recomendación para la posición de falla segura de la válvula y la acción del controlador?
d) Calcular la ganancia del proceso en las condiciones de diseño, incluyendo la válvula de control y el transmisor de temperatura.

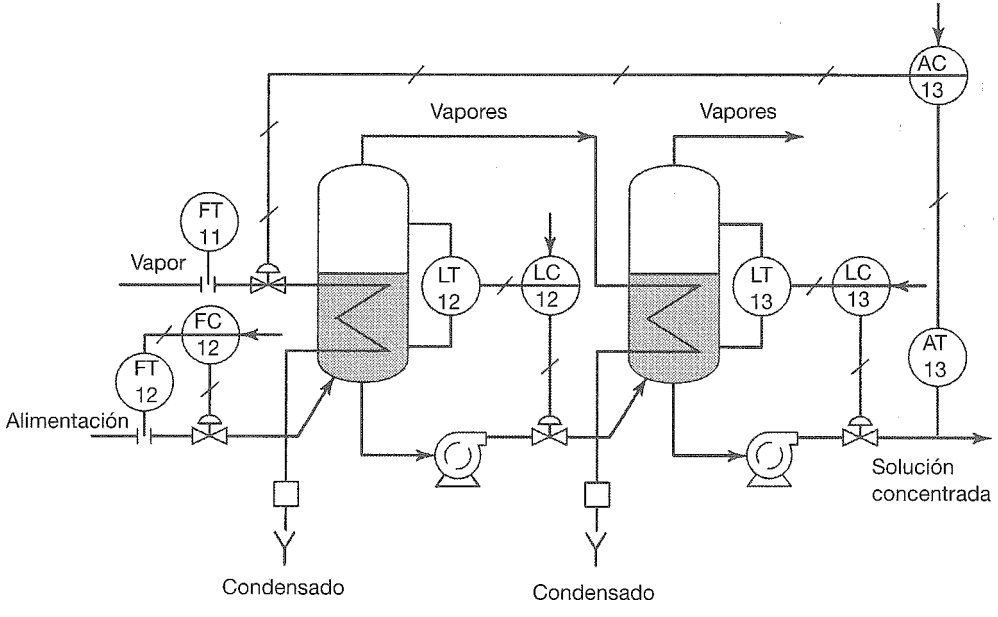


Figura P7-5 Evaporador de doble efecto para el problema 7-20.

e) Calcular los parámetros de sintonización para un controlador PID para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto. Presentarlos como banda proporcional, repeticiones/minuto y minutos.
f) Sintonizar un controlador proporcional para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto y calcular el corrimiento para un cambio escalón en la referencia de –10°F.

7-20. Considérese el sistema de control típico para el evaporador de doble efecto que se muestra en la figura P7-5. Los evaporadores se caracterizan por tener dinámicas lentas. Manipulando el vapor de la primera etapa se controla la composición del producto que sale en la última etapa. La tasa de alimentación y la concentración de diseño son 50 000 lb/h y 5.0% en peso, respectivamente. En la figura P7-6 se muestra la respuesta escalón de lazo abierto de la composición del producto para un cambio de 0.75% en peso de la composición de la solución de entrada en la primera etapa. En la figura P7-7 se muestra la respuesta de la composición del producto para un cambio de 2.5% en la salida del controlador. El sensor-transmisor de composición tiene un rango de 10% a 35% en peso.

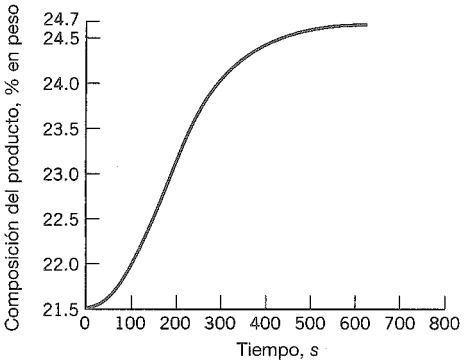


Figura P7-6 Respuesta a un cambio escalón en la composición de entrada del problema 7-20.

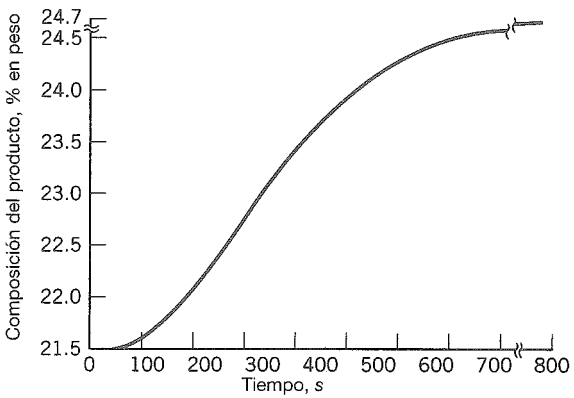


Figura P7-7 Respuesta a un cambio escalón en la salida del controlador para el problema 7-20.

a) Trazar un diagrama de bloques completo con la función de transferencia de cada bloque. ¿Cuál debería ser la posición de falla segura de la válvula de control? ¿Cuál es la acción apropiada del controlador?
b) Sintonizar un controlador proporcional integral para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto.
c) Sintonizar un controlador PI para 5% de sobrepaso utilizando el método de síntesis del controlador.

7-21. La temperatura en un reactor químico exotérmico de tanque con agitación continua se controla manipulando el flujo de agua de enfriamiento a través del serpentín, como se muestra en la figura P7-8. Las condiciones de diseño del proceso son las siguientes:

Temperatura del reactor: 210°F
Flujo del agua de enfriamiento: 350 gal/min
Caída de presión a través del serpentín para el flujo de diseño: 10 psi
Rango del transmisor de temperatura: 190 a 230°F
Asiento de la válvula de control: isoporcentual con $\alpha = 50$
Prueba de lazo abierto: un incremento de 10 gal/min en el flujo de agua resulta en un cambio de 5.2°F en la temperatura después de un largo tiempo.
Prueba de lazo cerrado: con una ganancia del controlador de 8.0 %CO/%TO, la temperatura oscila con amplitud constante y periodo de 14 min.

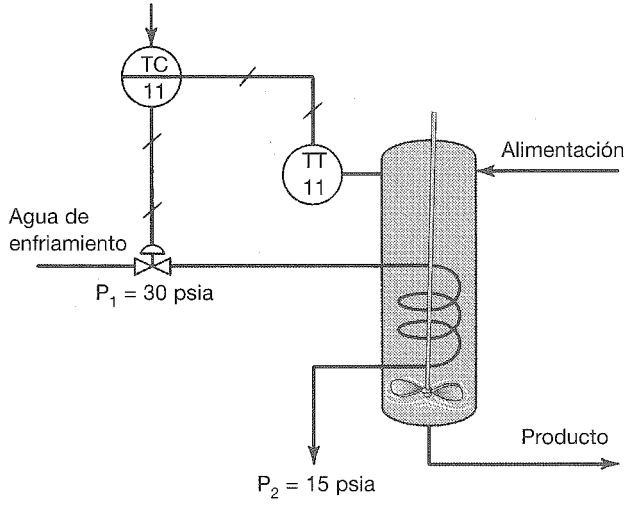


Figura P7-8 Reactor para el problema 7-21.

a) Dimensionar la válvula de control para 100% de sobrecapacidad, calcular la ganancia de la válvula para las condiciones de diseño, así como especificar la posición de falla segura de la válvula.
b) Trazar el diagrama de bloques para el lazo de control y determinar la ganancia total del proceso, incluyendo el transmisor y la válvula de control.
c) Calcular los parámetros de sintonización de un controlador PID para la respuesta con razón de asentamiento de un cuarto. Presentarlos como banda proporcional, repeticiones/minuto y minutos derivativos. ¿Cuál es la acción del controlador que se requiere?

7-22. Considérese el proceso que se muestra en la figura P7-9 para el secado de roca fosfórica. Un alimentador de mesa transporta pasta de roca y agua al lecho del secador. Las rocas se secan en este lecho por contacto directo con gases de combustión calientes. Desde el secador las rocas se transportan a un silo para almacenamiento. Es *de suma* importancia controlar la humedad de las rocas que salen del secador. Si las rocas están muy secas, se pueden fracturar formando un polvo fino que se puede traducir en pérdida de material. Si están muy húmedas, se pueden formar grandes aglomerados, o *clinkers*, en el silo.

Se propone controlar la humedad de las rocas que salen mediante la velocidad de la mesa del alimentador, como se muestra en la figura P7-9. La velocidad del alimentador es directamente proporcional a su señal de entrada. La humedad de las rocas de entrada es de alrededor de 15% y se reduce a 3% en el secador. El transmisor tiene un rango de 1% a 5% de humedad. Una perturbación importante en este proceso es la humedad de las rocas de entrada.

a) Trazar el diagrama de bloques completo del lazo de control indicando todas las unidades. Incluir las perturbaciones.

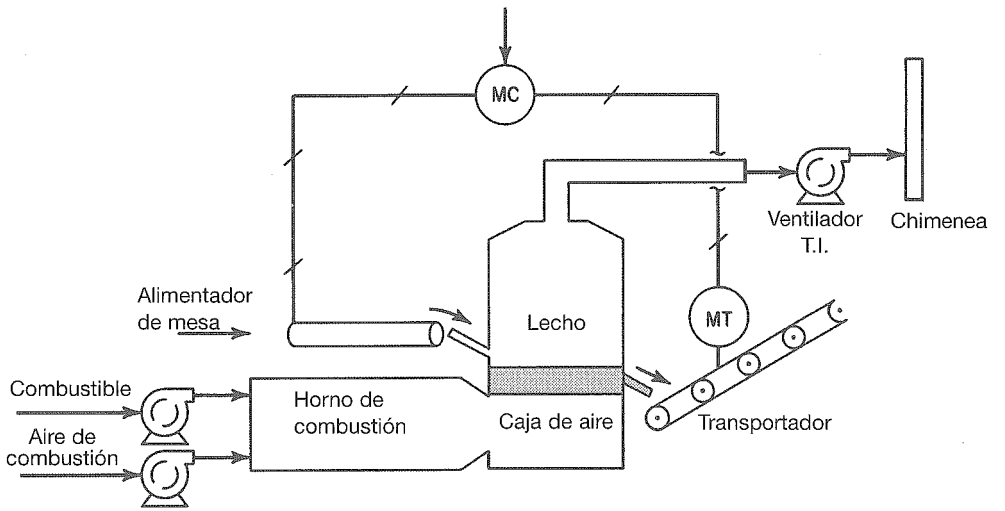


Figura P7-9 Secador de roca fosfórica para el problema 7-22.

b) En la figura P7-10 se muestra la respuesta de la humedad de salida a un incremento de 8% en la salida del controlador, mientras que en la figura P7-11 se muestra la respuesta de la humedad de salida a un incremento de 3% en la humedad de entrada. Aproximar cada curva del proceso con un modelo de primer orden más tiempo muerto. Usar el método de ajuste 2. Trazar de nuevo el diagrama de bloques indicando las funciones de transferencia de estos modelos aproximados.

c) Determinar la sintonización de un controlador PID para la respuesta IAE mínima a la entrada de perturbaciones. Presentar la ganancia del controlador como banda proporcional. ¿Cuál es la acción correcta del controlador?

d) Si la humedad de las rocas a la entrada se reduce 2%, ¿cuál es el nuevo valor de estado estacionario de la humedad de salida? Suponer que el controlador es sólo

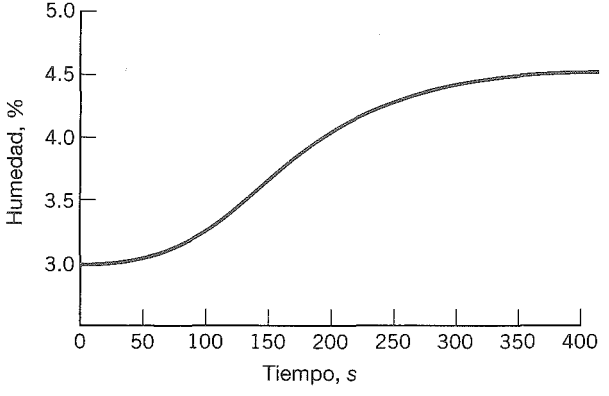


Figura P7-10 Respuesta a un cambio escalón en la salida del controlador para el problema 7-22.

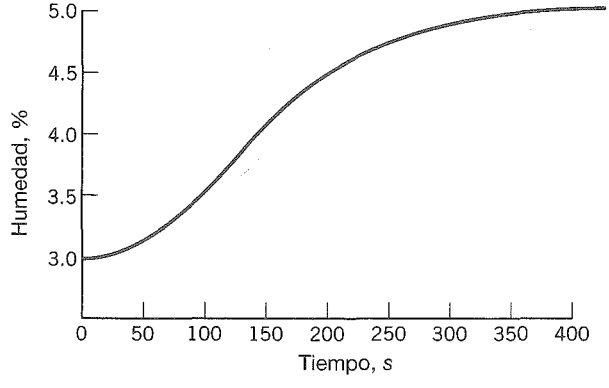


Figura P7-11 Respuesta a un cambio escalón en la humedad de entrada para el problema 7-22.

proporcional sintonizado para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto a partir de la información determinada en el inciso b).

e) ¿Cuál es la salida del controlador que se requiere a fin de evitar el corrimiento para la perturbación del inciso d)?

7-23. En el sistema de control de nivel de líquido de la figura 7-3.1, suponer que la válvula de control de nivel está instalada en la línea de entrada para manipular el flujo de entrada, $f_i(t)$, y que el flujo de salida es la perturbación. Modificar los diagramas de bloques del lazo (figura 7-3.2) y especificar la acción correcta del controlador de nivel suponiendo que la válvula de control es del tipo cerrada en falla. Escribir de nuevo la función de transferencia de lazo cerrado del nivel. ¿Sufren algún cambio las fórmulas desarrolladas en la sección 7-3.2 para el controlador proporcional de nivel?

7-24. Considérese el primero de los dos tanques en serie de la figura 4-1.1. En la sección 4-1.1 se obtuvo un modelo de este tanque que supone que el flujo de salida depende del nivel del tanque. Este modelo produce una función de transferencia de retardo de primer orden para el nivel en el tanque. Se va a instalar un controlador de nivel en ese tanque. El controlador manipulará la válvula de la línea de descarga. Sea el diámetro del tanque de 3.0 m, el nivel de diseño de 2.0 m, el rango del controlador de nivel de 1 a 3 m por encima del fondo del tanque, y la válvula de salida lineal y dimensionada para un flujo máximo del doble del flujo de diseño, que es 0.003 m^3/s. La caída de presión en la línea es despreciable, y la válvula se puede representar con un retardo de primer orden con constante de tiempo de 5 s.

a) Trazar el diagrama de bloques del lazo de control de nivel utilizando el modelo desarrollado para el primer tanque en la sección 4-1.1. Especificar la acción del controlador y calcular los parámetros de todas las funciones de transferencia. Calcular la ganancia última de un controlador proporcional de nivel que resulte en una respuesta no oscilatoria. Calcular también las constantes de tiempo efectivas del lazo para esa ganancia y el corrimiento causado por un cambio en el flujo de entrada de 0.001 m^3/s.

b) Modelar ahora el tanque como si el flujo de salida fuera función solamente de la posición de la válvula, como en la sección 7-3.1 (proceso integrante) y realizar los cálculos del inciso a) utilizando este modelo. Comparar las respuestas de ambos modelos.

7-25. Aunque el control proporcional es ideal tanto para el control de nivel promedio como el riguroso, muchos operadores prefieren tener un controlador proporcional integral (PI) porque no están acostumbrados a controladores con corrimiento.

a) Obtener la función de transferencia de lazo cerrado y la ecuación característica del lazo para el diagrama de bloques de la figura 7-3.2 utilizando un controlador PI. Establecer que no hay corrimiento para un cambio en la referencia ni en el flujo.

b) Determinar las raíces de la ecuación característica cuando el tiempo integral es igual a la constante de tiempo de la válvula. ¿Cuál es la respuesta del nivel? ¿Depende de la ganancia del controlador?

c) Suponiendo una constante de tiempo despreciable de la válvula, establecer que la respuesta del controlador de nivel PI es oscilatoria para ganancias bajas y no oscilatoria para ganancias altas. Establecer que la ganancia mínima para la que la respuesta es no oscilatoria es $4/\tau_I$. Establecer también que para ganancias muy altas, la constante de tiempo dominante del lazo cerrado es igual al tiempo integral del controlador.

7-26. Un controlador de nivel en un evaporador tipo calandria debe sintonizarse de manera muy rigurosa porque su operación es en extremo sensible al nivel. Un nivel alto resulta en un incremento de la temperatura de ebullición debido a la presión hidrostática del fluido, mientras que un nivel bajo resulta en la formación de costras de sólidos secos en la parte superior de los tubos calientes. Debido a ello, en la mayoría de los evaporadores el nivel se controla mediante la manipulación del flujo de alimentación del evaporador, que es el flujo más grande. Trazar un diagrama esquemático para el lazo de control de nivel de un evaporador. Los flujos de vapor y del producto son las perturbaciones. Trazar también el diagrama de bloques del lazo. Calcular la ganancia última proporcional del controlador para una respuesta no oscilatoria, las constantes de tiempo efectivas del lazo de nivel con esa ganancia, y el corrimiento para un cambio en el flujo de 10% para los siguientes parámetros de diseño: flujo de alimentación de 800 lb/min, densidad de la solución concentrada de 98 lb/ft^3, área transversal del evaporador de 10 ft^2, constante de tiempo de la válvula de 2.0 s y rango del transmisor de nivel de 4 ft. La válvula es lineal y está dimensionada para 100% de sobrecapacidad.

7-27. La función de transferencia para un proceso con respuesta inversa (véase la sección 4-4.3) es

$$G(s) = \frac{K(1-\tau_3 s)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

Muestre que si se intentara sintetizar un controlador por retroalimentación para la especificación de la respuesta estándar de primer orden, ecuación 7-4.4, el denominador del controlador contendría una raíz positiva (inestable). Sintetizar después un controlador por retroalimentación para la siguiente especificación de respuesta de lazo cerrado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1-\tau_3 s}{\tau_c s+1}$$

Identificar el tipo de controlador y obtener las fórmulas de sintonización para el mismo.

7-28. Simular el reactor químico no isotérmico descrito en la sección 4-2.3. Utilizando los métodos examinados en la sección 13-4, simular el lazo de control de temperatura del reactor. La válvula de control en la línea del refrigerante que llega al forro es isopor-

centual con parámetro de rangeabilidad $\alpha = 50$, caída de presión constante y un actuador con constante de tiempo de 0.1 min. La válvula está dimensionada con 100% de sobrecapacidad. Se va a usar un transmisor de temperatura con una constante de tiempo de 1 min y un rango de 640° a 700°R. Usar la simulación para determinar la respuesta escalón de lazo abierto de la salida del transmisor a un incremento de 2% en la señal que llega a la válvula, y emplear después el método de ajuste 3 para estimar la ganancia, la constante de tiempo y el tiempo muerto del proceso. Estos parámetros se utilizarán después para determinar los parámetros de sintonización del controlador. Obtener las respuestas de lazo cerrado para las salidas del transmisor y del controlador a un cambio escalón de -0.2 ft^3/min en el flujo de reactivos con un controlador PID sintonizado para: a) una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto, y b) una sintonización por síntesis con $\tau_c = 0$.

Capítulo 8

Técnicas del lugar de las raíces y de la respuesta de frecuencia

En el capítulo 6 se inició el estudio de la estabilidad de los sistemas de control presentando dos técnicas: la prueba de Routh y la sustitución directa. En este capítulo se continúa con este estudio presentando la técnica del lugar de las raíces y la técnica de la respuesta de frecuencia. Esta presentación se hace desde un punto de vista práctico, enfatizando lo que las técnicas indican acerca de la estabilidad de los procesos y cómo los diferentes términos del lazo afectan la estabilidad. Como la presentación de la respuesta de frecuencia es independiente de la del lugar de la raíces, el lector puede optar por omitir la sección del lugar de las raíces y pasar directamente a la sección 8-4.

8-1 ALGUNAS DEFINICIONES

Antes de presentar las técnicas del lugar de las raíces y de la respuesta de frecuencia, es necesario definir algunos términos nuevos. Considérese el diagrama de bloques de lazo cerrado general de la figura 8-1.1. Como se vio en el capítulo 6, las funciones de transferencia de lazo cerrado son

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_v(s)G_{p1}(s)}{1+H(s)G_c(s)G_v(s)G_{p1}(s)} \tag{8-1.1}$$

y

$$\frac{C(s)}{L(s)} = \frac{G_{p2}(s)}{1+H(s)G_c(s)G_v(s)G_{p1}(s)} \tag{8-1.2}$$

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

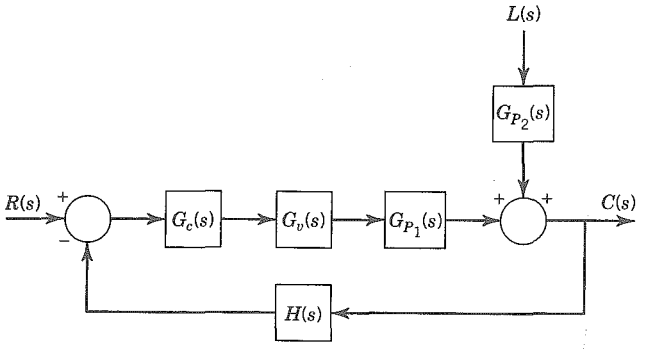


Figura 8-1.1 Diagrama de bloques de lazo cerrado general.

con la ecuación característica

$$1 + H(s)G_c(s)G_v(s)G_{p1}(s) = 0 \tag{8-1.3}$$

La *función de transferencia de lazo abierto* (*OLTF*, por sus siglas en inglés) se define como el producto de todas las funciones de transferencia en el lazo de control, es decir,

$$\text{OLTF} = H(s)G_c(s)G_v(s)G_{p1}(s) \tag{8-1.4}$$

Por lo tanto, la ecuación característica se puede escribir también como

$$1 + \text{OLTF} = 0 \tag{8-1.5}$$

Suponer ahora que se conocen las funciones de transferencia y que la OLTF es de la forma siguiente:

$$\text{OLTF} = \frac{K_c K_v K_{p1} K_T (1 + \tau_D s)}{(\tau_T s + 1)(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

o bien,

$$\text{OLTF} = \frac{K(1 + \tau_D s)}{(\tau_T s + 1)(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

donde $K = K_c K_v K_{p1} K_T$.

Los *polos* se definen como las raíces del denominador de la OLTF. En este caso, los polos de la OLTF son $-1/\tau_T$, $-1/\tau_1$, $-1/\tau_2$. Los *ceros* se definen como las raíces del numerador de la OLTF, o $-1/\tau_D$ en este caso.

Estas definiciones se generalizan escribiendo la OLTF como

$$\text{OLTF} = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s\prod_{j=1}^{n}(\tau_j s+1)}, \qquad n > m$$

o bien,

$$\text{OLTF} = \frac{K'\prod_{i=1}^{m}\left(s+\frac{1}{\tau_i}\right)}{s\prod_{j=1}^{n}\left(s+\frac{1}{\tau_j}\right)}, \qquad n > m \tag{8-1.6}$$

donde:

$$K' = \frac{K\prod_{i=1}^{m}\tau_i}{\prod_{j=1}^{n}\tau_j}$$

En la ecuación 8-1.6 los polos se identifican como $-1/\tau_j$ para $j = 1$ a n, y como 0 para el término s. Del mismo modo, los ceros están dados por $-1/\tau_i$ para $i = 1$ a m. Estas definiciones de los polos y los ceros serán de uso frecuente en este capítulo.

8-2 ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL POR RETROALIMENTACIÓN MEDIANTE EL LUGAR DE LAS RAÍCES

El *lugar de las raíces* es una técnica que consiste en graficar las raíces de la ecuación característica, también llamadas eigenvalores, cuando una ganancia o cualquier otro parámetro del lazo de control cambia. La gráfica resultante permite determinar a simple vista si alguna raíz cruza el eje imaginario hacia el lado derecho del plano s. Este cruzamiento indicaría la posibilidad de inestabilidad en el lazo de control.

A continuación se presentan varios ejemplos de cómo se grafica el lugar de las raíces. Estos ejemplos ilustran también los efectos de los diferentes parámetros del lazo de control sobre su estabilidad. Estos efectos se presentaron en el capítulo 6, por lo que la exposición siguiente deberá servir de repaso.

Ejemplo 8-2.1 Considérese el diagrama de bloques de la figura 8-2.1. La ecuación característica para este sistema es

$$1+\frac{K_c}{(3s+1)(s+1)}=0 \tag{8-2.1}$$

y

$$\text{OLTF}=\frac{K_c}{(3s+1)(s+1)}$$

Nótese que la OLTF contiene dos polos, $-1/3$ y -1, y que no contiene ceros. Por la ecuación 8-2.1 se obtiene el polinomio

$$3s^2+4s+(1+K_c)=0$$

Este polinomio, al ser de segundo orden, tiene dos raíces. Usando la ecuación cuadrática para encontrarlas se desarrolla la siguiente expresión

$$r_1, r_2=-\frac{2}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{1-3K_c} \tag{8-2.2}$$

La ecuación 8-2.2 indica que las raíces de la ecuación característica dependen del valor de K_c. Esto es lo mismo que decir que ¡la respuesta del lazo de control cerrado depende de la sintonización del controlador por retroalimentación! Esto también se estableció en el capítulo 6. Asignando valores a K_c se puede determinar la localización de las raíces. La gráfica de las raíces, o el lugar de las raíces, se muestra en la figura 8-2.2. Se pueden aprender varias cosas al examinar este diagrama.

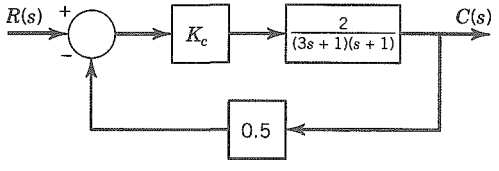


Figura 8-2.1 Diagrama de bloques del lazo de control para el problema 8-2.1.

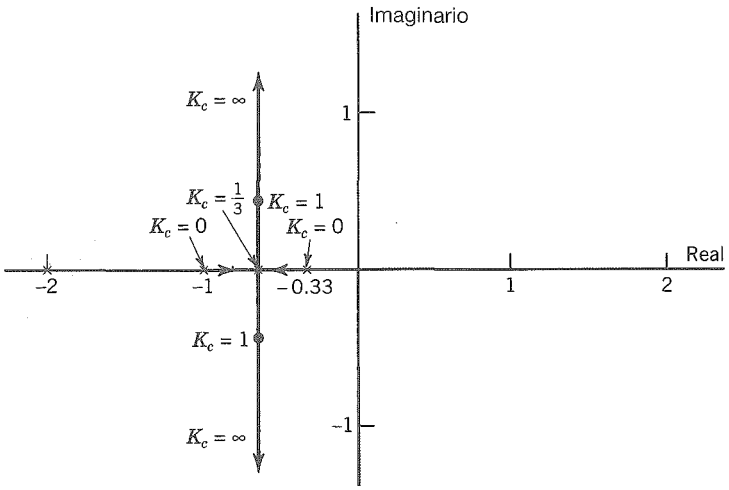


Figura 8-2.2 Diagrama del lugar de las raíces para el sistema de la figura 8-2.1.

1. El punto más importante es que este lazo de control en particular nunca se hará inestable, sin importar lo grande que sea el valor de K_c. Conforme el valor de K_c aumenta, la respuesta del lazo se hace más oscilatoria, o subamortiguada, pero nunca inestable. La respuesta subamortiguada se reconoce porque las raíces de la ecuación característica se alejan del eje real y se adentran en la región compleja a medida que K_c aumenta. El hecho de que un lazo de control con una ecuación característica de segundo orden (o de primer orden) sin tiempo muerto no se hace inestable también se estableció en el capítulo 6 usando los métodos de la prueba de Routh y de sustitución directa.
2. Cuando $K_c = 0$, la localización de las raíces se origina en los polos de la OLTF, $-1/3$ y -1.
3. El número de lugares, o ramas, de las raíces es igual al número de polos de la OLTF, $n = 2$.
4. Cuando K_c aumenta, los lugares de las raíces tienden a infinito.

Ejemplo 8-2.2 Suponer ahora que la combinación sensor-transmisor del ejemplo anterior tiene una constante de tiempo de 0.5 unidades de tiempo. El diagrama de bloques se muestra en la figura 8-2.3. La nueva ecuación característica y la nueva función de transferencia de lazo abierto son

$$1 + \frac{K_c}{(3s+1)(s+1)(0.5s+1)} = 0$$

o bien,

$$1.5s^3 + 5s^2 + 4.5s + (1 + K_c) = 0$$

$$\text{OLTF} = \frac{K_c}{(3s+1)(s+1)(0.5s+1)}$$

$$\text{con polos: } -1/3, -1, -2; \quad n = 3$$

$$\text{ceros: ninguno;} \quad m = 0$$

En este caso, la ecuación característica es un polinomio de tercer orden y, por lo tanto, el cálculo de las raíces no es tan directo. En la figura 8-2.4 se muestra el diagrama del lugar de las raíces. De nueva cuenta, se pueden aprender varias cosas a simple vista de este diagrama.

1. Lo más importante es que este sistema de control se puede hacer inestable. En algún valor de K_c, en este caso $K_c = 14$, el lugar de las raíces cruza el eje imaginario. Para valores de K_c mayores que 14, algunas raíces de la ecuación característica estarán en el lado derecho del plano s. El valor de K_c en el que el lugar de las raíces cruza el eje imaginario, produciendo un sistema condicionalmente estable, se llama la ganancia última, K_{cu}, como se señaló en el capítulo 6. La frecuencia última, ω_u, está dada por las coordenadas del punto donde las ramas cruzan el eje imaginario. Cualquier lazo con ecuación característica de tercer orden u orden superior puede hacerse inestable; los sistemas de primer o segundo orden sin tiempo muerto no se harán inestables. Cualquier sistema con tiempo muerto puede hacerse inestable, como se establecerá en este capítulo.
2. Los lugares de las raíces se originan nuevamente cuando $K_c = 0$, en los polos de la OLTF: $-1/3, -1, -2$.
3. El número de lugares de las raíces de nuevo es igual al número de polos de la OLTF, $n = 3$.
4. Los lugares de las raíces de nuevo tienden a infinito cuando K_c aumenta.

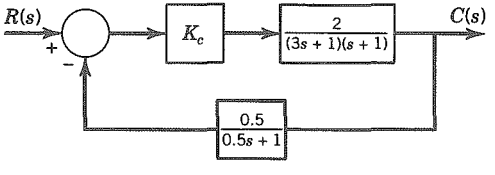


Figura 8-2.3 Diagrama de bloques del lazo de control para el ejemplo 8-2.2.

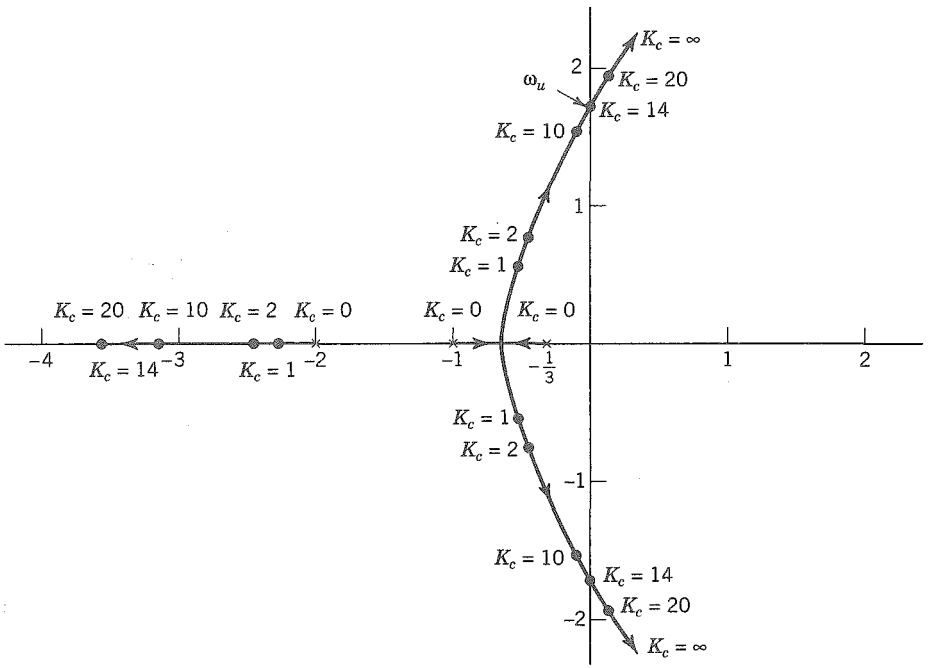


Figura 8-2.4 Diagrama del lugar de las raíces para el sistema de la figura 8-2.3.

8-3 GRAFICACIÓN DE DIAGRAMAS DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

El ejemplo 8-2.1 muestra que es bastante sencillo trazar un diagrama del lugar de las raíces cuando la ecuación característica es de segundo orden; trazar los de primer orden también es simple. Sin embargo, cuando la ecuación característica es de tercer orden o superior, como en el ejemplo 8-2.2, trazar los diagramas no es tan sencillo. Hay reglas que permiten trazar el lugar de las raíces sin necesidad de calcular ninguna de ellas; se remite al lector a la edición anterior de este libro (referencia 1) para estas reglas. Obviamente, y aún más importante y conveniente, existen varios paquetes de software, tales como MATLAB (referencia 2) que trazan el lugar de las raíces directamente a partir de las funciones de transferencia. Hay también varios otros paquetes, tales como TK Solver (referencia 3) y MATHCAD (referencia 4), que hacen el cálculo y el diagrama de las raíces de manera muy conveniente. En el ejemplo siguiente se presenta muy brevemente el uso de MATLAB para trazar el lugar de las raíces.

Ejemplo 8-3.1 Suponer que se desea usar un controlador PI para regular el proceso del ejemplo 8-2.2. Se usa un tiempo integral de 0.1 min (6 s), por lo que la función de transferencia para este controlador es $G_c(s) = K_c(1 + (1/6s))$. Trazar el diagrama del lugar de las raíces para este nuevo sistema de control. ¿Cuál es el efecto de añadir la acción integral al controlador?

La ecuación característica y la función de transferencia de lazo abierto son

$$1+\frac{K_c\left(1+\dfrac{1}{6s}\right)}{(3s+1)(s+1)(0.5s+1)}=0 \tag{8-3.1}$$

$$\text{OLTF}=\frac{K_c\left(1+\dfrac{1}{6s}\right)}{(3s+1)(s+1)(0.5s+1)} \tag{8-3.2}$$

o bien,

$$\text{OLTF}=\frac{K_c(6s+1)}{6s(3s+1)(s+1)(0.5s+1)} \tag{8-3.3}$$

$$\begin{aligned}&\text{con polos}: 0,-\frac{1}{3},-1,-\frac{1}{0.5}, \qquad n=4\\ &\text{ceros}: -\frac{1}{6}, \qquad\qquad\qquad m=1\end{aligned} \tag{8-3.4}$$

El uso de MATLAB para trazar el lugar de las raíces requiere introducir la OLTF constante, K_c en este caso. En la figura 8-3.1 se muestra el programa y en la figura 8-3.2 el lugar de las raíces. La ganancia última en este caso es 11.72 y la frecuencia última es 1.58 rad/s.

Al comparar las figuras 8-2.4 y 8-3.2 se observa que la adición de la acción integral al controlador proporcional no cambia de manera significativa la forma del lugar de las raíces. Sin embargo, el efecto más significativo es la reducción de la ganancia última (11.72 contra 14) y de la frecuencia última. Como se vio en los capítulos 5 y 6, la acción integral elimina el corrimiento, pero agrega inestabilidad al sistema de control (reduce la ganancia última).

```
num=[6 1]; den1=[6 0]; den2=[3 1]; den3=[1 1]; den4=[4 1];
den5=conv(den1, den2); den6=conv(den5, den3); den7= conv(den6, den4);
rlocus(num,den7)
```

Figura 8-3.1 Programa de MATLAB para trazar el diagrama del lugar de las raíces del ejemplo 8-3.1.

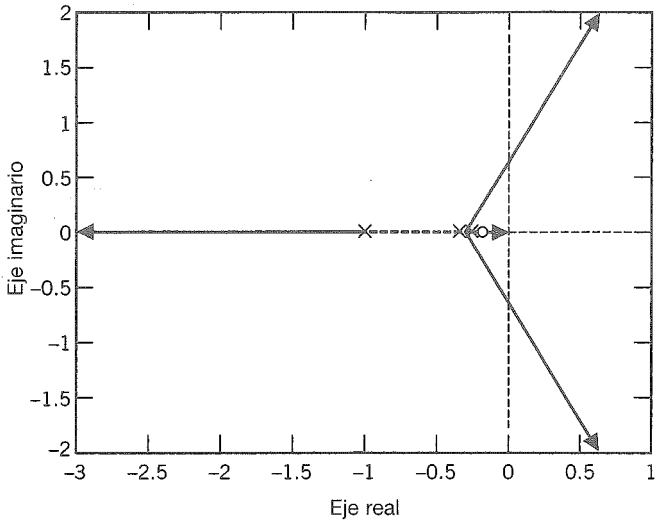


Figura 8-3.2 Diagrama del lugar de las raíces del ejemplo 8-3.1.

8-4 ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL USANDO RESPUESTA DE FRECUENCIA

Las técnicas de respuesta de frecuencia son de las más populares para el análisis y el diseño de sistemas lineales de control. En las secciones siguientes se examina lo que se entiende por respuesta de frecuencia y cómo se pueden usar estas técnicas para analizar y sintetizar sistemas de control.

Considérese el diagrama de bloques general que se muestra en la figura 8-4.1. El lazo de control se abre antes de la válvula y después del transmisor. Un generador de frecuencias variables provee la señal de entrada de la válvula, $x(t) = X_0$ sen ωt, y un registrador guarda la señal de salida del transmisor y la señal de entrada a la válvula. En la figura 8-4.2 se muestran los dos registros. Después de que los estados transitorios han desaparecido, la salida del transmisor alcanza una respuesta sinusoidal, $y(t) = Y_0$ sen $(\omega t + \theta)$. Este experimento se conoce como *prueba sinusoidal.*

A continuación se realiza el mismo "experimento" utilizando la función de transferencia que describe el proceso. Suponer la siguiente función de transferencia simple:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \tag{8-4.1}$$

Esta función de transferencia describe la válvula, el proceso y el conjunto sensor-transmisor. La señal de entrada a la válvula es

$$x(t) = X_0 \text{ sen } \omega t$$

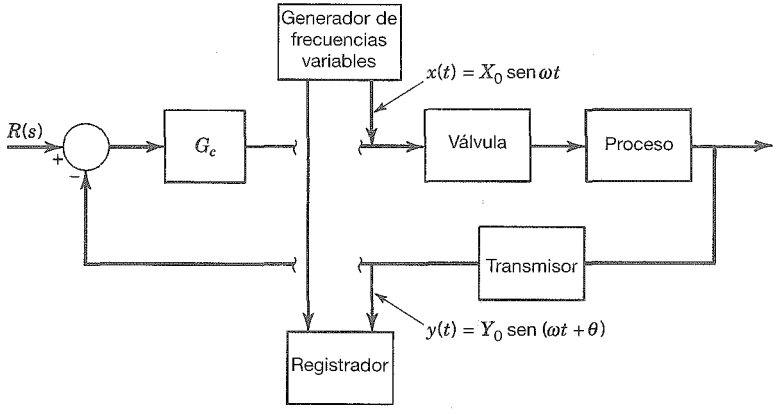


Figura 8-4.1 Diagrama de bloques donde se muestra el generador de frecuencias variables y el registrador.

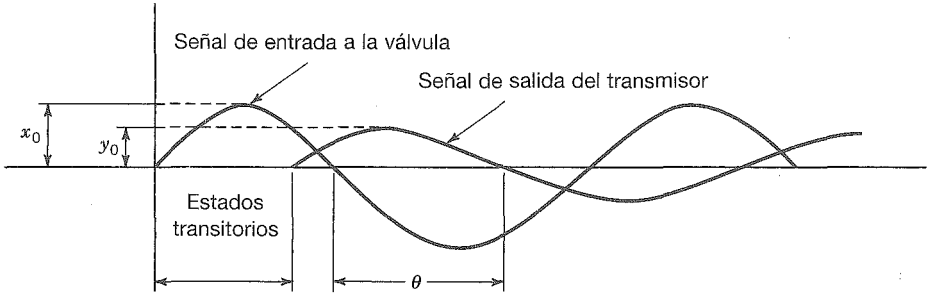


Figura 8-4.2 Registro de una prueba sinusoidal.

y su transformada de Laplace es, por el capítulo 2,

$$X(s) = \frac{X_0 \omega}{s^2 + \omega^2} \tag{8-4.2}$$

Por lo tanto,

$$Y(s) = \frac{K X_0 \omega}{(\tau s + 1)(s^2 + \omega^2)}$$

La expresión en el dominio del tiempo para $Y(t)$ se puede obtener usando las técnicas aprendidas en el capítulo 2:

$$Y(t) = \frac{KX_0\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}e^{-t/\tau} + \frac{KX_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\operatorname{sen}(\omega t + \theta) \tag{8-4.3}$$

con

$$\theta = \tan^{-1}(-\omega\tau) = -\tan^{-1}(\omega\tau) \tag{8-4.4}$$

Cuando el tiempo se incrementa, el término exponencial de la ecuación 8-4.3 tiende a cero, es decir, el término transitorio desaparece. Cuando esto sucede, la expresión de salida se convierte en

$$Y(t)\Big|_{t \text{ muy grande}} = \frac{KX_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\operatorname{sen}(\omega t + \theta) \tag{8-4.5}$$

que constituye el comportamiento sinusoidal de la señal de salida, la cual se muestra en la figura 8-4.2. La amplitud de esta señal de salida es

$$Y_0 = \frac{KX_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

El signo negativo en la ecuación 8-4.4 indica que la señal de salida está "retrasada" con respecto a la señal de entrada por la cantidad de tiempo θ calculada con la ecuación.

En este punto se impone una recomendación. Es necesario prestar atención cuando se calcula el término del seno en la ecuación 8-4.5. El término ω está en radianes/tiempo y el término ωt está en radianes. Por lo tanto, para que la operación $(\omega t + \theta)$ esté en las unidades correctas, θ debe estar en radianes. Si se utilizan grados, entonces el término debe escribirse como

$$\left(\frac{180}{\pi}\omega t + \theta\right)$$

En resumen, hay que ser cuidadosos con las unidades.

A continuación se definen algunos términos utilizados con frecuencia en los estudios de respuesta de frecuencia.

- **Relación de amplitud (AR)** es el cociente de la amplitud de la señal de salida y la señal de entrada. Es decir,

$$\text{AR} = \frac{Y_0}{X_0} \tag{8-4.6}$$

- **Relación de magnitud (MR)** es la relación de amplitud dividida entre la ganancia de estado estacionario:

$$\text{MR} = \frac{\text{AR}}{K} \tag{8-4.7}$$

- **Ángulo de fase (θ)** es la cantidad, en radianes o grados, en la que la señal de salida está retrasada o adelantada con respecto a la señal de entrada. Cuando θ es positivo, es un ángulo de adelanto; cuando θ es negativo, es un ángulo de atraso.

Para la función de transferencia de primer orden anterior:

$$\text{AR} = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}; \qquad \text{MR} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}; \qquad \theta = \tan^{-1}(-\omega\tau)$$

Nótese que los tres términos son funciones de la frecuencia de entrada. Diferentes procesos tendrán diferente dependencia de AR (MR) y θ de ω.

La técnica de respuesta de frecuencia es esencialmente el estudio de cómo la AR (MR) y θ de diferentes componentes o sistemas se comportan cuando la frecuencia de entrada varía. En los párrafos siguientes se establece que la respuesta de frecuencia es una técnica poderosa para analizar y sintetizar sistemas de control. Se examinará primero el desarrollo de la respuesta de frecuencia de sistemas de proceso y después su uso para fines de análisis y síntesis.

En general, hay dos métodos diferentes para generar la respuesta de frecuencia:

1. ***Método experimental.*** Este método consiste, en esencia, en el experimento con el generador de frecuencias variables y el registrador. La idea es realizar el experimento a diferentes frecuencias para obtener una tabla de *AR* contra ω y de θ contra ω.
2. ***Transformación de la función de transferencia de lazo abierto después de una entrada sinusoidal.*** Este método consiste en usar la función de transferencia de lazo abierto para obtener la expresión que describe la respuesta del sistema a una entrada sinusoidal. A partir de esta expresión se pueden determinar la amplitud y el ángulo de fase de la salida. Este método corresponde a las manipulaciones matemáticas antes mostradas que resultaron en las ecuaciones 8-4.4 y 8-4.5.

Afortunadamente, las matemáticas operacionales proveen un método muy simple para determinar AR (MR) y θ sin tener que obtener las transformadas inversas de Laplace. Las matemáticas necesarias se presentaron en el capítulo 2. Considérese

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$

para $x(t) = X_0$ sen ωt, por el capítulo 2,

$$X(s) = \frac{X_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$$

Entonces

$$Y(s) = G(s)\frac{X_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$$

De la expansión en fracciones parciales resulta

$$Y(s) = \frac{A}{s + i\omega} + \frac{B}{s - i\omega} + [\text{términos para los polos de } G(s)] \tag{8-4.8}$$

Para obtener A se usa

$$A = \lim_{s \to 0} \frac{[(s + i\omega) X_0 \omega G(s)]}{(s^2 + \omega^2)} = \frac{G(-i\omega) X_0 \omega}{-2i\omega}$$

Como se estableció en el capítulo 2, cualquier número complejo puede representarse con una magnitud y un argumento; entonces,

$$A = \frac{X_0 \left| G(i\omega) \right| e^{-i\theta}}{-2i}$$

donde $\theta = \angle G(i\omega)$. Para obtener B se usa

$$B = \lim_{s \to i\omega} \left[\frac{(s - i\omega) X_0 \omega G(s)}{(s^2 + \omega^2)} \right] = \frac{X_0 \left| G(i\omega) \right| e^{i\theta}}{2i}$$

Después, sustituyendo las expresiones para A y B en la ecuación 8-4.8, se obtiene

$$Y(s) = \frac{X_0 \left| G(i\omega) \right|}{2i} \left[\frac{-e^{i\theta}}{s + i\omega} + \frac{e^{i\theta}}{s - i\omega} \right] + [\text{términos de } G(s)]$$

Haciendo de nuevo la inversión al dominio del tiempo, se obtiene

$$Y(t) = \frac{X_0 \left| G(i\omega) \right|}{2i} [-e^{-i\theta} e^{-i\omega t} + e^{i\theta} e^{i\omega t}]$$
$$+ [\text{términos transitorios que resultan de los términos de } G(s)]$$

Después de que los términos transitorios desaparecen

$$Y(t)\Big|_{t \text{ muy grande}} = X_0 \left|G(i\omega)\right| \frac{e^{i(\omega t+\theta)} - e^{-i(\omega t+\theta)}}{2i}$$

o bien,

$$Y(t)\Big|_{t \text{ muy grande}} = X_0 \left|G(i\omega)\right| \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$

La relación de amplitud es entonces

$$\text{AR} = \frac{Y_0}{X_0} = \frac{X_0 \left|G(i\omega)\right|}{X_0} = \left|G(i\omega)\right| \tag{8-4.9}$$

y el ángulo de fase es

$$\theta = \angle G(i\omega) \tag{8-4.10}$$

Por lo tanto, para obtener AR y θ, simplemente se sustituye s con $i\omega$ en la función de transferencia y después se calcula la magnitud y el argumento de la expresión compleja resultante. La magnitud es igual a la relación de amplitud (AR) y, asimismo, el argumento es igual al ángulo de fase (θ).

Esta manipulación simplifica los cálculos requeridos.

A continuación se aplican estos resultados al sistema de primer orden usado previamente

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Ahora se sustituye s con $i\omega$

$$G(i\omega) = \frac{K}{i\omega\tau + 1}$$

Esto resulta en una expresión de números complejos compuesta por el cociente de dos términos: el numerador, un número real, y el denominador, un número complejo. La ecuación también se puede escribir como sigue:

$$G(i\omega) = \frac{G_1}{G_2} = \frac{K}{i\omega\tau + 1} \tag{8-4.11}$$

Como lo indica la ecuación 8-4.9, la AR es igual a la magnitud de esta expresión compleja

$$\text{AR} = |G(i\omega)| = \frac{|G_1|}{|G_2|} = \frac{K}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \tag{8-4.12}$$

que es la misma AR obtenida anteriormente.

El ángulo de fase es igual al ángulo de la expresión compleja

$$\theta = \angle G(i\omega) = \angle G_1 - \angle G_2 = 0 - \tan^{-1}(\omega\tau) = -\tan^{-1}(\omega\tau) \tag{8-4.13}$$

que también es la misma θ obtenida previamente.

A continuación se examinan otros ejemplos.

Ejemplo 8-4.1 Considérese el siguiente sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1}$$

Determinar las expresiones para AR y θ.

Solución El primer paso es sustituir s con $i\omega$

$$G(i\omega) = \frac{K}{-\omega^2\tau^2 + i2\tau\zeta\omega + 1} = \frac{K}{(1-\omega^2\tau^2) + i2\tau\zeta\omega}$$

De nuevo, se obtiene una expresión compleja que es el cociente de dos números

$$G(i\omega) = \frac{G_1}{G_2} = \frac{K}{(1-\omega^2\tau^2) + i2\tau\zeta\omega}$$

La relación de amplitud es

$$\text{AR} = |G(i\omega)| = \frac{|G_1|}{|G_2|} = \frac{K}{\sqrt{(1-\omega^2\tau^2)^2 + (2\tau\zeta\omega)^2}} \tag{8-4.14}$$

y el ángulo de fase es

$$\theta = \angle G(i\omega) = \angle G_1 - \angle G_2$$

$$\theta = 0 - \tan^{-1}\left(\frac{2\tau\zeta\omega}{1-\omega^2\tau^2}\right)$$

$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{2\tau\zeta\omega}{1-\omega^2\tau^2}\right) \tag{8-4.15}$$

Este resultado también se presentó en el capítulo 2.

Ejemplo 8-4.2 Considérese la siguiente función de transferencia de un adelanto de primer orden

$$G(s) = K(1+\tau s) \tag{8-4.16}$$

Ésta es una función de transferencia compuesta de una ganancia multiplicada por un adelanto de primer orden. Determinar las expresiones para AR y θ.

Solución Sustituyendo s con $i\omega$ se obtiene la siguiente expresión compleja

$$G(i\omega) = K(1+i\,\omega\tau)$$

que también se puede considerar que está compuesta por otros dos números

$$G(i\omega) = G_1 G_2 = K(1+i\omega t)$$

La relación de amplitud es

$$\text{AR} = |G(i\omega)| = |G_1||G_2| = K\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \tag{8-4.17}$$

y el ángulo de fase es

$$\theta = \angle G_1 + \angle G_2 = 0 + \tan^{-1}(\omega\tau)$$

$$\theta = \tan^{-1}(\omega\tau) \tag{8-4.18}$$

Los ángulos de fase de los sistemas descritos por las ecuaciones 8-4.1 y 8-4.16 se pueden comparar. Los sistemas descritos por la ecuación 8-4.1, a los que en los capítulos 2 y 3 se hizo referencia como retardos de primer orden, tienen ángulos de fase negativos, como se muestra en la ecuación 8-4.13. Los sistemas descritos por la ecuación 8-4.16, llamados *adelantos de primer orden,* tienen ángulos de fase positivos, como se muestra en la ecuación 8-4.18. Este hecho es importante en el estudio de la estabilidad de los sistemas de control por técnicas de respuesta de frecuencia.

La ecuación 8-4.17 ayuda a explicar por qué los sistemas reales no pueden ser adelantos puros. La ecuación muestra que la relación de amplitud aumenta con la frecuencia, lo que

significa que el ruido de alta frecuencia, el cual está presente siempre en las señales naturales, se amplificaría de manera infinita.

Ejemplo 8-4.3 Determinar las expresiones para AR y θ para un tiempo muerto puro.

$$G(s) = e^{-t_0 s}$$

Solución Sustituyendo s con $i\omega$ se obtiene

$$G(i\omega) = e^{-i\ t_0\omega}$$

Puesto que esta expresión está ya en forma polar, usando los principios aprendidos en el capítulo 2 se obtiene

$$G(i\omega) = \left|G(i\omega)\right| e^{iG(i\omega)} = e^{-i\ t_0\omega}$$

lo que significa que

$$\boxed{\text{AR} = \left|G(i\omega)\right| = 1} \tag{8-4.19}$$

y

$$\boxed{\theta = \angle G(i\omega) = -t_0\omega} \tag{8-4.20a}$$

Recuérdese la discusión de las unidades de θ. Como se muestra en la ecuación 8-4.20a, las unidades de θ son radianes. Si se desea obtener θ en grados, entonces

$$\theta = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)(-t_0\omega) \tag{8-4.20b}$$

Es importante notar que θ se hace cada vez más negativo conforme ω se incrementa. La rapidez con la que disminuye θ depende de t_0; entre mayor sea t_0, con mayor rapidez disminuirá θ. Este hecho será un factor importante en el análisis de los sistemas de control. La relación de amplitud y las relaciones de magnitud son independientes de la frecuencia cuando la función de transferencia es un tiempo muerto puro.

Ejemplo 8-4.4 Determinar las expresiones de AR y θ para un integrador

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Solución Sustituyendo s con $i\omega$ se obtiene

$$G(i\omega) = \frac{1}{i\omega} = -\frac{1}{\omega}i$$

Éste es un número imaginario puro con una relación de amplitud

$$\boxed{\text{AR} = |G(i\omega)| = \frac{1}{\omega}} \tag{8-4.21}$$

y el ángulo de fase, debido a que está en el eje imaginario negativo, es

$$\boxed{\theta = \angle G(i\omega) = -\frac{\pi}{2}; \text{o bien, } -90^\circ} \tag{8-4.22}$$

Para un integrador, entonces, la relación de amplitud es inversamente proporcional a la frecuencia, mientras que el ángulo de fase se mantiene constante en -90°. Es decir, el integrador produce un retraso de fase constante.

En este punto se pueden generalizar las expresiones para AR y θ. Considérese la siguiente OLTF general:

$$\text{OLTF}(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s + 1)e^{-t_0 s}}{s^k \prod_{j=1}^{n}(\tau_j s + 1)}, \qquad (n+k) > m \tag{8-4.23}$$

Sustituyendo s con $i\omega$ se obtiene

$$\text{OLTF}(i\omega) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(i\tau_i \omega + 1)e^{-i\omega t_0}}{(i\omega)^k \prod (i\tau_j \omega + 1)}$$

y se llega finalmente a

$$\text{AR} = \frac{K\prod_{i=1}^{m}\sqrt{(\tau_i \omega)^2 + 1}}{\omega^k \prod_{j=i}^{n}\sqrt{(\tau_j \omega)^2 + 1}} \tag{8-4.24}$$

y

$$\theta = \sum_{i=1}^{m} \tan^{-1}(\tau_i \omega) - t_0 \omega - \sum_{j=1}^{n} \tan^{-1}(\tau_j \omega) - k\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad (8\text{-}4.25)$$

Hasta ahora se han desarrollado la expresiones para AR y θ en función de ω. Hay varias maneras de representar estas expresiones gráficamente. Las tres formas más comunes son las gráficas de Bode, el diagrama de Nyquist y el diagrama de Nichols. En la siguiente sección se presentan las gráficas de Bode.

8-4.1 Gráficas de Bode

Las *gráficas de Bode* son representaciones gráficas usuales de las funciones de AR (MR) y θ. Una gráfica de Bode consta de dos gráficas: 1) log AR (o log MR) contra log ω, y 2) θ contra log ω. Con frecuencia se grafica el término 20 log AR, al que se hace referencia como decibeles, en vez de log AR. Este término es de uso generalizado en el campo de la ingeniería eléctrica y algunas veces también en el campo del control de procesos; en este libro se grafica log AR. A continuación se consideran las gráficas de Bode de las funciones de transferencia de algunos de los procesos más comunes.

Elemento de ganancia Un elemento de ganancia pura tiene la función de transferencia

$$G(s) = K$$

Sustituyendo s con $i\omega$ se obtiene

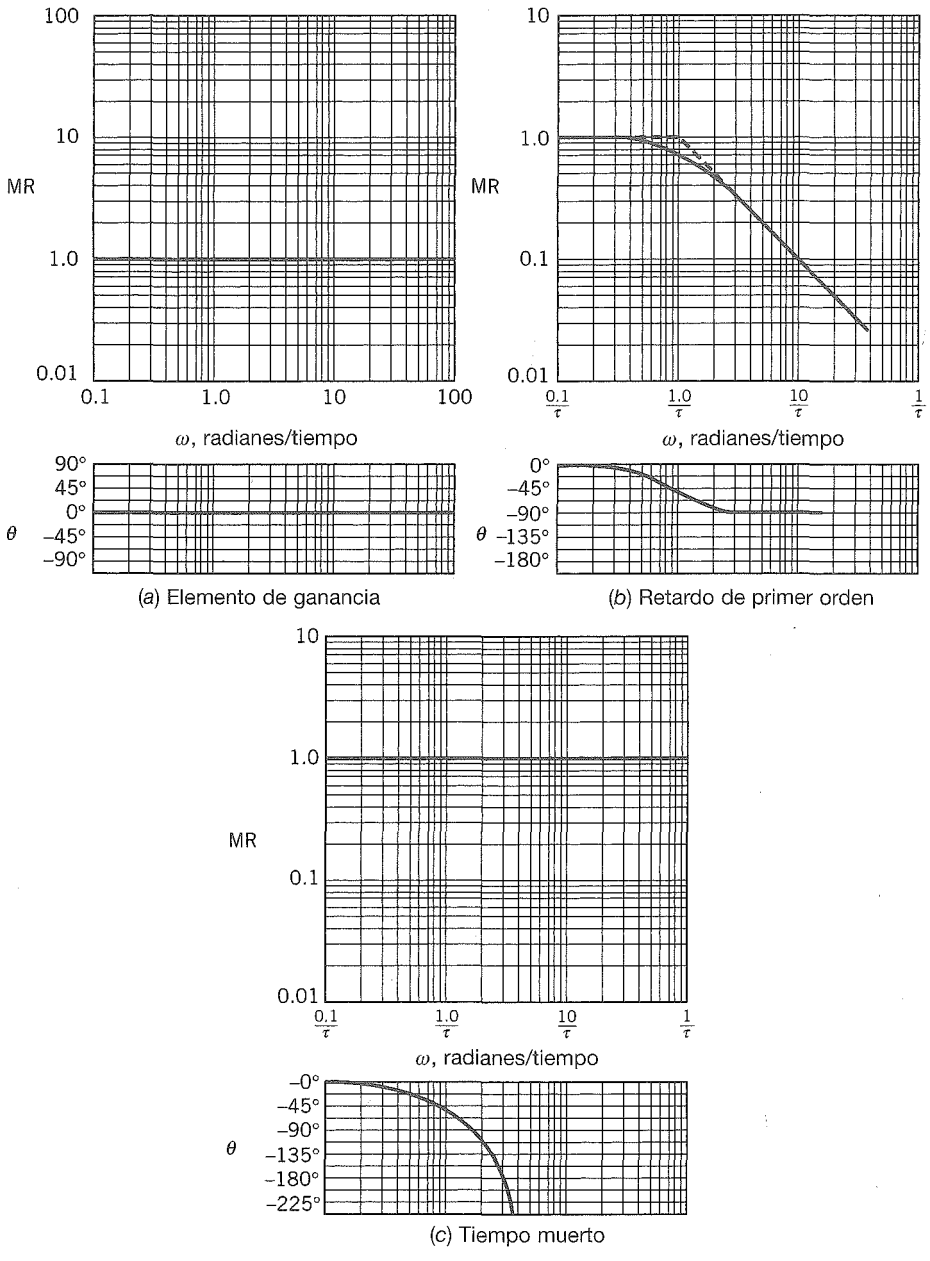
$$G(i\omega) = K$$

y aplicando las matemáticas previamente presentadas se obtiene

$$\text{AR} = |G(i\omega)| = K, \quad \text{o} \quad MR = 1$$

y

$$\theta = \tan^{-1} G(i\omega) = 0$$



(a) Elemento de ganancia

(b) Retardo de primer orden

(c) Tiempo muerto

Figura 8-4.3 Gráficas de Bode. (*a*) Elemento de ganancia. (*b*) Retardo de primer orden. (*c*) Tiempo muerto.

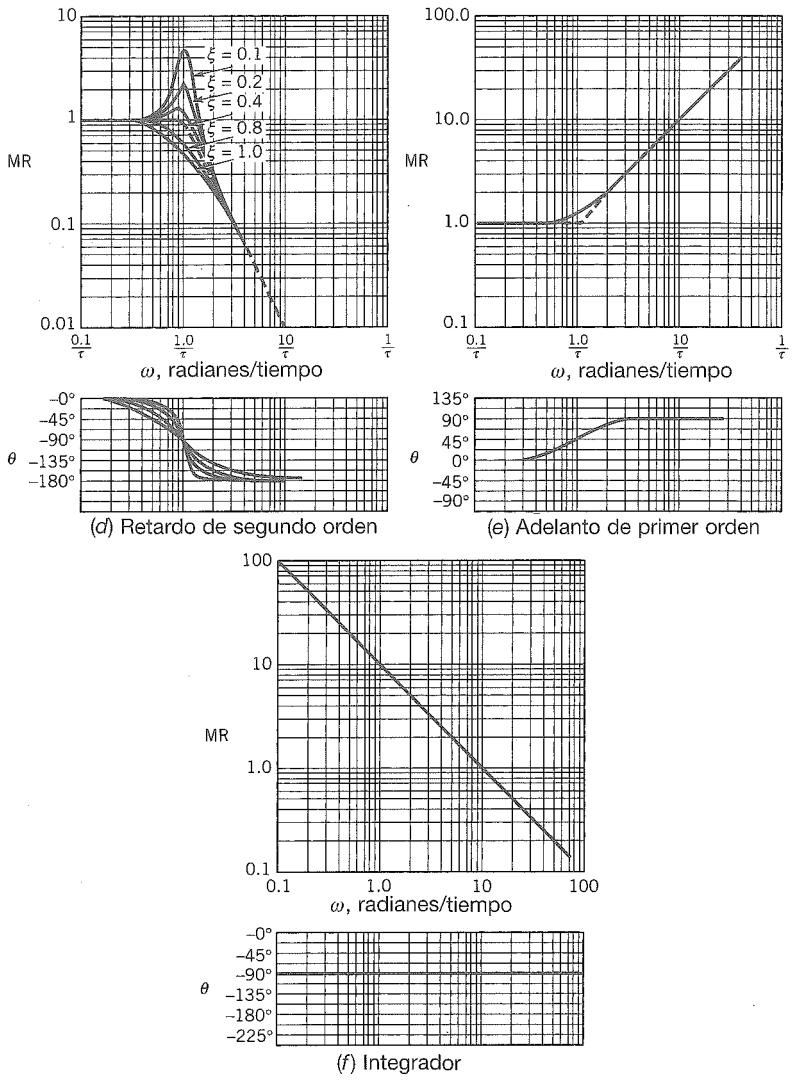


Figura 8-4.3 (*Continuación*) (*d*) Retardo de segundo orden. (*e*) Adelanto de primer orden. (*f*) Integrador.

En la figura 8-4.3*a* se muestra el diagrama de Bode para este elemento; se utilizó papel log-log y semilog.

Retardo de primer orden Para un retraso de primer orden, AR y θ están dados por las ecuaciones 8-4.12 y 8-4.13, respectivamente. La expresión para MR se obtiene a partir de la ecuación para AF

$$\text{MR} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}$$

y

$$\theta = -\tan^{-1}(\omega\tau) \tag{8-4.13}$$

La gráfica de Bode para este sistema se muestra en la figura 8-4.3*b*. La gráfica de la relación de magnitud incluye también dos líneas discontinuas. Estas líneas son asíntotas de la respuesta de frecuencia a frecuencias bajas y altas. La figura muestra que estas asíntotas no se desvían mucho de la respuesta de frecuencia real. Por lo tanto, es muy común hacer el análisis de respuesta de frecuencia con las asíntotas; son más fáciles de trazar y no se incurre en un error grande al usarlas. A continuación se considera cómo se desarrollan estas asíntotas.

Por la ecuación de la relación de magnitud cuando $\omega \to 0$, MR $\to 1$, de donde resulta la asíntota para frecuencias bajas. Antes de desarrollar la asíntota para frecuencias altas, la ecuación para la relación de magnitud se escribe en forma logarítmica:

$$\log \text{MR} = -\frac{1}{2}\log(\tau^2\omega^2 + 1)$$

Ahora, cuando $\omega \to \infty$

$$\log \text{MR} \to -\frac{1}{2}\log \tau^2\omega^2 = -\log \tau\omega$$

$$\log \text{MR} \to -\log \tau - \log \omega \tag{8-4.26}$$

que es la expresión de una línea recta en una gráfica log-log de MR contra ω; esta línea recta tiene una pendiente de -1. Ahora es necesario determinar la posición de la recta en la gráfica. La manera más simple de hacerlo es encontrando dónde se cortan las asíntotas de alta y baja frecuencias. Se sabe que cuando $\omega \to 0$, MR $\to 1$, de modo que

$$\log \text{MR} \to 0$$

Igualando esta expresión con la ecuación 8-4.26 se obtiene

$$\omega = \frac{1}{\tau} \tag{8-4.27}$$

Ésta es la frecuencia, llamada *frecuencia de esquina* (ω_c) o *frecuencia de ruptura*, en la que las asíntotas se cortan, como se muestra en la figura 8-4.3*b*. También es en esta frecuencia en la que ocurre el error máximo entre la respuesta de frecuencia y las asíntotas. La relación de magnitud real es

$$\text{MR} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

y no MR = 1 como lo indican las asíntotas.

Antes de dejar la gráfica de Bode para este sistema, es necesario examinar θ a bajas y altas frecuencias. A bajas frecuencias, $\omega \rightarrow 0$,

$$\theta \rightarrow -\tan^{-1}(\omega\tau) = -\tan^{-1}(0) = 0$$

A altas frecuencias, $\omega \rightarrow \infty$,

$$\theta \rightarrow -\tan^{-1}(\infty) = -90°$$

Estos valores del ángulo de fase, 0° y −90°, son las asíntotas en la gráfica del ángulo de fase. En la frecuencia de esquina,

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}, \qquad \theta = \tan^{-1}(1) = -45°$$

Para resumir, las características importantes de la gráfica de Bode para retardos de primer orden son las siguientes:

1. ***Gráfica de AR (MR).*** La asíntota de bajas frecuencias tiene pendiente 0, mientras que la asíntota de altas frecuencias tiene pendiente −1. La frecuencia de esquina, donde estas dos asíntotas se cortan, ocurre en $1/\tau$.
2. ***Gráfica del ángulo de fase.*** A bajas frecuencias, el ángulo de fase tiende a 0°, mientras que a altas frecuencias tiende a −90°. En la frecuencia de esquina, el ángulo de fase es −45°.

Retardo de segundo orden Tal como se muestra en el ejemplo 8-4.1, las expresiones para AR y θ para un retardo de segundo orden están dadas por las ecuaciones 8-4.14 y 8-4.15, respectivamente. De la ecuación para AR se obtiene

$$\text{MR} = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2\tau^2)^2 + (2\tau\zeta\omega)^2}}$$

y

$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{2\tau\zeta\omega}{1-\omega^2\tau^2}\right) \tag{8-4.15}$$

Asignando valores a ω para τ y ζ dadas, la respuesta de frecuencia se determina como se muestra en la figura 8-4.3*d*.

Las asíntotas se obtienen de manera similar que para un retardo de primer orden. A bajas frecuencias, $\omega \rightarrow 0$,

$$\text{MR} \rightarrow 1$$

y

$$\theta \rightarrow 0°$$

A altas frecuencias, $\omega \rightarrow \infty$,

$$\log \text{MR} = -\frac{1}{2}\log[(1-\omega^2\tau^2)^2 + (2\tau\zeta\omega)^2]$$

$$\log \text{MR} = -\frac{1}{2}\log(\omega^2\tau^2)^2 = -2\log\omega - 2\log\tau$$

que es la expresión de una línea recta con pendiente –2. En estas altas frecuencias,

$$\theta \rightarrow -\pi \quad (-180°)$$

Para encontrar la frecuencia de esquina, ω_c, se sigue el mismo procedimiento que para un retardo de primer orden. Se obtiene así

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}$$

Nótese en la figura 8-4.3*d* que la transición de la respuesta de frecuencia de bajas a altas frecuencias depende de ζ.

En la frecuencia de esquina,

$$\theta = -\tan^{-1}(\infty) = -\frac{\pi}{2} \quad (-90°)$$

Para resumir, las características importantes de la gráfica de Bode para un retardo de segundo orden son:

1. ***Gráfica de AR (MR).*** La pendiente de la asíntota de bajas frecuencias es 0, y la de la asíntota de altas frecuencias es –2. La frecuencia de esquina, ω_c, ocurre en $1/\tau$. La transición de la AR de bajas a altas frecuencias depende del valor de ζ.
2. ***Gráfica del ángulo de fase.*** A bajas frecuencias, el ángulo de fase tiende a 0°, mientras que a altas frecuencias tiende a –180°. En la frecuencia de esquina, el ángulo de fase es –90°.

Tiempo muerto Como se vio en el ejemplo 8-4.3, las expresiones para AR y θ para un tiempo muerto puro están dadas por las ecuaciones 8-4.19 y 8-4.20, respectivamente

$$\text{AR} = \text{MR} = 1 \tag{8-4.19}$$

y

$$\theta = -\omega t_0 \tag{8-4.20a}$$

La gráfica de Bode se muestra en la figura 8-4.3*c*. Nótese que a medida que la frecuencia aumenta, el ángulo de fase se hace más negativo. Entre mayor sea el valor del tiempo muerto, con mayor rapidez disminuirá el ángulo de fase (se hará más negativo) sin límite.

Adelanto de primer orden Como se vio en el ejemplo 8-4.2, las expresiones para AR y θ para un adelanto de primer orden están dadas por las ecuaciones 8-4.17 y 8-4.18, respectivamente. De la ecuación para AR se obtiene

$$\text{MR} = \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

y

$$\theta = \tan^{-1}(\omega\tau) \tag{8-4.18}$$

La gráfica de Bode se muestra en la figura 8-4.3*e*. Nótese que la asíntota para bajas frecuencias tiene pendiente 0, y la asíntota para altas frecuencias tiene pendiente +1. A bajas frecuencias, el ángulo de fase tiende a 0°, mientras que a altas frecuencias tiende a +90°. En la frecuencia de esquina, el ángulo de fase es +45°. Así, un adelanto de primer orden produce un "adelanto de fase".

Integrador Como se vio en el ejemplo 8-4.4, las expresiones para AR y θ para un integrador están dadas por las ecuaciones 8-4.21 y 8-4.22, respectivamente

$$\text{AR} = \text{MR} = \frac{1}{\omega} \tag{8-4.21}$$

y

$$\theta = -90° \tag{8-4.22}$$

La gráfica de Bode se muestra en la figura 8-4.3*f*. Nótese que la gráfica de MR consiste en una línea recta con pendiente −1. Esto se establece fácilmente tomando el logaritmo de la ecuación 8-4.21:

$$\log \text{MR} = -\log \omega$$

Esta ecuación también indica que MR = 1 para ω = 1 radianes/tiempo.

Desarrollo de la gráfica de Bode para sistemas complejos La mayoría de las funciones de transferencia complejas de sistemas de procesos están formadas por el producto de componentes más simples. A continuación se examina la gráfica de Bode de estas funciones de transferencia complejas. Considérese la ecuación 8-4.23 como un ejemplo. Por la expresión para AR, ecuación 8-4.24, se obtiene

$$\log \mathrm{AR} = \log K + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \log[(\tau_i \omega)^2 + 1] - k \log \omega - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \log[(\tau_j \omega)^2 + 1] \qquad \textbf{(8-4.28)}$$

o bien,

$$\log \mathrm{MR} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \log[(\tau_i \omega)^2 + 1] - k \log \omega - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \log[(\tau_j \omega)^2 + 1] \qquad \textbf{(8-4.29)}$$

Estas ecuaciones, junto con la ecuación 8-4.25, muestran que la gráfica de Bode de sistemas complejos consiste en la suma de los componentes individuales. Para obtener la asíntota compuesta, se suman las asíntotas individuales.

Ejemplo 8-4.5 Considérese la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K(s+1)e^{-s}}{s(2s+1)(3s+1)}$$

Solución Usando los principios aprendidos

$$\mathrm{MR} = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega\sqrt{4\omega^2 + 1}\sqrt{9\omega^2 + 1}}$$

o bien,

$$\log \mathrm{MR} = \frac{1}{2}\log(\omega^2 + 1) - \log(\omega) - \frac{1}{2}\log(4\omega^2 + 1) - \frac{1}{2}\log(9\omega^2 + 1)$$

y

$$\theta = \tan^{-1}(\omega) - \omega t_0 - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(2\omega) - \tan^{-1}(3\omega)$$

Por las dos últimas ecuaciones, la gráfica de Bode se desarrolla como se muestra en la figura 8-4.4. A bajas frecuencias, $\omega < 0.33$ y la pendiente es -1, debido al término del integrador. Cuando $\omega = 0.33$, uno de los retardos de primer orden comienza a contribuir a la gráfica y por

tanto la pendiente cambia a −2 a esta frecuencia. Cuando $\omega = 0.5$, el otro retardo de primer orden comienza a contribuir, cambiando la pendiente de la asíntota a −3. Finalmente, cuando $\omega = 1$ el adelanto de primer orden entra con una pendiente de +1, y la pendiente de la asíntota cambia de nuevo a −2. Del mismo modo, la gráfica del ángulo de fase compuesto se obtiene algebraicamente sumando los ángulos individuales.

Puede hacerse un comentario final acerca de las pendientes de las asíntotas a bajas y altas frecuencias (pendientes inicial y final) y de los ángulos de las gráficas de Bode. Considérese una función de transferencia general tal como

$$G(s) = \frac{K(a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + 1)}{s^k (b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + 1)}; (n+k) > m$$

La pendiente de la asíntota a bajas frecuencias está dada por

$$\text{pendiente de AR(MR)}\Big|_{\omega \to 0} \to (-1)k$$

y el ángulo

$$\theta\Big|_{\omega \to 0} \to (-90°)k$$

La pendiente de la asíntota a altas frecuencias está dada por

$$\text{pendiente de AR(MR)}\Big|_{\omega \to \infty} \to (n+k-m)(-1)$$

y el ángulo

$$\theta\Big|_{\omega \to \infty} \to (n+k-m)(-90°)$$

La mayor parte de los sistemas sigue estas pendientes y ángulos; estos sistemas se denominan *sistemas de fase mínima.* Sin embargo, hay tres excepciones que se conocen como *sistemas de fase no mínima.* Estas excepciones son:

1. Los sistemas con tiempo muerto: $G(s) = e^{-t_0 s}$ (el ángulo de fase disminuye sin límite).
2. Los sistemas que presentan respuesta inversa (ceros positivos): $G(s) = (1 - \tau_1 s)/(1 + \tau_2 s)$. Un ejemplo de un proceso con este tipo de respuesta se presenta en el capítulo 4.

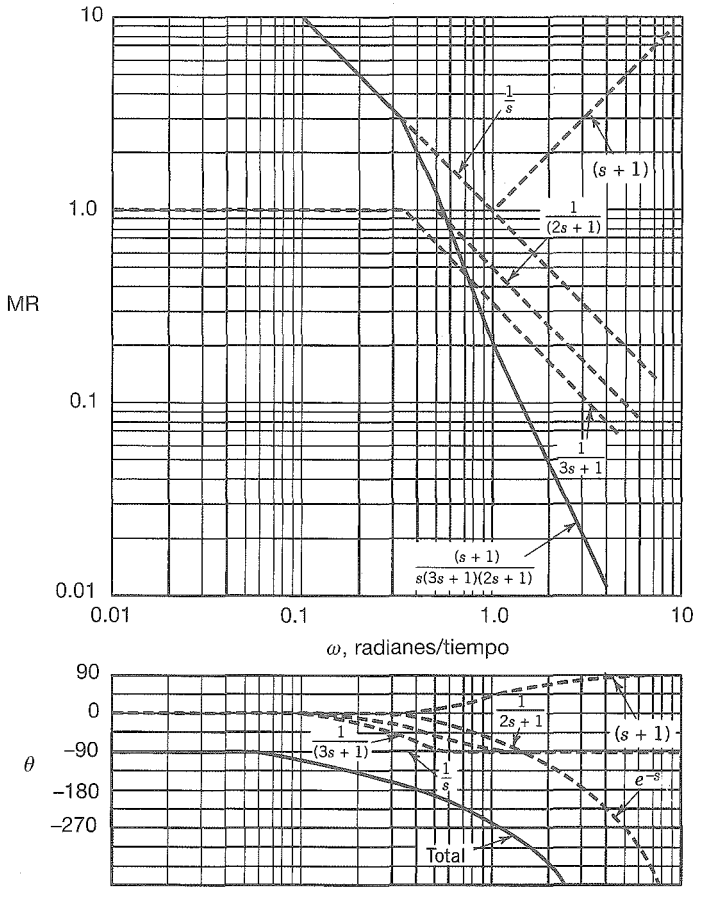


Figura 8-4.4 Gráfica de Bode de $G(s) = \dfrac{K(s+1)e^{-s}}{s(2s+1)(3s+1)}$.

3. Los sistemas que son inestables en lazo abierto (polos positivos): $G(s) = 1/(\tau s - 1)$. Un ejemplo de un proceso con este tipo de respuesta también se presenta en el capítulo 4.

En cada uno de estos casos, la gráfica de la relación de magnitud no cambia, pero sí la gráfica del ángulo de fase. El término del tiempo muerto se presentó con anterioridad; la gráfica de Bode de los otros dos sistemas es el tema de uno de los problemas del final de este capítulo.

La expresión para la pendiente de la asíntota a altas frecuencias también sirve para establecer por qué las funciones de transferencia de sistemas reales deben tener al menos tantos retardos como adelantos. Si $(n + k - m) < 0$, entonces la pendiente final es positiva y el ruido de alta frecuencia es amplificado con ganancia infinita.

En el ejemplo 8-4.5 se vio cómo obtener la gráfica de Bode usando principalmente las asíntotas. Para una gráfica más precisa se usan las expresiones para AR, o MR, y θ. Hay varios

programas de computadora, tales como MATLAB (referencia 2), que producen la gráfica de Bode dada la función de transferencia.

8-4.2 Criterio de estabilidad usando la respuesta de frecuencia

En el capítulo 6 se presentaron dos métodos para determinar los límites de estabilidad de un lazo de control por retroalimentación: la sustitución directa y la prueba de Routh. Sin embargo, como se vio ahí, ninguno de estos métodos puede manejar la presencia de tiempo muerto en el lazo excepto a través de aproximaciones. La respuesta de frecuencia ayuda a determinar los límites de estabilidad para lazos por retroalimentación aun cuando haya tiempo muerto en el lazo. El criterio de estabilidad usando la respuesta de frecuencia consiste en determinar la frecuencia a la que el ángulo de fase de la función de transferencia de lazo abierto (OLTF) es $-180°$ ($-\pi$ radianes), así como la relación de amplitud de la OLTF a esa frecuencia.

Considérese el lazo de control de temperatura del intercambiador de calor presentado en el ejemplo 6-2.1. Por conveniencia, el intercambiador se muestra de nuevo en la figura 8-4.5 y su diagrama de bloques en la figura 8-4.6. La función de transferencia de lazo abierto es

$$\text{OLTF} = \frac{0.8K_c}{(10s+1)(30s+1)(3s+1)}$$

Las expresiones para MR y θ son

$$\text{MR} = \frac{\text{AR}}{0.8K_c} = \frac{1}{\sqrt{(10\omega)^2+1}\sqrt{(30\omega)^2+1}\sqrt{(3\omega)^2+1}} \tag{8-4.30}$$

$$\theta = -\tan^{-1}(10\omega) - \tan^{-1}(30\omega) - \tan^{-1}(3\omega) \tag{8-4.31}$$

La gráfica de Bode se muestra en la figura 8-4.7. Por esta figura, o por la ecuación 8-4.31, la frecuencia a la que $\theta = -180°$ (o $-\pi$ radianes) es 0.219 rad/s. A esta frecuencia, por la gráfica de MR o por la ecuación 8-4.30,

$$\frac{\text{AR}}{0.8K_c} = 0.0524$$

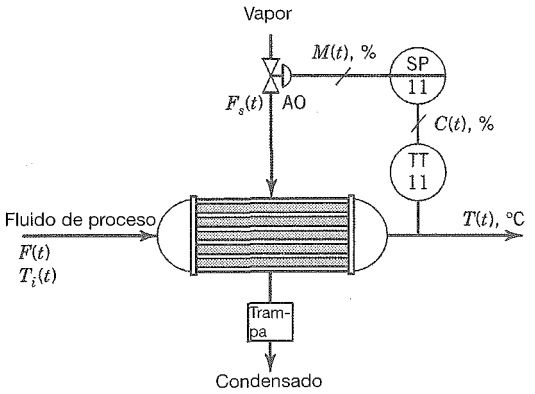


Figura 8-4.5 Lazo de control por retroalimentación para el control de temperatura del intercambiador de calor.

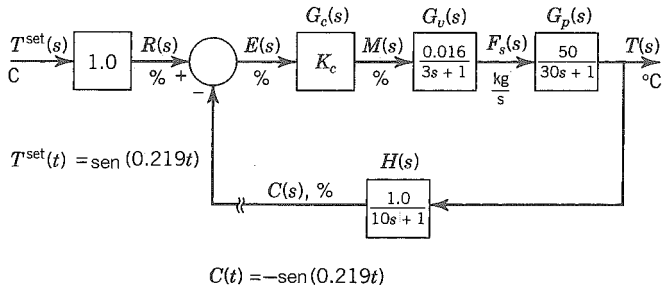


Figura 8-4.6 Diagrama de bloques del lazo de control de temperatura del intercambiador de calor: controlador P.

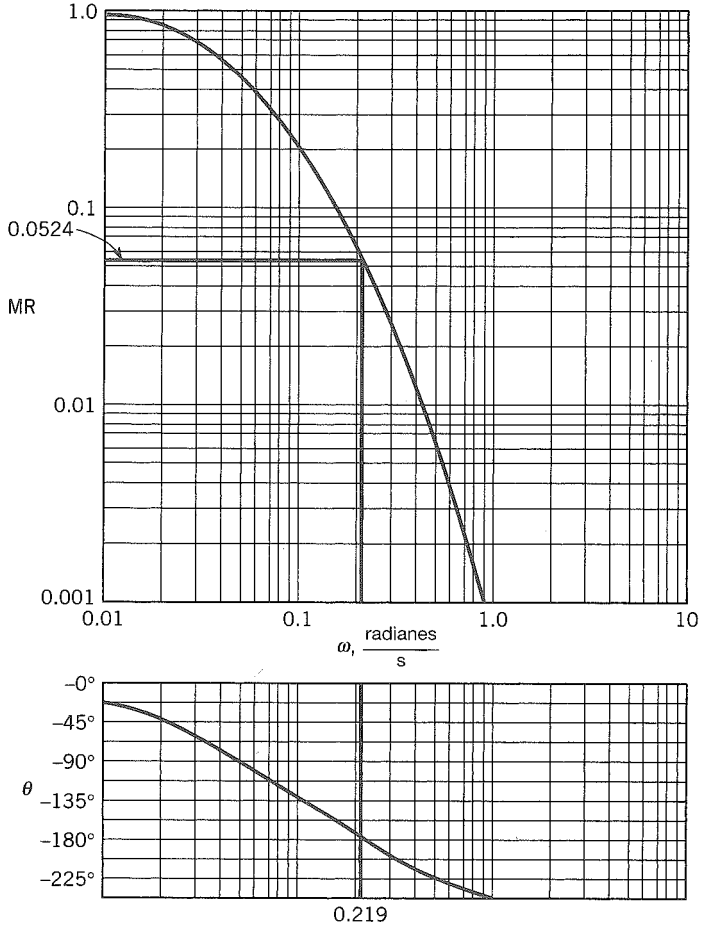


Figura 8-4.7 Gráfica de Bode del lazo de control de temperatura del intercambiador de calor: controlador P.

La ganancia del controlador que produce el valor AR = 1 es

$$K_c = \frac{\text{AR}}{0.8(0.0524)} = \frac{1}{0.8(0.0524)} = 23.8\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

Estos cálculos son muy significativos. El valor K_c = 23.8 %CO/%TO es la ganancia del controlador que produce AR = 1 cuando el ángulo de fase es −180°. Recuérdese que AR se define como el cociente de la amplitud de la señal de salida y la amplitud de la señal de entrada, Y_0/X_0. Esto significa que si la referencia de la entrada al controlador de temperatura se hace variar como sigue

$$T^{\text{set}}(t) = \text{sen}(0.219t)$$

entonces la señal de salida del transmisor, una vez que desaparecen los estados transitorios, variará como sigue

$$\text{TO}(t) = \text{sen}(0.219t - \pi) = -\text{sen}(0.219t)$$

Nótese que la señal de retroalimentación está desconectada del controlador, como se muestra en el diagrama de bloques de la figura 8-4.6, y que la frecuencia de oscilación de la referencia es 0.219 rad/s. Ésta es la frecuencia a la cual $\theta = -180° = -\pi$ radianes y, cuando la ganancia del controlador es 23.8, AR = 1. Bajo estas condiciones, la amplitud de la señal de salida es igual a la de la señal de entrada.

Supóngase ahora que en algún instante, $t = 0$, las oscilaciones de la referencia se detienen, $T^{\text{set}}(t) = 0$, y que al mismo tiempo la señal del transmisor se conecta al controlador. La señal de error, $E(s)$, dentro del controlador permanece sin cambio, y las oscilaciones se mantienen. Si nada cambia en el lazo de control, las oscilaciones se mantendrán de manera indefinida. Si en cierto tiempo la ganancia del controlador se incrementa ligeramente a 25, la relación de amplitud cambia a 1.04

$$\text{AR} = 0.0524(0.8)K_c$$
$$\text{AR} = 0.0524(0.8)(25) = 1.04$$

Esto significa que la señal se amplifica cuando pasa por el lazo de control. Después del primer tiempo, la señal de salida del transmisor es −1.04 sen(0.219t). Después del segundo tiempo, es $-(1.04)^2$ sen(0.219t), y así sucesivamente. Si esto no se detiene, la temperatura de salida aumentará de manera continua, generando un lazo de control inestable.

Por otra parte, si la ganancia del controlador se reduce ligeramente a 23, la relación de amplitud cambia a 0.96

$$\text{AR} = 0.0524(0.8)23 = 0.96$$

Esto significa que la amplitud de la señal se reduce cuando pasa por el lazo de control. Después del primer tiempo, la señal de salida del transmisor es $-0.96\ \text{sen}(0.219t)$. Después del segundo tiempo es $-(0.96)^2\ \text{sen}(0.219t)$, y así sucesivamente. Esto resulta en un lazo de control estable.

En resumen, el criterio de estabilidad basado en la respuesta de frecuencia puede enunciarse como sigue:

> *Para que un sistema de control sea estable, la relación de amplitud debe ser menor que la unidad cuando el ángulo de fase es* $-180°$ *(*$-\pi$ *radianes). Si* $AR < 1$ *para* $\theta = -180°$, *el sistema es estable; si* $AR > 1$ *para* $\theta = -180°$, *el sistema es inestable.*

La ganancia del controlador que produce la condición AR = 1 para $\theta = -180°$ es la ganancia última, K_{cu}. La frecuencia a la que ocurre esta condición es la frecuencia última, ω_u. A partir de esta frecuencia el periodo último se puede calcular como $T_u = 2\pi/\omega_u$. Nótese que los valores de la ganancia última y la frecuencia última obtenidos en este ejemplo son los mismos que se obtuvieron en el ejemplo 6-2.1 por sustitución directa.

Antes de continuar con más ejemplos, es necesario enfatizar que la ganancia última y la frecuencia última se pueden obtener directamente de las ecuaciones para MR y θ, las ecuaciones 8-4.29 y 8-4.30 para este ejemplo, sin necesidad de la gráfica de Bode. La gráfica de Bode se desarrolló usando estas ecuaciones. La determinación de ω_u requiere un poco de ensayo y error utilizando la ecuación para θ, es decir, requiere encontrar el valor de ω que produce $\theta = -180°$. Este valor de ω es ω_u. Una vez que se ha determinado ω_u, se utiliza la ecuación para AR para encontrar K_{cu}. El procedimiento completo suele ser más rápido y produce resultados más exactos que trazar la gráfica de Bode. El uso de la gráfica de Bode sigue siendo de utilidad pues muestra a simple vista cómo varían AR y θ cuando la frecuencia cambia.

Los siguientes ejemplos ampliarán la práctica con esta poderosa técnica.

Ejemplo 8-4.6 Considérese el mismo intercambiador de calor (figura 8-4.5) utilizado previamente para presentar el criterio de estabilidad basado en la respuesta de frecuencia. Suponer ahora que, por alguna razón, la temperatura de salida no se puede medir a la salida del intercambiador sino que debe medirse bastante más adelante en la tubería. El efecto de esta nueva ubicación del sensor es la adición de algo de tiempo muerto, digamos 2 s, al lazo de control.

La nueva OLTF es

$$\text{OLTF} = \frac{0.8K_c e^{-2s}}{(10s+1)(30s+1)(3s+1)}$$

con

$$\text{MR} = \frac{\text{AR}}{0.8K_c} = \frac{1}{\sqrt{(10\omega)^2+1}\sqrt{(30\omega)^2+1}\sqrt{(3\omega)^2+1}}$$

y

$$\theta = -2\omega - \tan^{-1}(10\omega) - \tan^{-1}(30\omega) - \tan^{-1}(3\omega)$$

Las dos últimas ecuaciones se pueden utilizar para determinar la ganancia última y la frecuencia última. Realizando estos cálculos se obtiene, para $\theta = -\pi$ radianes,

$$\omega_u = 0.160 \text{ rad/s}$$

y

$$K_{cu} = 12.8$$

La gráfica de Bode se muestra en la figura 8-4.8.

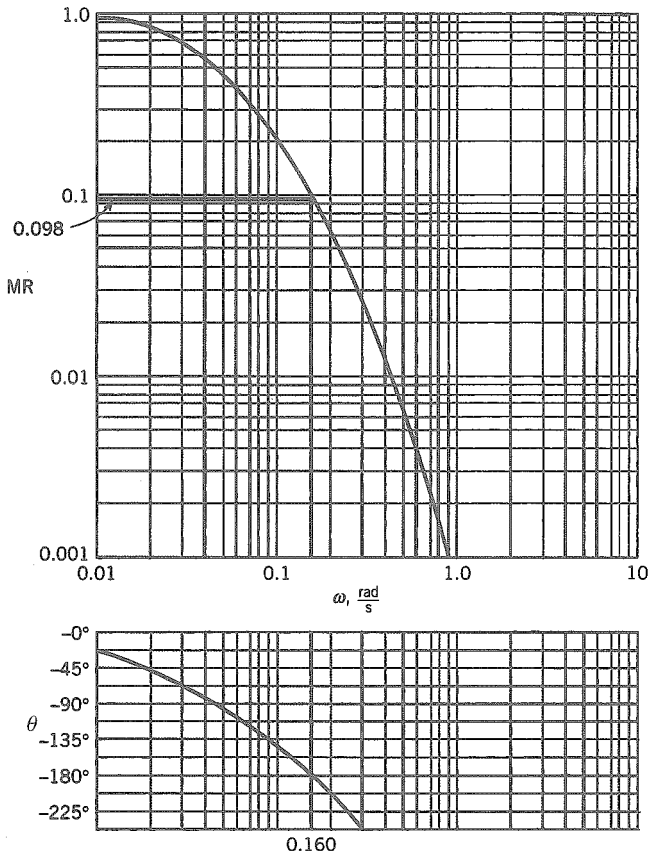


Figura 8-4.8 Gráfica de Bode del control de temperatura del intercambiador de calor con tiempo muerto: controlador P.

Los resultados del ejemplo 8-4.6 muestran el efecto del tiempo muerto sobre la estabilidad (y por consiguiente también sobre la controlabilidad) del lazo de control. La ganancia última y el periodo límite para el intercambiador de calor sin tiempo muerto se habían calculado ya como

$$K_{cu} = 23.8 \frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}} \quad \text{y} \quad \omega_u = 0.219 \text{ rad/s}$$

Cuando se agregó el tiempo muerto de 2 s en el ejemplo 8-4.6, los resultados fueron

$$K_{cu} = 12.8\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}} \quad \text{y} \quad \omega_u = 0.160 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto, es más fácil que el proceso con tiempo muerto se haga inestable. La diferencia en ω_u también indica que la respuesta de lazo cerrado de un proceso con tiempo muerto es más lenta que la de un proceso sin tiempo muerto.

El ejemplo anterior establece que el criterio de estabilidad por respuesta de frecuencia puede analizar exactamente el efecto del tiempo muerto en el lazo de control. Como se mencionó en capítulos anteriores, el tiempo muerto es lo peor que puede ocurrir en cualquier lazo de control; este ejemplo lo demuestra. El término tiempo muerto "agrega un retraso de fase" al lazo de control y, en consecuencia, el ángulo de fase cruza el valor de $-180°$ a una frecuencia más baja. Entre mayor sea el tiempo muerto, menores serán la frecuencia última y la ganancia última.

En el ejemplo 8-3.1 se vio que la adición del modo integral a un controlador proporcional reduce la frecuencia última y la ganancia última. Esto se puede explicar, desde el punto de vista de la respuesta de frecuencia, diciendo que la adición del modo integral "agrega un retraso de fase" en el lazo de control. Un controlador sólo proporcional tiene un ángulo de fase de 0°, como se muestra en la figura 8-4.3*a*. Considérese ahora un controlador proporcional integral

$$G(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) = K_c\left(\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s}\right)$$

Esta función de transferencia se compone de un término de adelanto, $\tau_I s + 1$, y un término integrador, $1/\tau_I s$. A bajas frecuencias, $\omega \ll 1/\tau_I$, el término de adelanto no afecta al ángulo de fase, pero el término integrador contribuye con $-90°$, agregando así un retraso de fase. A frecuencias más altas, $\omega \gg 1/\tau_I$, el término de adelanto cancela el término integrador, con un ángulo de fase resultante de 0°. Sin embargo, a menos que el tiempo integral sea muy grande, este efecto de cancelación ocurre a una frecuencia más alta que aquella en la que el ángulo de fase cruza $-180°$. Por lo tanto, el lazo con el controlador PI tendrá frecuencia última y ganancia última menores que las que tiene un controlador P.

Recuérdese que el modo integral en un controlador es el que elimina el corrimiento. Sin embargo, como se explicó en el párrafo anterior, su uso incorpora un retraso de fase en el lazo.

El siguiente ejemplo muestra el efecto del modo derivativo sobre la estabilidad de un lazo de control.

Ejemplo 8-4.7 Considérese el mismo lazo de control del intercambiador de calor, sin tiempo muerto, con un controlador proporcional derivativo. Suponer que el tiempo derivativo es 0.25 min. (15 s). Como se mostró en el capítulo 5, la ecuación para el controlador PD "real" es

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{1 + \tau_D s}{1 + \alpha\tau_D s}\right)$$

o, para este ejemplo, usando $\alpha = 0.1$

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{1+15s}{1+1.5s}\right)$$

La OLTF es entonces

$$\text{OLTF} = \frac{0.8K_c(1+15s)}{(10s+1)(30s+1)(3s+1)(1+1.5s)}$$

con

$$\text{MR} = \frac{\text{AR}}{0.8K_c} = \frac{\sqrt{(15\omega)^2+1}}{\sqrt{(10\omega)^2+1}\sqrt{(30\omega)^2+1}\sqrt{(3\omega)^2+1}\sqrt{(1.5\omega)^2+1}}$$

y

$$\theta = \tan^{-1}(15\omega) - \tan^{-1}(10\omega) - \tan^{-1}(30\omega) - \tan^{-1}(3\omega) - \tan^{-1}(1.5\omega)$$

La gráfica de Bode para este sistema se muestra en la figura 8-4.9. Comparando esta gráfica de Bode con la de la figura 8-4.7, se observa que la gráfica del ángulo de fase se ha "movido hacia arriba"; la acción derivativa "agrega un adelanto de fase". Se encuentra que para este sistema la ganancia última y el periodo último son

$$K_{cu} = 33\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}} \qquad \text{y} \qquad \omega_u = 0.53\ \text{rad/s}$$

Por tanto, estos resultados muestran que el modo derivativo hace al lazo de control más estable y más rápido.

En el ejemplo y el análisis anterior se usaron los términos *ganancia última* y *frecuencia última* para controladores que no son proporcionales. Sin embargo, la ganancia última y el periodo último utilizados en la sintonización siguen estando definidos sólo para controladores proporcionales.

En los ejemplos presentados en esta sección se ha mostrado el uso de la respuesta de frecuencia para el análisis de lazos de control. Estos ejemplos también han mostrado el efecto de diferentes términos, tiempo muerto y modo derivativo sobre la estabilidad de los lazos de control.

El criterio de estabilidad por respuesta de frecuencia confirma que los lazos de control con funciones de transferencia de lazo abierto de primer o segundo orden puras (sin tiempo muerto) nunca se harán inestables; sus ángulos de fase nunca caerán por debajo de $-180°$. Una vez que se agrega el tiempo muerto, sin importar lo pequeño que sea, el sistema se puede hacer inestable debido a que el ángulo de fase siempre cruzará el valor de $-180°$.

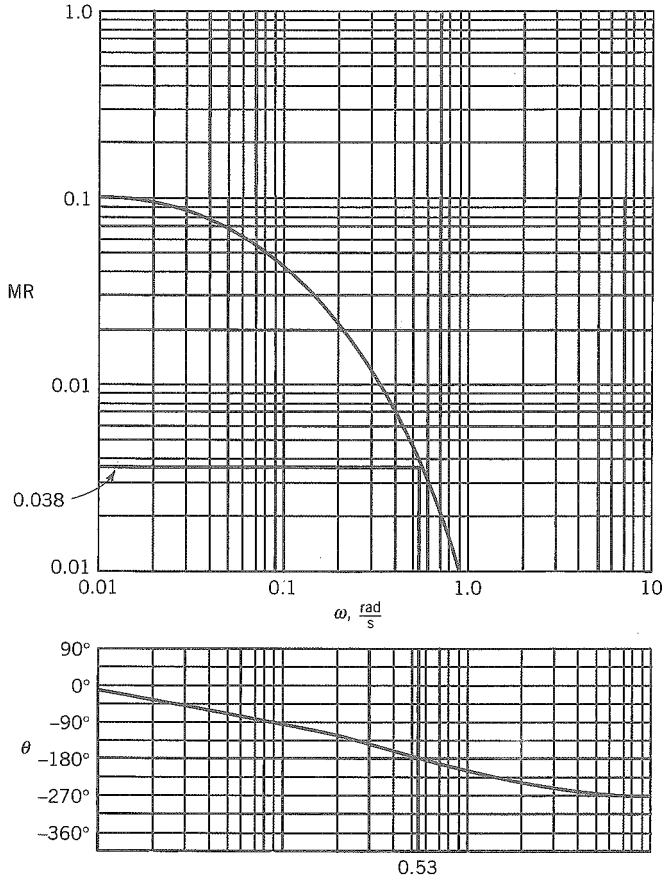


Figura 8-4.9 Gráfica de Bode del lazo de control de temperatura del intercambiador de calor: controlador PD.

Especificaciones de desempeño para controladores

En el capítulo 7 se presentaron varias maneras de sintonizar controladores para obtener el desempeño deseado de un lazo de control. Los métodos presentados fueron el de Ziegler-Nichols (razón de asentamiento de un cuarto), el criterio de la integral del error (IAE, ISE e ITAE) y la síntesis del controlador. La respuesta de frecuencia proporciona un procedimiento para obtener la ganancia última y la frecuencia última de un lazo de control. Una vez que se determinan estos términos, se pueden usar las ecuaciones de Ziegler-Nichols para sintonizar el controlador. Las técnicas de respuesta de frecuencia proporcionan otras especificaciones de desempeño para sintonizar controladores: el margen de ganancia y el margen de fase. Se basan en la respuesta de frecuencia de la función de transferencia de lazo abierto (OLTF).

Margen de ganancia El *margen de ganancia* (GM) es una especificación de desempeño típica asociada con la técnica de respuesta de frecuencia. El margen de ganancia representa el factor por el que debe incrementarse la ganancia total del lazo de control para hacer el sistema apenas inestable. La ganancia del controlador que produce un margen de ganancia deseado se calcula como sigue

$$K_c = \frac{K_{cu}}{\text{GM}} = \frac{1}{K(\text{GM})\text{MR}\big|_{\theta=-180°}} \tag{8-4.32}$$

donde K es el producto de las ganancias de todos los demás elementos en el lazo. La especificación típica es para GM $\geq$ 2. Nótese que la sintonización de un controlador proporcional con GM = 2 es igual a la sintonización de Ziegler-Nichols para una razón de asentamiento de un cuarto presentada en el capítulo 7.

Margen de fase El *margen de fase* (PM) es otra especificación comúnmente asociada con la técnica de respuesta de frecuencia. El margen de fase es la diferencia entre $-180°$ y el ángulo de fase en la frecuencia para la que la relación de amplitud (AR) es la unidad. Es decir,

$$\text{PM} = 180° + \theta\big|_{\text{AR}=1} \tag{8-4.33}$$

PM representa la cantidad de retraso de fase adicional requerido para hacer inestable el sistema. La especificación típica es para PM > 45°.

Ejemplo 8-4.8 Considérese el intercambiador de calor del ejemplo 8-4.6. Sintonizar un controlador proporcional para: **a)** GM = 2, y **b)** PM = 45°.

Solución **a)** En el ejemplo 8-4.6 se determinó la ganancia última del controlador como K_c = 12.8. Para obtener la especificación GM de 2, la ganancia del controlador se ajusta en

$$K_c\big|_{\text{GM}=2} = \frac{K_{cu}}{2} = 6.4\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

b) En el ejemplo 8-4.6 se determinó que las expresiones para MR y θ son

$$\text{MR} = \frac{\text{AR}}{0.8K_c} = \frac{1}{\sqrt{(10\omega)^2+1}\sqrt{(30\omega)^2+1}\sqrt{(3\omega)^2+1}}$$

y

$$\theta = -(2\omega t_0) - \tan^{-1}(10\omega) - \tan^{-1}(30\omega) - \tan^{-1}(3\omega)$$

Con base en la definición de margen de fase, para PM = 45°, $\theta = -135°$. Usando la ecuación para θ, o la gráfica de Bode de la figura 8-4.8, la frecuencia para este ángulo de fase es

$$\omega\big|_{\text{PM}=45°} = 0.087\,\text{rad/s}$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación para la relación de magnitud, se obtiene

$$\frac{\text{AR}}{0.8K_c} = 0.261$$

$$K_c\big|_{PM=45°} = \frac{\text{AR}}{0.8(0.261)} = \frac{1}{0.8(0.261)} = 4.8\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}}$$

En el ejemplo 8-4.8 se mostró cómo obtener la sintonización para un controlador por retroalimentación para ciertos valores de GM y PM. En el inciso **a**) el controlador se sintonizó para proporcionar un lazo de control con GM de 2. Esto significa que la ganancia del lazo completo debe aumentar (debido a las no linealidades del proceso o por cualquier otra razón) por un factor de 2 antes de llegar a la inestabilidad. Al elegir el valor de GM, el ingeniero debe entender el proceso para decidir cuánto puede cambiar la ganancia del proceso en el rango de operación. Con base en este conocimiento, el ingeniero puede elegir un valor realista para GM. Entre mayor sea el valor de GM seleccionado, mayor será el "factor de seguridad" incorporado en el diseño del sistema de control. Sin embargo, entre más grande sea este factor de seguridad, menor será la ganancia del controlador resultante y, por tanto, menor será la sensibilidad del controlador a errores.

En el inciso **b**) del ejemplo, el controlador se sintonizó para producir un PM de 45°. Esto significa que tendría que agregarse un retraso de fase de 45° en el lazo de control antes de hacerlo inestable. Los cambios en el ángulo de fase del lazo de control se deben principalmente a cambios en sus términos dinámicos, las constantes de tiempo y el tiempo muerto debido a las no linealidades del proceso.

El margen de ganancia y el margen de fase son dos criterios de desempeño diferentes. La elección de uno de ellos como criterio de desempeño para un lazo particular depende del proceso por controlar. Si, debido a las características y las no linealidades del proceso, se espera que la ganancia cambie más que los términos dinámicos, entonces el GM pudiese ser el criterio indicado. Si, por el contrario, se espera que los términos dinámicos cambien más que la ganancia, entonces el PM puede ser el criterio indicado.

En esta sección se presentó el significado de margen de ganancia y margen de fase, así como la manera de sintonizar controladores por retroalimentación con base en estas especificaciones de desempeño. Sin embargo, en los procesos industriales se prefieren casi exclusivamente las especificaciones de desempeño del capítulo 7.

8-5 RESUMEN

En este capítulo se presentaron las técnicas del lugar de las raíces y de la respuesta de frecuencia para el análisis y diseño de sistemas de control por retroalimentación. La respuesta de frecuencia puede manejar la presencia de tiempo muerto de manera directa, sin aproximaciones.

Habiendo estudiado el diseño y análisis de sistemas de control por retroalimentación, en los próximos capítulos se examinan otras importantes estrategias de control de uso común en la industria.

REFERENCIAS

1. Smith, C. A., y A. B. Corripio, *Control automático de procesos. Teoría y práctica.* Cap. 8, Editorial Limusa, México.
2. MATLAB, The MathWorks, Inc., Cochituate Place, 24 Prime Park Way, Natick, MA 01760-1520.
3. TK Solver, Universal Technical Systems, 1220 Rock Street, Rockford, IL 61101.
4. MATHCAD, MathSoft, Inc., 101 Main Street, Cambridge, MA 02142.

PROBLEMAS

8-1. Trazar el diagrama del lugar de las raíces para cada una de las siguientes funciones de transferencia de lazo abierto:

a) $G(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(4s+1)}$

b) $G(s) = \dfrac{K(3s+1)}{(2s+1)}$

c) $G(s) = K\left(1+\dfrac{1}{2s}\right)\left(\dfrac{0.5s+1}{0.05s+1}\right)$

8-2. Trazar la gráfica del lugar de las raíces para las dos funciones de transferencia de lazo abierto siguientes:

a) El sistema con respuesta inversa

$$G(s) = \frac{K(1-0.25s)}{(2s+1)(s+1)}$$

b) El sistema inestable en lazo abierto

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s+1)(1-\tau_2 s)}$$

para dos casos: $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 1$, y $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1$.

8-3. Considérese el sistema de control de presión de la figura P8-1. La presión en el tanque se puede describir con

$$\frac{P(s)}{F(s)} = \frac{0.4}{(0.15s+1)(0.8s+1)}, \text{psi/scfm}$$

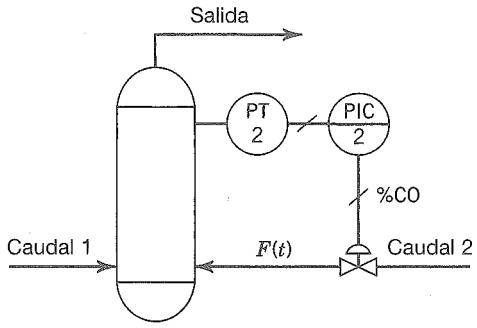


Figura P8-1 Sistema de control de presión para el problema 8-3.

La válvula se puede describir con la siguiente función de transferencia:

$$\frac{F(s)}{M(s)} = \frac{0.6}{0.1s+1}, \text{scfm/\%CO}$$

El transmisor de presión tiene un rango de 0 a 185 psig. La dinámica del transmisor es despreciable.

a) Trazar el diagrama de bloques para este sistema incluyendo todas las funciones de transferencia.
b) Determinar la ganancia última y el periodo último.
c) Explicar gráficamente la manera en que la adición de la acción integral en el controlador afecta la estabilidad del lazo de control. Usar $\tau_I = 0.8$ min.
d) Explicar gráficamente la manera en que la adición de la acción derivativa en el controlador PI del inciso c) afecta la estabilidad del lazo de control.

8-4. La función de transferencia de lazo abierto del problema 7-25 sobre el control del nivel de un tanque usando un controlador PI es

$$\text{OLTF} = K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)\left(\frac{K}{s(\tau s+1)}\right)$$

Trazar el lugar de las raíces para cada uno de los casos siguientes:

a) $\tau_I > \tau$; b) $\tau_I = \tau$; c) $\tau_I < \tau$.

Analizar, con base en las gráficas trazadas, la manera en que la estabilidad del lazo es afectada por la relación entre el tiempo integral del controlador y la constante de tiempo del proceso.

8-5. Considérese la siguiente función de transferencia para un cierto proceso:

$$G(s)H(s) = \frac{1.5}{(s+1)(5s+1)(10s+1)}$$

Sintonizar un controlador sólo proporcional usando como ganancia la mitad de la ganancia última.

8-6. En el ejemplo 8-2.2 se examina la estabilidad de un sistema con un controlador P. Suponer ahora que se utiliza un controlador PD con $\tau_D = 0.2$. Analizar el efecto de incrementar el valor empleado de τ_D utilizando como ejemplo un valor de $\tau_D = 0.5$.

8-7. Trazar las asíntotas de la gráfica de Bode para la relación de magnitud (o relación de amplitud) y hacer un diagrama aproximado del ángulo de fase para las siguientes funciones de transferencia de lazo abierto

a) $G(s) = \dfrac{K}{(s+1)(2s+1)(10s+1)}$

b) $G(s) = \dfrac{K(3s+1)}{(s+1)(2s+1)(10s+1)}$

c) $G(s) = \dfrac{Ke^{-s}}{(s+1)(2s+1)(10s+1)}$

d) $G(s) = \dfrac{K(3s+1)e^{-s}}{(s+1)(2s+1)(10s+1)}$

8-8. Trazar las asíntotas de la gráfica de Bode para la relación de magnitud (o relación de amplitud) y elaborar un diagrama aproximado del ángulo de fase para las funciones de transferencia del problema 8-1.

8-9. Dadas las siguientes funciones de transferencia:

$$G(s) = \frac{4s+1}{s+1} \quad \text{y} \quad G(s) = \frac{1+2s}{(2s+1)(4s+1)}$$

a) Trazar las asíntotas para la parte de la relación de magnitud del diagrama de Bode, marcando las frecuencias de ruptura.

b) Indicar el retardo (o adelanto) de fase a altas frecuencias ($\omega \to \infty$).

8-10. Trazar la gráfica de Bode de las funciones de transferencia del problema 8-4.

8-11. Las asíntotas de la gráfica de relación de amplitud contra la frecuencia para un proceso resultan en el trazo dado en la figura P8-2. La gráfica del ángulo de fase no alcanza una asíntota a altas frecuencias sino que se hace más negativo conforme la frecuencia aumenta. A una frecuencia de 1.0 rad/min, el ángulo de fase es –246°. Proponer una función de transferencia para este proceso y estimar la ganancia, las constantes de tiempo y el tiempo muerto (si lo hay).

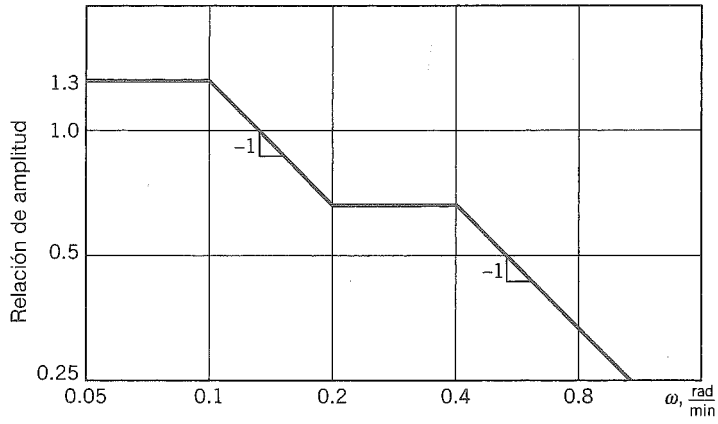


Figura P8-2 Grafica de la relación de amplitud contra la frecuencia para el problema 8-11.

8-12. Considérese el proceso de filtrado al vacío mostrado en la figura P7-1. Para este proceso, usando los datos dados en el problema 7-15 y aplicando las técnicas por respuesta de frecuencia:

a) Trazar las asíntotas de la gráfica de Bode y del ángulo de fase.
b) Obtener la ganancia última, K_{cu}, y el periodo último, T_u.
c) Sintonizar el tiempo integral de un controlador PI usando el método de síntesis del controlador y determinar la ganancia del controlador que produciría un margen de ganancia de 2.

8-13. Considérese el absorbedor presentado en el problema 7-16. En el inciso a) de dicho problema se diseñó un lazo de control por retroalimentación para regular la concentración de amoniaco a la salida. Para este lazo de control:

a) Trazar las asíntotas de la gráfica de Bode y de la gráfica del ángulo de fase.
b) Obtener la ganancia última, K_{cu}, y el periodo último, T_u.
c) Sintonizar un controlador P para un margen de fase de 45°.

8-14. Considérese un proceso con la siguiente función de transferencia:

$$G(s)H(s) = \frac{4.0}{(1s+1)(0.8s+1)(0.2s+1)}$$

Si se usa un controlador PI con ajuste de Ziegler-Nichols, ¿qué margen de ganancia y qué margen de fase se obtienen?

8-15. Repetir el problema 8-14 para la siguiente función de transferencia del proceso:

$$G(s)H(s) = \frac{6(1-s)}{(s+1)(0.5s+1)}$$

8-16. Considérese el diagrama de bloques de la figura P8-3*a*. La entrada $N(s)$ representa ruido que corrompe la señal de salida. Si este ruido es significativo, el control del proceso puede ser difícil. Para mejorar el control de procesos con ruido, es común filtrar la señal de retroalimentación. Una forma típica de filtrar señales es por medio de un dispositivo de filtrado con una función de transferencia de primer orden. Este dispositivo –neumático, electrónico o digital– se instala entre el transmisor y el controlador como se muestra en la figura P8-3*b*. La ganancia del filtro es uno (1) y su constante de tiempo, llamada *constante de tiempo del filtro,* es τ_F. Utilizando las técnicas por respuesta de frecuencia, explicar cómo afecta τ_F el filtrado de la señal de ruido y el desempeño del lazo de control. Específicamente, graficar la ganancia última como una función de τ_F.

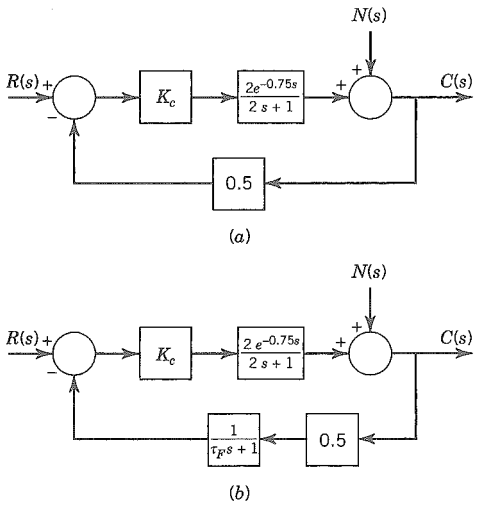


Figura P8-3 Diagramas de bloque para el problema 8-16.

8-17. Considérese un proceso térmico con la siguiente función de transferencia para la salida del proceso contra la señal de salida del controlador:

$$\frac{C(s)}{M(s)} = \frac{0.65e^{-0.35s}}{(5.1s+1)(1.2s+1)}$$

Se aplica al proceso una onda sinusoidal con amplitud unitaria y frecuencia de 0.80 rad/min (las constantes de tiempo y el tiempo muerto están en minutos). Calcular la amplitud y el retraso de fase de la onda sinusoidal a la salida del proceso (después de que las respuestas transientes desaparecen).

8-18. En el ejemplo 6-2.3 se consideró un lazo de control por retroalimentación con un proceso de primer orden más tiempo muerto. El método de sustitución directa, junto con una aproximación del término de tiempo muerto, resultó en fórmulas aproximadas para la ganancia última y la frecuencia última del lazo. Calcular ahora la ganancia última y la frecuencia última para ese sistema utilizando el criterio de estabilidad por respuesta de frecuencia y comparar los resultados con los de las fórmulas aproximadas. Usar $t_0/\tau = 0.1$, 0.2, 0.5, 1.0 y 2.0.

8-19. Usando la respuesta de frecuencia, verificar las ganancias últimas y los periodos últimos para los lazos del problema 6-8.

8-20. Usando la respuesta de frecuencia, verificar los rangos de ganancia del controlador para los que el lazo cerrado es estable para el proceso de lazo abierto inestable del problema 6-10.

8-21. Usando la respuesta de frecuencia, verificar la ganancia última y el periodo último del lazo de la concentración de los tres reactores isotérmicos en serie del problema 6-17.

8-22. Usando la respuesta de frecuencia, verificar la ganancia última y el periodo último del lazo de control de la presión de succión de la compresora del problema 6-18.

Capítulo 9

Control en cascada

En los capítulos 5, 6 y 7 se presentó el diseño de sistemas de control por retroalimentación. Este tipo de control es la estrategia más simple para el control automático de procesos que compensa las perturbaciones en los mismos. Sin embargo, la desventaja del control por retroalimentación es que sólo reacciona después de que el proceso ha sufrido una perturbación. Es decir, si una perturbación entra al proceso, tiene que propagarse a través del mismo, hacer que la variable controlada se desvíe de la referencia, y es hasta entonces que el control por retroalimentación toma alguna acción correctiva. Por tanto, es necesaria una desviación en la variable controlada para iniciar una acción correctiva. Incluso con esta desventaja, probablemente 80% de todas las estrategias de control usadas en la industria son de control por retroalimentación simple. En estos casos, el desempeño del control derivado por retroalimentación es satisfactorio desde el punto de vista de seguridad, la calidad del producto y la tasa de producción.

Cuando los requerimientos de los procesos se hacen más rigurosos, o en procesos con dinámica lenta, o en procesos con gran número de perturbaciones o muy frecuentes, el desempeño que proporciona el control por retroalimentación puede resultar inaceptable. En consecuencia, es necesario usar otras estrategias para alcanzar el desempeño requerido. Estas estrategias adicionales son el tema de este capítulo y de algunos de los subsecuentes. Las estrategias presentadas complementan el control por retroalimentación, no lo reemplazan. El lector debe recordar que siempre es necesario proporcionar alguna retroalimentación de la variable controlada.

El control en cascada es una estrategia que en algunas aplicaciones mejora de manera significativa el desempeño que proporciona el control por retroalimentación. Esta estrategia se ha conocido y usado por mucho tiempo. En el presente capítulo se explican a detalle los fundamentos y beneficios del control en cascada.

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

9-1 EJEMPLO DE UN PROCESO

Considérese el proceso del horno, el precalentador y el reactor que se muestran en la figura 9-1.1. En este proceso, la reacción A → B tiene lugar en el reactor. El reactivo A por lo general está disponible a una temperatura baja; por lo tanto, debe calentarse antes de ser alimentado al reactor. La reacción es exotérmica y para remover el calor de reacción, una camisa de enfriamiento rodea el reactor.

La variable controlada importante es la temperatura en el reactor, T_R. La estrategia de control original consistía en controlar esta temperatura manipulando el flujo de refrigerante del forro. La manipulación de la válvula de combustible controlaba la temperatura de entrada del reactivo al reactor. Durante el proceso de arranque de este proceso se observó que la camisa de enfriamiento no podía proporcionar la capacidad de enfriamiento necesaria. En consecuencia, se decidió abrir completamente la válvula de enfriamiento y controlar la temperatura del reactor manipulando el flujo de combustible al precalentador, como se muestra en la figura 9-1.1. Esta estrategia funcionó bastante bien, proporcionando control automático durante el arranque.

Una vez que el proceso estaba "alineado", el ingeniero de procesos observaba que de vez en cuando la temperatura del reactor se apartaba lo suficiente de la referencia para producir un producto fuera de especificación. Después de verificar la sintonización del controlador por retroalimentación para asegurar que el desempeño obtenido era el mejor posible, el ingeniero empezaba a buscar posibles perturbaciones en el proceso. Se encontraron varias perturbaciones alrededor del propio reactor –variaciones en la temperatura del fluido de enfriamiento y en el flujo del mismo– y otras alrededor del precalentador –variaciones en la temperatura de entrada del reactivo A, en la capacidad energética del combustible, en la temperatura de entrada del aire

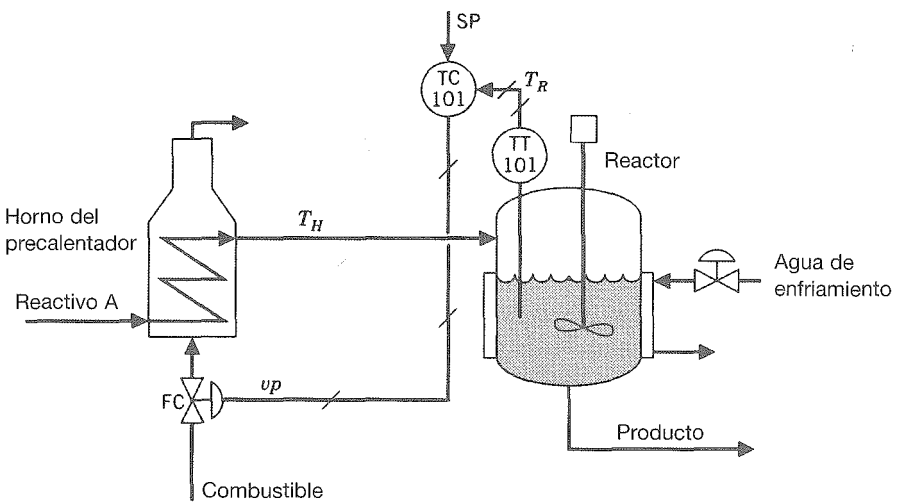


Figura 9-1.1 Proceso de precalentador/reactor: control por retroalimentación.

de combustión, etcétera–. Además, el ingeniero observaba que de vez en cuando la temperatura de entrada del reactivo al calentador variaba hasta 25°C, ciertamente una perturbación importante.

Es bastante sencillo darse cuenta de que el efecto de una perturbación en el precalentador resulta primero en un cambio en la temperatura de salida del reactivo al precalentador, T_H, lo cual afecta después la temperatura del reactor, T_R. Una vez que el controlador detecta el error en T_R, manipula la señal que va a la válvula de combustible. Sin embargo, con tantos retrasos en el proceso, en el precalentador y en el reactor, puede tomar un tiempo considerable llevar la temperatura del reactor de nuevo a la referencia. Debido a estos retrasos, la estrategia simple de control por retroalimentación mostrada en la figura 9-1.1 resulta en un comportamiento cíclico y, en general, en un control lento.

Es posible diseñar una mejor estrategia de control haciendo uso del hecho de que las perturbaciones en el precalentador afectan primero a T_H. Por tanto, es lógico empezar manipulando la válvula de combustible tan pronto como se detecte una variación en T_H, antes de que T_R comience a cambiar. Es decir, la idea es no esperar por un error en T_R para empezar a cambiar la variable manipulada. En esta acción correctiva se usa una variable intermedia, T_H en este caso, para reducir el efecto de algunas de las dinámicas del proceso. Ésta es la idea detrás del control en cascada que se muestra en la figura 9-1.2.

Esta estrategia se compone de dos sensores, dos transmisores, dos controladores y una válvula de control. Un sensor mide la variable intermedia, o secundaria, T_H en este caso, y el otro sensor mide la variable controlada principal, T_R. Así, esta estrategia resulta en dos lazos de control: uno que controla a T_R y el otro que controla a T_H. Repitiendo, la temperatura de salida del precalentador se utiliza sólo como una variable intermedia para mejorar el control de temperatura del reactor, que es la variable controlada importante.

La estrategia funciona de la siguiente manera: el controlador TC-101 examina la temperatura del reactor y decide cómo manipular la temperatura de salida del precalentador a fin de satisfacer la referencia. Esta decisión se transfiere al TC-102 en la forma de una referencia. El

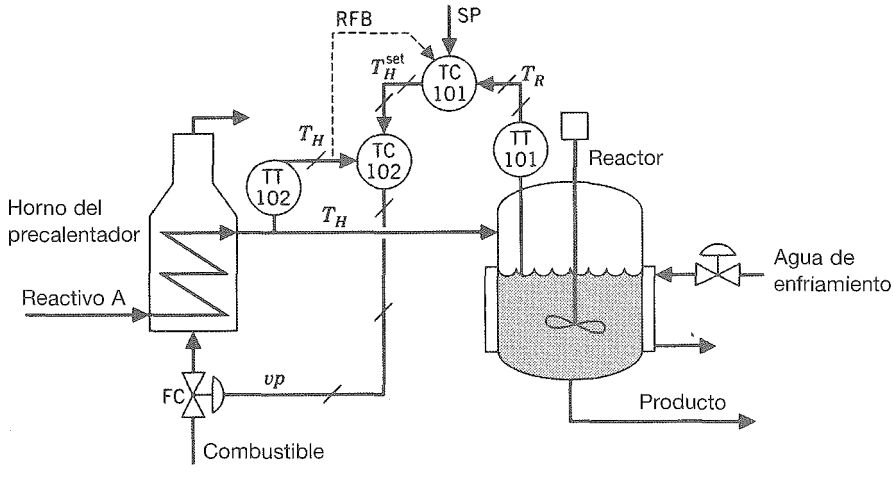


Figura 9-1.2 Proceso de precalentador/reactor: control en cascada.

TC-102 manipula a su vez la señal a la válvula de combustible para mantener T_H en la referencia dada por el TC-101. Si alguna de las perturbaciones antes mencionadas afecta al precalentador, T_H se desvía de su referencia y el TC-102 toma de inmediato una acción correctiva antes de que T_R cambie. Por tanto, los elementos dinámicos del proceso se han separado para compensar las perturbaciones en el calentador antes de que afecten a la variable controlada principal.

En general, el controlador que mantiene la variable principal en su referencia se llama controlador maestro, controlador exterior o controlador primario. El controlador que se usa para mantener la variable secundaria en la referencia proporcionada por el controlador maestro suele llamarse controlador esclavo, controlador interior o controlador secundario. Por lo general se prefiere la terminología primario/secundario debido a que se puede extender de manera natural a sistemas con más de dos lazos en cascada.

Nótese que el controlador secundario recibe una señal proveniente del controlador primario y que esta señal se usa como la referencia. Para "escuchar" esta señal, el controlador debe estar colocado en lo que se denomina la *referencia remota* o *en cascada*. Si se desea fijar la referencia manualmente, entonces el controlador debe ponerse en *referencia local* o *auto*.

En la figura 9-1.3 se muestra la respuesta del proceso a un cambio de –25°C en la temperatura de entrada del reactivo bajo control por retroalimentación simple y bajo control en cascada. La mejora es muy significativa y es muy probable que en este caso permita recuperar de inmediato los costos adicionales.

Es necesario hacer hincapié en lo siguiente: *al diseñar estrategias de control en cascada, la consideración más importante es que la variable secundaria debe responder más rápido que la variable primaria a los cambios en la perturbación, y en la variable manipulada entre más rápido, mejor.* Este requerimiento tiene sentido y se extiende a cualquier número de lazos en cascada. En un sistema con tres lazos en cascada, como se muestra en la sección 9-3.2, la

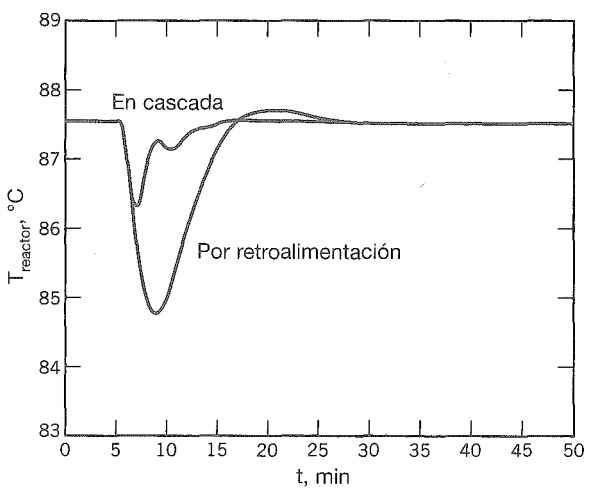


Figura 9-1.3 Respuesta del control por retroalimentación y en cascada a un cambio de –25°C en la temperatura de la alimentación al calentador.

variable terciaria debe ser más rápida que la variable secundaria, la cual a su vez debe ser más rápida que la variable primaria. Nótese que el controlador más interior es el que envía su salida a la válvula. Las salidas de los demás controladores se usan como la referencia de otro controlador; para estos controladores, su elemento final de control es la referencia de otro controlador.

Como se observa en este ejemplo, se están empezando a desarrollar esquemas de control más complejos que el de retroalimentación simple. En el desarrollo de estos esquemas, y los que se examinan en los capítulos siguientes, es de gran ayuda recordar que cada señal debe tener un significado físico. En las figuras 9-1.1 y 9-1.2 cada señal se ha etiquetado con su significado. Por ejemplo, en la figura 9-1.2, la señal de salida del TT-101 indica la temperatura del reactor, T_R, la señal de salida del TT-102 indica la temperatura de salida del calentador, T_H, y la señal de salida del TC-101 indica la temperatura requerida del calentador, T_H^{set}. Aun cuando indicar el significado de las señales en los diagramas de control no es una práctica estándar, aquí se continuará haciéndolo. Esta práctica ayuda en la comprensión de los esquemas de control y de nuevo se le recomienda al lector hacer lo mismo.

9-2 CONSIDERACIONES DE ESTABILIDAD

En esta sección se explica cómo afecta la implementación del control en cascada la estabilidad del sistema de control. En la figura 9-2.1 se muestra el diagrama de bloques de la estrategia de control por retroalimentación simple de la figura 9-1.1, y en la figura 9-2.2 se muestra el diagrama de bloques de la estrategia en cascada de la figura 9-1.2. Se han seleccionado funciones de transferencia simples para representar el proceso.

El diagrama de bloques de la figura 9-2.2 muestra claramente por qué el lazo secundario comienza a compensar cualquier perturbación que afecte a la variable controlada secundaria antes de que su efecto se haga sentir en la variable controlada primaria. El diagrama también muestra por qué el lazo secundario en ocasiones se llama el "lazo interior". Este lazo está contenido dentro del lazo primario o "lazo exterior".

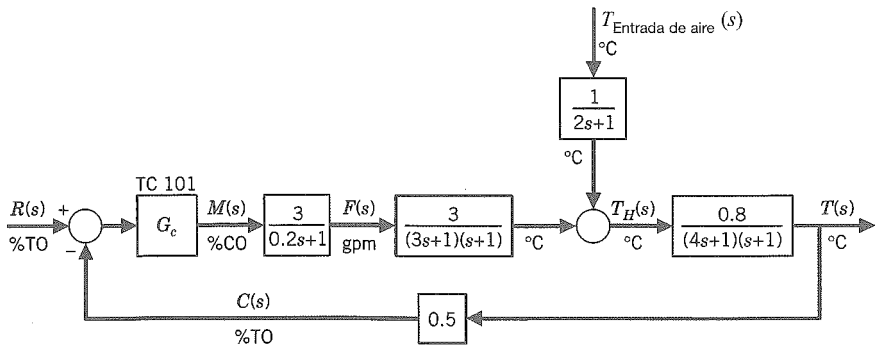


Figura 9-2.1 Diagrama de bloques del proceso mostrado en la figura 9-1.1.

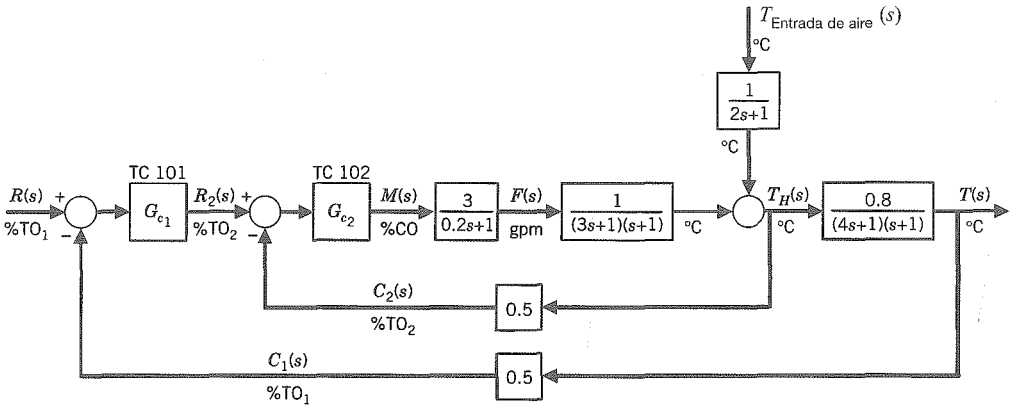


Figura 9-2.2 Diagrama de bloques del proceso mostrado en la figura 9-1.2.

La ecuación característica para el sistema de control por retroalimentación simple, figura 9-2.1, es

$$1+\frac{1.2\,G_{c_1}}{(0.2s+1)(3s+1)(s+1)(4s+1)(s+1)}=0 \tag{9-2.1}$$

Usando las técnicas del álgebra de diagramas de bloques aprendidas en el capítulo 3, se obtiene la ecuación característica para la estrategia de control en cascada, figura 9-2.2, como

$$1+\frac{\dfrac{1.2\,G_{c_1}G_{c_2}}{(0.2s+1)(3s+1)(s+1)(4s+1)(s+1)}}{1+\dfrac{1.5\,G_{c_2}}{(0.2s+1)(3s+1)(s+1)}}=0 \tag{9-2.2}$$

Aplicando el método de sustitución directa, capítulo 6, o la técnica por respuesta de frecuencia, capítulo 8, al sistema de control por retroalimentación, ecuación 9-2.1, se puede calcular la ganancia última y la frecuencia última:

$$K_{cu}=4.33\frac{\%\text{CO}}{\%\text{TO}} \qquad \text{y} \qquad \omega_u=0.507\frac{\text{rad}}{\text{min}}$$

Para determinar la ganancia última y la frecuencia última del controlador primario de la estrategia en cascada, primero debe obtenerse la sintonización del controlador secundario. Esta

sintonización se puede obtener determinando la ganancia última del lazo secundario de la figura 9-2.2. La ecuación característica para este proceso secundario es

$$1+\frac{1.5\,G_{c_2}}{(0.2s+1)(3s+1)(s+1)}=0$$

para producir la siguiente expresión

$$K_{cu_2}=17.06\frac{\%\mathrm{CO}_2}{\%\mathrm{TO}_2}$$

Suponiendo un controlador sólo proporcional y usando la sugerencia de Ziegler-Nichols, la sintonización del controlador secundario es

$$K_{c_2}=0.5K_{cu_2}=8.53\frac{\%\mathrm{CO}_2}{\%\mathrm{TO}_2}$$

Cuando se usa este valor de sintonización para el controlador secundario, la ecuación característica para la estrategia en cascada, ecuación 9-2.2, produce para el controlador primario

$$K_{cu_1}=7.2\frac{\%\mathrm{CO}_1}{\%\mathrm{TO}_1}\qquad \text{y}\qquad \omega_{u_1}=1.54\frac{\text{rad}}{\text{min}}$$

Comparando los resultados, se observa que la estrategia en cascada produce una ganancia última, o límite de estabilidad, mayor que el lazo de control por retroalimentación simple, 7.2 contra 4.33 %CO/%TO. El valor de la frecuencia última también es mayor para la estrategia en cascada, 1.54 contra 0.57 rad/min, indicando una respuesta del proceso más rápida.

El uso de la estrategia en cascada resulta en un control global más rápido, y la mayoría de las veces incrementa la ganancia última del controlador primario. Los métodos de análisis son los mismos que para los lazos de retroalimentación simples.

9-3 IMPLEMENTACIÓN Y SINTONIZACIÓN DE CONTROLADORES

Dos preguntas importantes todavía están pendientes por responder: cómo poner en operación completamente automática la estrategia en cascada y cómo sintonizar los controladores. La respuesta a ambas preguntas es la misma: de adentro hacia afuera. Es decir, primero se sintoniza el controlador más interior y se ajusta en el modo de referencia remota mientras los demás lazos están en modo manual. Cuando este controlador está en el modo de referencia remota, es una buena práctica verificar cómo se comporta antes de proceder con el siguiente controlador. El

procedimiento se continúa hacia afuera hasta que todos los controladores están en operación. Para el proceso mostrado en la figura 9-1.2, primero se sintoniza el TC-102 y se ajusta en el modo automático mientras el TC-101 está en modo manual. Después se verifica el desempeño de control del TC-102 antes de proceder con el TC-101. Es muy fácil hacer esta verificación variando la referencia del TC-102. Recuérdese, se desea hacer el TC-102 tan rápido como sea posible, aunque oscile un poco, para minimizar el efecto de las perturbaciones. Una vez hecho lo anterior, el TC-102 se ajusta en el modo de referencia remota y se sintoniza el TC-101 y se pone en automático.

Sintonizar sistemas de control en cascada es más complicado que los sistemas de retroalimentación sencillos, si acaso sólo por el simple hecho de que hay dos controladores que sintonizar. Sin embargo, esto no significa que sea difícil. Se empieza presentando los métodos disponibles para sintonizar sistemas de control en cascada de dos niveles y se continúa con la discusión de los métodos de sintonización disponibles para sintonizar sistemas en cascada de tres niveles.

9-3.1 Sistemas en cascada de dos niveles

El sistema de control mostrado en la figura 9-1.2 se llama *sistema de control en cascada de dos niveles*. Nótese que el lazo interior es en sí mismo un lazo de retroalimentación simple. En consecuencia, el TC-102 se puede sintonizar por cualquiera de las técnicas analizadas en el capítulo 7. La recomendación, como ya se mencionó, es sintonizar este controlador para que sea lo más rápido posible, evitando una condición de inestabilidad, por supuesto. El objetivo es hacer el lazo interior rápido y que responda para minimizar el efecto de las perturbaciones sobre la variable controlada primaria. La sintonización de este sistema se reduce entonces a sintonizar el controlador primario.

Existen varios métodos para llegar a una conjetura inicial de la sintonización del controlador primario. El personal experimentado suele recurrir al ensayo y error. Los otros métodos disponibles siguen una "receta" para obtener los primeros valores de sintonización. El primer método disponible es la técnica oscilatoria de Ziegler-Nichols presentada en el capítulo 7. Es decir, con el controlador secundario ajustado en referencia remota, después de desactivar cualquier acción integrativa y derivativa presente en el controlador primario, su ganancia se incrementa cuidadosamente hasta que las oscilaciones de la variable controlada son constantes. La ganancia del controlador que produce estas oscilaciones se denomina la ganancia última, K_{cu}, y el periodo de las oscilaciones es el periodo último, T_u. Después se usan las ecuaciones de Ziegler-Nichols presentadas en el capítulo 7.

El segundo método disponible es el presentado por Pressler (referencia 1). El método de Pressler se desarrolló suponiendo que el controlador secundario es sólo proporcional y que el controlador primario es proporcional integral; esta combinación P/PI suele ser muy conveniente. El método funciona bien; sin embargo, en él se supone que el lazo interior no contiene tiempo muerto, lo que limita su aplicación a sistemas en cascada con lazos de flujo o presión de líquido como lazos interiores. Para procesos con tiempo muerto en el lazo interior, como el que se muestra en la figura 9-2.2, la aplicación del método de Pressler produciría una respuesta inestable si el controlador maestro se ajustara en modo manual en algún momento.

El tercer método disponible consiste en extender los métodos fuera de línea presentados en el capítulo 7 tanto al controlador primario como al secundario. Para ello, con el controlador secundario ajustado en modo manual, se introduce un cambio escalón en su salida y se registra la respuesta de la temperatura de salida del calentador (variable secundaria). A partir de esos datos se obtiene la ganancia, la constante de tiempo y el tiempo muerto para el lazo secundario y se sintoniza el controlador usando cualquiera de los métodos presentados en el capítulo 7 que el ingeniero desee. Una vez hecho lo anterior, el controlador secundario se ajusta en el modo de referencia remota. Con el controlador primario en modo manual, se introduce entonces un cambio escalón en su salida y se registra la respuesta de la temperatura del reactor (variable primaria). Con estos datos se obtiene la ganancia, la constante de tiempo y el tiempo muerto para el lazo principal y el controlador se sintoniza utilizando también cualquiera de los métodos presentados en el capítulo 7 que el ingeniero desee.

El cuarto método disponible para sintonizar sistemas de control en cascada fue desarrollado por Austin (1986) y ampliado por López (2003). El método proporciona la manera de sintonizar tanto el controlador primario como el secundario con una sola prueba escalón. Se dan las ecuaciones de sintonización para el controlador primario, PI o PID, cuando el controlador secundario es P o PI. El método consiste en generar un cambio escalón en la señal a la válvula de control, como se explica en el capítulo 7, para después registrar las respuestas de las variables secundaria y primaria. La respuesta de la variable secundaria se usa para calcular la ganancia, K_2 en %TT-102/%CO, la constante de tiempo, τ_2, y el tiempo muerto, t_{0_2}, del lazo interior. La respuesta de la variable primaria se usa para calcular la ganancia, K_1 en %TT-101/%CO, la constante de tiempo, τ_1, y el tiempo muerto, t_{0_1}, del lazo primario. Con los valores de K_2, τ_2 y t_{0_2} se sintoniza el controlador secundario usando alguno de los métodos del capítulo 7. En la tabla 9-3.1 se presentan las ecuaciones para sintonizar el controlador primario. Este método ofrece un procedimiento sencillo para obtener una sintonización casi óptima del controlador primario.

En la figura 9-4.2*a*, analizada en la sección 9-4, se muestra un controlador de temperatura en cascada con un controlador de flujo. Los sistemas en cascada con controladores de flujo en el lazo interior son muy comunes, por lo que merecen examinarse. Siguiendo la presentación previa del método de López, después de introducir un cambio en la salida del controlador de flujo, y de registrar el flujo y la temperatura, se pueden calcular las ganancias, las constantes de tiempo y los tiempos muertos respectivos. Como los lazos de flujo son muy rápidos, la constante de tiempo estará en el orden de los segundos y el tiempo muerto estará muy cerca de cero minutos, $t_{0_2} \approx 0$ min. Los controladores de flujo por lo general se sintonizan con una ganancia baja, $K_c \approx 0.2$, y un tiempo integral corto, $\tau_1 \approx 0.05$ min. Sin embargo, en el proceso mostrado en la figura 9-4.2*a*, el controlador de flujo es el controlador interior en un sistema en cascada, y como se desea tener un lazo interior de respuesta rápida, la recomendación en este caso es incrementar la ganancia del controlador a un valor próximo a 1, $K_c \approx 1.0$; para mantener estabilidad, es posible que el tiempo integral también tenga que incrementarse (Corripio, 1990). Una vez que el controlador de flujo se ha sintonizado para proporcionar una respuesta rápida y estable, el controlador de temperatura se puede sintonizar siguiendo el método de López. Es importante notar que t_{0_2} no es un factor en las ecuaciones y, por lo tanto, no tendrá un efecto en la sintonización del controlador maestro.

Tabla 9-3.1 Ecuaciones de sintonización para el sistema en cascada de dos niveles

Controlador secundario	Controlador primario: PI	Controlador primario: PID
P	$K_{c_1} = \frac{\tau_1}{8.2048 K_1 t_{0_1}} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{-1.3965} \left(\frac{t_{0_2}}{t_{0_1}}\right)^{0.2767}$ $\tau_{I_1} = \tau_1 \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{-0.0018} \left(\frac{t_{0_2}}{t_{0_1}}\right)^{0.2097}$ Rangos: $0.1 \le \frac{\tau_2}{\tau_1} \le 0.7;\ 0.1 \le \frac{t_{0_2}}{t_{0_1}} \le 0.7$	$K_{c_1} = \frac{\tau_1}{5.2416 K_1 t_{0_1}} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{-1.1312} \left(\frac{t_{0_2}}{t_{0_1}}\right)^{-0.0966}$ $\tau_{I_1} = \tau_1 \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{-0.0655} \left(\frac{t_{0_1}}{\tau_1}\right)^{0.5342}$ $\tau_{D_1} = t_{0_1} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{1.4397} \left(\frac{t_{0_1}}{\tau_1}\right)^{-1.6551}$ Rangos: $0.2 \le \frac{t_{0_1}}{\tau_1} \le 1.0;\ 0.1 \le \frac{\tau_2}{\tau_1} \le 0.7;\ 0.1 \le \frac{t_{0_2}}{t_{0_1}} \le 0.7$
PI	$K_{c_1} = \frac{1}{2.4468 K_1} \left(\frac{t_{0_1}}{\tau_1}\right)^{-0.4485} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{-0.3857} \left(\frac{t_{0_2}}{t_{0_1}}\right)^{-0.0995}$ $\tau_{I_1} = 0.8693 \tau_1 \left(\frac{t_{0_1}}{\tau_1}\right)^{0.4195} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{-0.3022} \left(\frac{t_{0_2}}{t_{0_1}}\right)^{-0.1334}$ Rangos: $0.2 \le \frac{t_{0_1}}{\tau_1} \le 1.0;\ 0.1 \le \frac{\tau_2}{\tau_1} \le 0.7;\ 0.1 \le \frac{t_{0_2}}{t_{0_1}} \le 0.7$	$K_{c_1} = \frac{\tau_1}{5.2416 K_1 t_{0_1}} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{-1.1312} \left(\frac{t_{0_2}}{t_{0_1}}\right)^{-0.0966}$ $\tau_{I_1} = 1.1581 \tau_1 \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{-0.0398} \left(\frac{t_{0_2}}{t_{0_1}}\right)^{0.1538}$ $\tau_{D_1} = 0.6722 t_{0_1} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{-0.0905} \left(\frac{t_{0_2}}{t_{0_1}}\right)^{0.2750}$ Rangos: $0.1 \le \frac{\tau_2}{\tau_1} \le 0.7; 0.1 \le \frac{t_{0_2}}{t_{0_1}} \le 0.7$

Otro método para sintonizar el lazo en cascada de un controlador de temperatura combinado con un controlador de flujo, como en el intercambiador de calor, consiste en reducir el sistema en cascada de dos niveles a un lazo de retroalimentación simple al tomar en cuenta que el lazo de flujo es muy rápido y que, en consecuencia, se puede considerar parte de la válvula, haciéndolo así parte del proceso. Esto se hace sintonizando primero el controlador de flujo como se explicó antes y ajustándolo en el modo de referencia remota. Una vez hecho lo anterior, el controlador de flujo estará recibiendo su referencia del controlador de temperatura. Entonces se introduce un cambio escalón del controlador de temperatura y se registra la temperatura. A partir de estos datos se calcula la ganancia, la constante de tiempo y el tiempo muerto. Con esta

información, el controlador de temperatura se sintoniza utilizando cualquiera de los métodos presentados en el capítulo 7.

9-3.2 Sistemas en cascada de tres niveles

El controlador TC-102 en el sistema en cascada de la figura 9-1.2 manipula la posición de la válvula a fin de mantener la temperatura de salida del precalentador en la referencia. El controlador manipula la posición de la válvula, no el flujo de combustible. El flujo de combustible depende de la posición de la válvula y de la caída de presión a través de la misma. Un cambio en esta caída de presión, una perturbación común, resulta en un cambio en el flujo de combustible. El sistema de control, con la configuración actual, reaccionará a esta perturbación hasta que la temperatura de salida del precalentador se desvíe de la referencia. Si es importante minimizar el efecto de esta perturbación, se puede obtener un control más riguroso agregando un nivel en cascada más, como se muestra en la figura 9-3.1. El flujo de combustible es manipulado entonces por el TC-102 y un cambio en el flujo, debido a cambios en la caída de presión, sería corregido ahora de inmediato por el FC-103. El efecto de la perturbación sobre la temperatura de salida del precalentador sería mínimo.

En este nuevo sistema en cascada de tres niveles, el lazo más interior, el de control de flujo, es el más rápido. Por lo tanto, se mantiene el requerimiento necesario de reducir la rapidez del lazo "de adentro hacia afuera".

Para sintonizar este sistema en cascada de tres niveles, nótese primero que los controladores FC-103 y TC-102 constituyen un "subsistema" en cascada de dos niveles en el que el controlador interior es muy rápido. Además, se trata exactamente del mismo caso que se acaba de

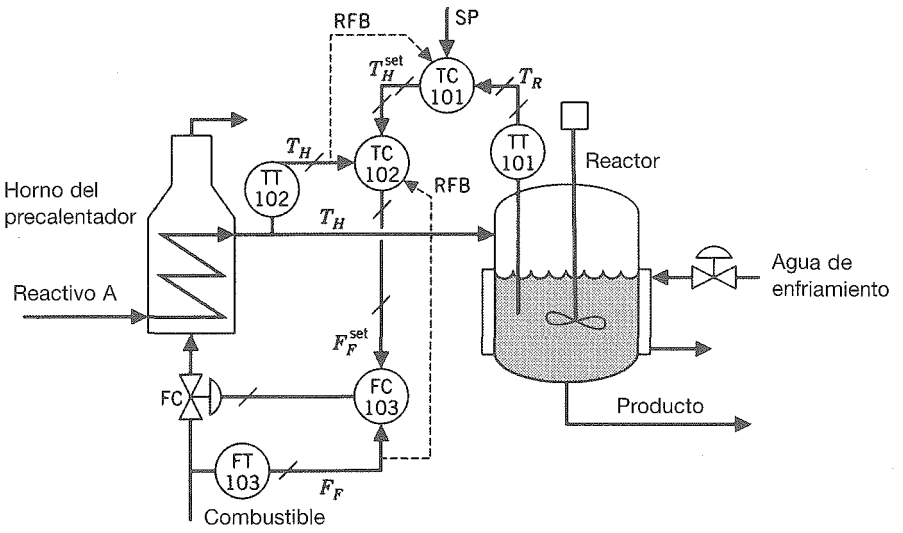


Figura 9-3.1 Proceso de precalentador/reactor: control en cascada de tres niveles.

describir al final de la subsección anterior. Siguiendo ese análisis, primero se sintoniza el controlador de flujo y se ajusta en el modo de referencia remota. Por tanto, la sintonización de este sistema en cascada de tres niveles se reduce a sintonizar un sistema en cascada de dos niveles. La aplicación del método de López resulta entonces muy sencilla. Con TC-101 y TC-102 en modo manual y el controlador FC-103 ajustado en el modo de referencia remota, se introduce un cambio escalón en la señal de TC-102 a FC-103 y se registra la respuesta en las temperaturas del horno y del reactor. A partir de la respuesta de la temperatura del horno, se obtiene la ganancia, K_2 en %TT-102/%CO, la constante de tiempo, τ_2, y el tiempo muerto, t_{0_2}. Usando la respuesta de temperatura del reactor, se obtiene la ganancia, K_1 en %TT-101/%CO, la constante de tiempo, τ_1, y el tiempo muerto, t_{0_1}. Con K_2, τ_2 y t_{0_2} se sintoniza el controlador secundario usando las ecuaciones presentadas en el capítulo 7, después se usa la tabla 9-3.1.

9-4 OTROS EJEMPLOS DE PROCESOS

Considérese el sistema de control del intercambiador de calor que se muestra en la figura 9-4.1 en el que la temperatura del fluido de proceso de salida se controla manipulando la posición de la válvula de vapor. En la sección anterior se analizó que el flujo a través de cualquier válvula depende de su posición y de la caída de presión a través de ella. Si ocurre un cambio repentino en la presión de la tubería de vapor, el flujo variará. El lazo de control de temperatura mostrado puede compensar esta perturbación sólo después de que la temperatura del proceso se ha desviado de la referencia.

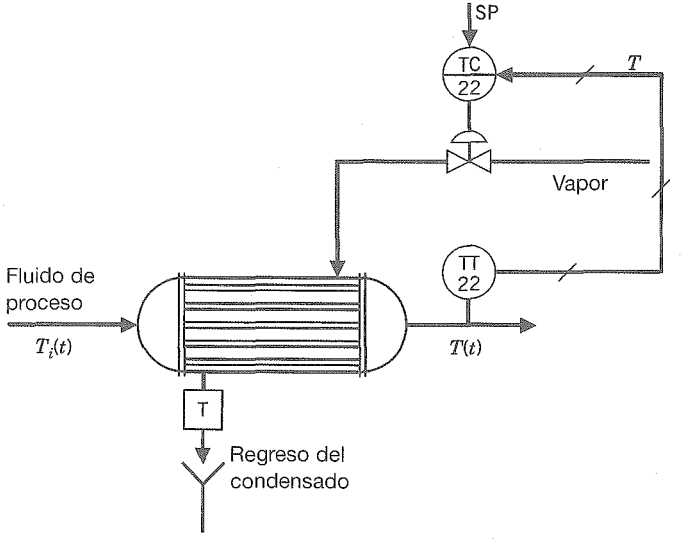


Figura 9-4.1 Lazo de control de temperatura del intercambiador de calor.

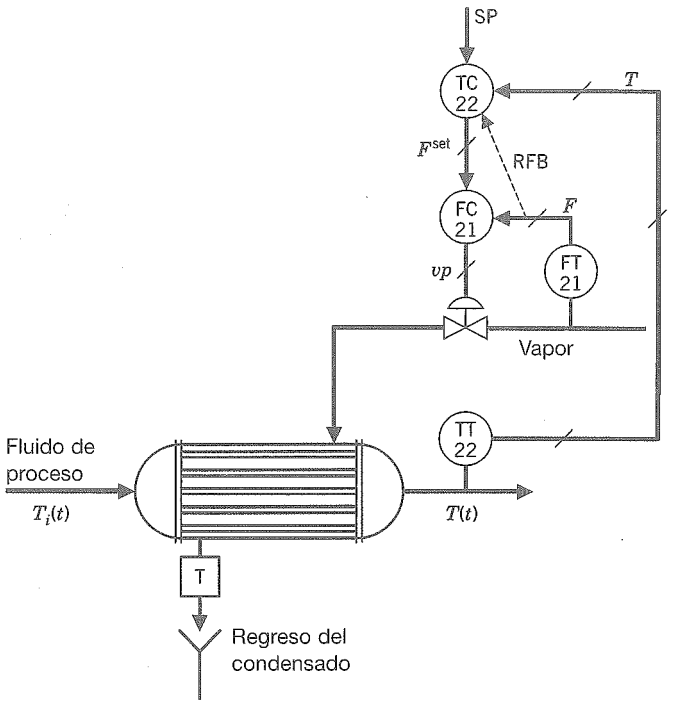


Figura 9-4.2 Esquemas de control en cascada en el control de temperatura del intercambiador de calor.

En la figura 9-4.2 se muestran dos esquemas en cascada que mejoran este control de la temperatura cuando los cambios repentinos en la presión son perturbaciones importantes. En la figura 9-4.2*a* se muestra un sistema en cascada en el que se ha agregado un lazo de flujo; el controlador de temperatura reajusta la referencia del controlador de flujo. Cualquier cambio en el flujo es compensado ahora por el lazo de flujo. El esquema en cascada que se muestra en la figura 9-4.2*b* logra el mismo control, pero ahora la variable secundaria es la presión del vapor en la carcasa del intercambiador. De hecho, esta presión del vapor con frecuencia se mide en la línea que entra a la carcasa, éste es un sitio más seguro y menos costoso que medir la presión real en la carcasa. Cualquier cambio en el flujo de vapor afecta de manera muy rápida la presión del lado de la carcasa, la cual es compensada entonces por el lazo de presión. El lazo de presión también compensa las perturbaciones en el contenido energético (calor latente y de sobrecalentamiento) del vapor, ya que la presión del lado de la carcasa está relacionada con la temperatura de condensación y por consiguiente con la velocidad de transferencia de calor en el intercambiador. La implementación de este último esquema por lo general es menos costosa, ya que no requiere de un orificio con sus conexiones correspondientes, lo que puede ser costoso. Ambos esquemas en cascada son comunes en las industrias de procesos. ¿Puede el lector decir cuál de los dos esquemas produce una mejor respuesta inicial a perturbaciones en la temperatura de entrada del proceso, $T_i(t)$?

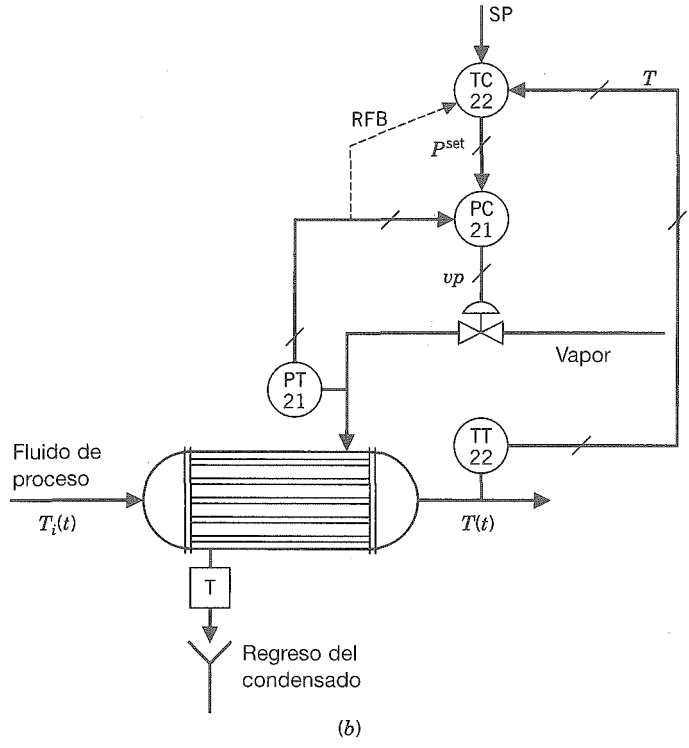


Figura 9-4.2 (*continuación*).

Los sistemas de control en cascada que se muestran en la figura 9-4.2 son muy comunes en la práctica industrial. Una aplicación típica es en columnas de destilación, donde la temperatura se controla para mantener la separación deseada. El controlador de temperatura por lo general se conecta en cascada con el flujo de vapor al rehervidor o con el flujo de enfriamiento al condensador.

Por último, otro ejemplo muy sencillo de un sistema de control en cascada es el del posicionador en una válvula de control. El posicionador funciona como el controlador interior del esquema en cascada.

9-5 COMENTARIOS FINALES

Hasta ahora no se ha tocado el punto de la acción de los controladores en una estrategia de control en cascada. Esto es importante, ya que, como se vio en el capítulo 5, si las acciones de los controladores no se seleccionan correctamente, los controladores no controlarán. El procedimiento para seleccionar la acción es el mismo que se explicó en el capítulo 5. Es decir, la acción se decide de acuerdo con los requerimientos del proceso y la acción de falla segura del

elemento final de control. Como se mencionó anteriormente, para algunos de los controladores usados en la estrategia en cascada, el elemento final de control es la referencia de otro controlador.

Considérese la estrategia de control en cascada de tres niveles de la figura 9-3.1. La acción del FC-103 es inversa (aumento/disminución) debido a que si la medición del flujo aumenta por encima de la referencia, indicando que la válvula está entregando un flujo mayor que el requerido, la abertura de la válvula se debe reducir; para una válvula del tipo cerrada en falla esto se logra reduciendo la señal que llega a ella. La acción del TC-102 también es inversa, ya que si su medición aumenta por encima de la referencia, indicando una temperatura de salida del precalentador más alta que la requerida, el flujo de combustible debe reducirse, lo cual se logra reduciendo la referencia del FC-102. Finalmente, la acción del TC-101 también es inversa, ya que si su medición aumenta por encima de la referencia, indicando una temperatura del reactor por encima de la especificada, la manera de reducirla es bajando la temperatura de entrada de los reactivos, lo cual se logra reduciendo la referencia del TC-102. La decisión con respecto a la acción de los controladores es sencilla y simple siempre y cuando se entienda el significado de lo que cada controlador hace.

Considerando la figura 9-1.2, la salida del TC-101 es una señal, sea 4-20 mA, 3-15 psig, o, en general, 0-100%. Entonces, para una señal de salida del TC-101 dada, digamos 40%, ¿cuál es la temperatura, en grados, requerida del TC-102? Esta pregunta es fácil de responder si se recuerda que el trabajo del controlador es hacer su medición igual a la referencia. Por lo tanto, el TC-102 se satisfará cuando la señal del TT-102 sea de 40%. Así, la temperatura requerida es 40% del rango del TT-102.

Considerando de nuevo la figura 9-1.2, es importante darse cuenta de lo que sucedería si se desactivara el modo de referencia remota del TC-102 y se dejara el TC-101 en el modo automático. Si se hace esto y el TC-101 detectara un error, enviaría una nueva señal (referencia) al TC-102, pero el TC-102 sería incapaz de responder a las demandas del TC-101. Si el TC-101 tiene acción integral, estaría afectado por saturación (*windup*), ya que su salida no tendría efecto en su entrada. Es decir, el efecto de desactivar la referencia remota en el controlador secundario sería "abrir" el lazo de retroalimentación del controlador primario.

Las computadoras, con su flexibilidad inherente, ofrecen la capacidad necesaria para evitar la posibilidad de esta saturación y proporcionan estrategias de control en cascada más seguras. La computadora se puede programar, o configurar, para que en cualquier momento en que la operación en referencia remota del controlador secundario esté desactivada, el controlador primario pase "automáticamente" al modo manual si está operando en automático. El controlador primario se mantendrá en modo manual mientras el modo de referencia remota del controlador secundario permanezca desactivado. Cuando el controlador secundario se regrese al modo de referencia remota, el controlador primario volverá "automáticamente" al modo automático si el diseñador así lo dispone. Sin embargo, si mientras el controlador secundario está fuera del modo de referencia remota su referencia cambia, entonces en el momento en que regrese al modo de referencia remota su referencia actual puede no ser igual a la salida del controlador primario. Si esto ocurre, la referencia del controlador secundario saltará de inmediato para ser igual a la salida del controlador primario, generando un "sobresalto" en la operación del proceso. Si se desea una transferencia "sin sobresaltos", la mayoría de los

controladores computarizados también se pueden programar para que, mientras el modo de referencia remota del controlador esté desactivado, la salida del controlador primario sea forzada a ser igual a la variable del proceso o bien a la referencia del controlador secundario. Es decir, la salida del controlador primario "sigue" a alguna de las dos variables del controlador secundario. Por lo tanto, cuando el controlador secundario se regresa a la operación en modo de referencia remota se obtiene una transferencia uniforme.

La opción de rastreo que se acaba de explicar, denominada en inglés *output tracking*, *reset feedback* (RFB) o "external reset feedback", es muy importante para la operación uniforme y segura de los sistemas de control en cascada. Esta opción se representa con líneas discontinuas en la figura 9-1.2.

9-6 RESUMEN

En este capítulo se han presentado en detalle los fundamentos y beneficios del control en cascada, una estrategia cuyo concepto e implementación son sencillos y que proporciona un desempeño de control mejorado. El lector tiene que recordar que la variable secundaria debe responder más rápido que la variable primaria a los cambios en la variable manipulada. Algunos lazos típicos de control en cascada de dos niveles son de temperatura a flujo, de concentración a flujo, de presión a flujo, de nivel a flujo y de temperatura a presión.

REFERENCIAS

1. Pressler, Gerhard, *Regelungs-Technik,* Hochschultashenbucher, Band 63, Bibliographischer Institut, Mannheim, Alemania.
2. Austin, Vanessa D., *Development of Tuning Relations for Cascade Control Systems,* disertación de doctorado, Departamento de Ingeniería Química, University of South Florida, Tampa, FL.
3. López, Royman J., *Desarrollo de ecuaciones robustas de sintonización de controladores PID trabajando en cascada para procesos industriales autorregulados,* tesis de maestría, Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia.
4. Corripio, A. B., *Tuning of Industrial Control Systems*, Instrument Society of America, Carolina del Norte.

PROBLEMAS

9-1. Se cuenta con la siguiente información para el proceso de secado de papel de la figura P9-1: el lazo de control de flujo (FIC-47) se puede representar con un retardo de primer orden con una ganancia de 4 gpm/%CO y una constante de tiempo de 0.1 min. La función de transferencia de la temperatura de salida del calentador de aire al flujo de combustible

es un retardo de segundo orden con constantes de tiempo de 2 min y 0.8 min. Un cambio en el flujo de combustible de 1 gpm causa un cambio de 2°F en la temperatura de salida del aire. El secador se puede representar con un retardo de primer orden con una constante de tiempo de 5 min. Un cambio de 1°F en la temperatura de entrada del aire causa un cambio en la humedad de salida de 0.5 por ciento en masa. El transmisor de humedad (MT-47) tiene un rango de 0 a 6 por ciento en masa y una constante de tiempo despreciable.

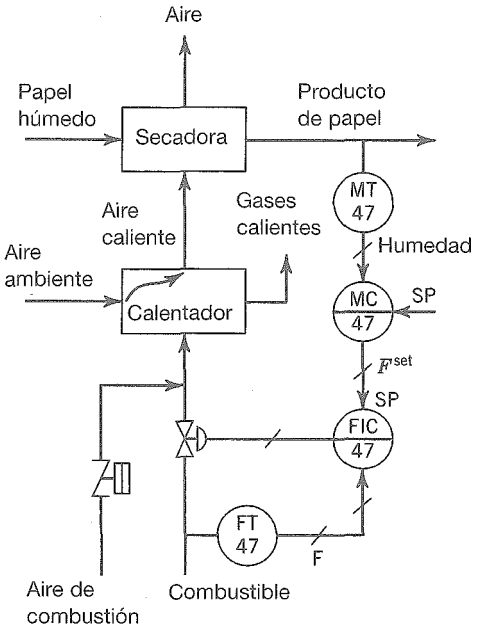


Figura P9-1 Secador del problema 9-1.

a) Para el esquema de control de la figura P9-1, trazar el diagrama de bloques del lazo de control de humedad indicando las funciones de transferencia. Decidir la posición en falla de la válvula de control y la acción del controlador, asegurándose de que los signos del diagrama de bloques correspondan con las decisiones tomadas. Determinar la ganancia última y el periodo de oscilación del lazo de control de humedad, y usar después esos valores para sintonizar un controlador PID para el controlador de humedad (MIC-47) con respuesta de asentamiento de un cuarto.

b) Considérese un esquema de control en cascada utilizando un sensor de temperatura de salida con un rango de 250°F a 300°F instalado en la línea de aire del calentador a la secadora y un controlador de temperatura para manipular la referencia del flujo de combustible; la salida del controlador de humedad (MIC-47) fija la referencia del controlador de temperatura de salida del aire. Trazar el diagrama de instrumentación

y el diagrama de bloques del esquema de control en cascada. Indicar las funciones de transferencia definidas en el diagrama de bloques y especificar la acción de cada controlador.

c) Determinar la ganancia última y el periodo de oscilación del lazo de control de temperatura esclavo y usar esos valores para sintonizar un controlador P con respuesta de asentamiento de un cuarto; calcular después la ganancia última y el periodo último para el lazo de control de humedad maestro y los parámetros de sintonización para la respuesta de asentamiento de un cuarto para un controlador de humedad PID. Comparando esos parámetros con los obtenidos en el inciso a), comentar brevemente las ventajas del control en cascada para esta aplicación.

Nota: la simulación de este proceso es el tema del problema 13-25.

9-2. El siguiente es un proceso real con datos reales. Considérese el calentador que se muestra en la figura P9-2. En este proceso, el calentador es en realidad un reactor en el que tiene lugar la reacción catalítica de C_3H_8 y vapor para formar H_2 y CO_2. La temperatura de los gases producidos se controla manipulando el flujo de combustible. Se sospechaba que los controladores no estaban sintonizados correctamente. Esta sospecha se confirmó al observar la respuesta inestable del reactor, la cual se muestra en la figura P9-3, después

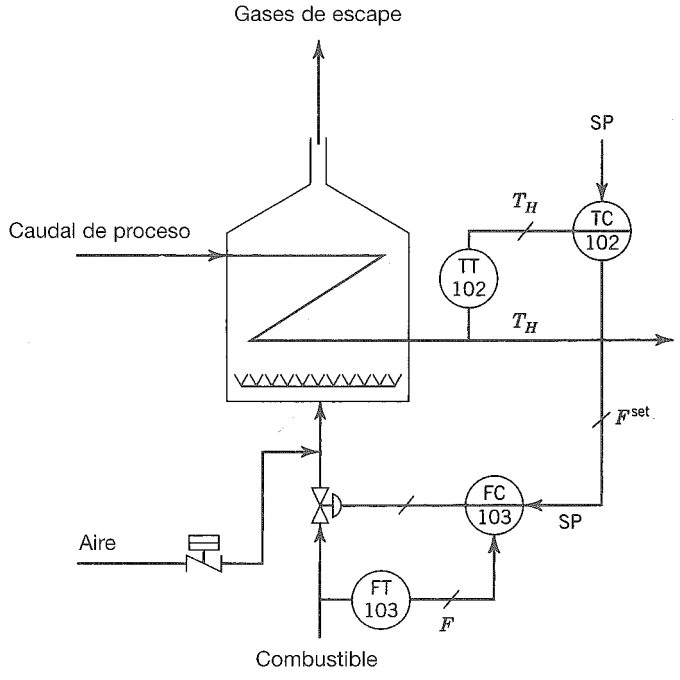


Figura P9-2 Calentador para el problema 9-2.

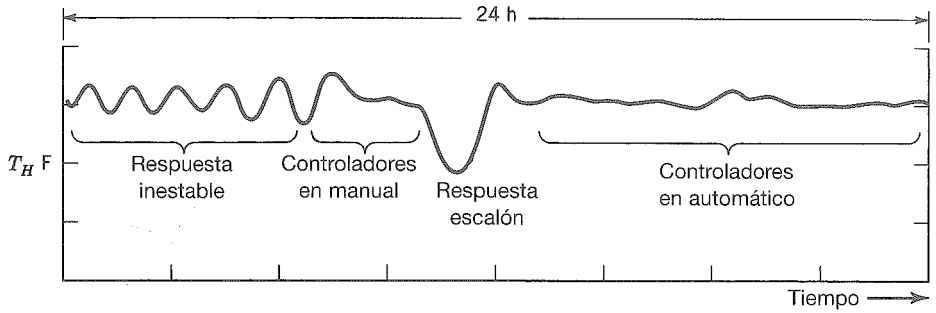


Figura 9-3 Respuesta de temperatura para el problema 9-2.

de que una perturbación, un cambio en el flujo de alimentación, entró al reactor. Con base en esta respuesta se decidió resintonizar los controladores. Ambos controladores se ajustaron en modo manual y después de que el proceso alcanzó una condición estable, la cual se muestra en la figura P9-3, se hizo un cambio de −5% en la salida del controlador de flujo a la válvula. En la tabla P9-1 se presentan las respuestas de flujo y de temperatura. Curiosamente, aun cuando el personal de la planta esperaba un cambio de 20°F en la temperatura, el cambio real fue de unos 230°F. En la figura P9-3 también se muestra esta respuesta de temperatura. Después de que la temperatura alcanzó el mínimo, se hizo un cambio de +5% en la salida del controlador de flujo para llevar la temperatura de nuevo a su condición de operación deseada. Con base en la respuesta del proceso, ambos contro-

Tabla P9-1 Tabla para el problema 9-2

Tiempo, s	Flujo, mscfh	Tiempo, s	Flujo, mscfh
0	19.46	20	17.01
5	17.51	25	16.98
10	17.32	⋮	⋮
15	17.08	45	16.49

Tiempo, min	T, °F	Tiempo, min.	T, °F	Tiempo, min	T, °F
0	1463	24	1393	46	1293
2	1463	26	1382	48	1287
4	1463	28	1372	50	1281
6	1462	30	1361	52	1275
8	1461	32	1351	54	1275
10	1457	34	1341	56	1263
12	1452	36	1332	58	1258
14	1444	38	1324	⋮	⋮
16	1435	40	1316		
18	1426	42	1308		
20	1415	44	1301	94	1235
22	1405				

ladores se sintonizaron y se ajustaron en modo automático. En la figura P9-3 se muestra la respuesta bajo control automático, con los nuevos ajustes y para la misma perturbación. Obtener los ajustes de los controladores usando el método descrito en este capítulo. El rango del transmisor de temperatura es de 0 a 2000°F y el del transmisor de flujo es de 0 a 24 mscfh.

9-3. En la figura P9-4 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control por retroalimentación. El ingeniero de control a cargo del proceso decidió que un sistema de control en cascada podría mejorar el desempeño del control. El esquema en cascada propuesto consiste en medir $C_2(s)$ con un transmisor con una ganancia de 0.5 y enviar la señal a un controlador (el controlador esclavo). El controlador que se muestra en la figura P9-4 pasa a ser el controlador maestro. Comparar la estabilidad de ambos sistemas, es decir, obtener la ganancia última y el periodo último para ambos sistemas. Suponer que el controlador esclavo es sólo proporcional y sintonizarlo por el método de Ziegler-Nichols.

Nota: la simulación de este proceso es el tema del problema 13-26.

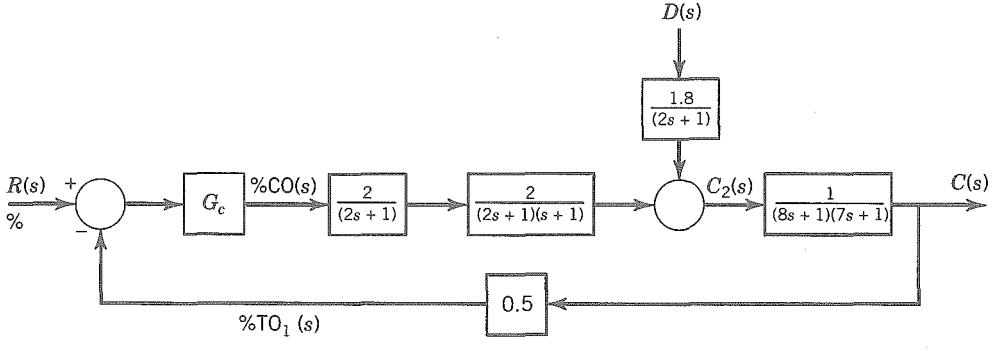


Figura P9-4 Diagrama de bloques para el problema 9-3.

9-4. Considérese el tanque reactor con agitación continua con camisa (CSTR) de la figura P9-5. Se obtiene la siguiente información a partir de pruebas en el reactor y su sistema de control: la función de transferencia de temperatura del reactor a la temperatura de la camisa es un retardo de primer orden con una ganancia de 0.6°C/°C y una constante de tiempo de 13 min. La función de transferencia de la temperatura de la camisa al flujo de enfriamiento es un retardo de primer orden con una ganancia de −2.0°C/(kg/s) y una constante de tiempo de 2.5 min. La válvula de control es lineal con una caída de presión constante y está dimensionada para dejar pasar 12 kg/s cuando está completamente abierta. Su constante de tiempo es despreciable. El transmisor de temperatura del reactor está calibrado para un rango de 50°C a 100°C y tiene una constante de tiempo de 1 min. El transmisor de la temperatura de la camisa está calibrado para un rango de 0°C a 100°C y su constante de tiempo es despreciable.

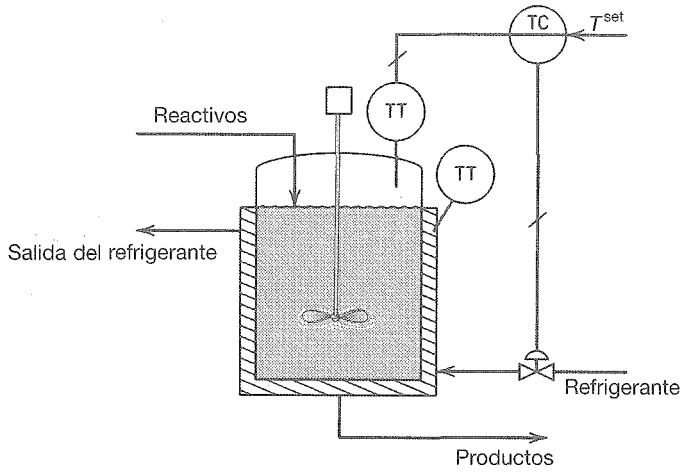


Figura P9-5 Reactor con camisa de enfriamiento para el problema 9-4.

a) Decidir la posición en falla apropiada de la válvula de control y la acción del controlador para un lazo de control por retroalimentación simple con el controlador de temperatura del reactor manipulando la posición de la válvula del flujo de enfriamiento. Trazar el diagrama de bloques indicando todas las funciones de transferencia y escribir la función de transferencia de lazo cerrado de la temperatura del reactor y su referencia. Prestar especial atención a los signos, los cuales deben corresponder con la posición en falla de la válvula y con la acción del controlador.
b) Escribir la ecuación característica para el lazo de retroalimentación simple y calcular su ganancia última y su periodo último por sustitución directa.
c) Diseñar un sistema de control en cascada para la temperatura del reactor con la temperatura de la camisa como la variable de proceso intermedia, especificando la acción de ambos controladores. Trazar el diagrama de bloques completo para el sistema de control en cascada indicando todas las funciones de transferencia y sus signos.
d) Suponiendo un controlador esclavo proporcional con una ganancia de 2 %/%, escribir la función de transferencia para el lazo de temperatura del forro y trazar de nuevo el diagrama de bloques con el lazo de temperatura de la camisa como un solo bloque.
e) Usando el diagrama de bloques simplificado del inciso anterior, escribir la ecuación característica del lazo de temperatura del reactor en el sistema de control en cascada y calcular la ganancia última y el periodo último por sustitución directa.

Nota: la simulación de este proceso es el tema del problema 13-27.

9-5. En la figura P9-6 se muestra el diagrama de un controlador de temperatura del reactor en cascada con un controlador de flujo de enfriamiento. La válvula de control es lineal con caída de presión constante y dimensionada para un flujo máximo de 500 gpm (galones por minuto); su constante de tiempo es de 0.2 min. El transmisor de flujo (FT) tiene un

rango de 0 a 500 gpm con constante de tiempo despreciable. El controlador de flujo (FC) es proporcional integral (PI) con una ganancia de 1.0 %CO/%TO y un tiempo integral ajustado en un valor igual a la constante de tiempo de la válvula. La función de transferencia de la temperatura del reactor al flujo de enfriamiento es un retardo de primer orden con una ganancia de –2°F/gpm y una constante de tiempo de 5.0 min. El transmisor de temperatura (TT) tiene un rango de 160° a 200°F y una constante de tiempo de 0.5 min.

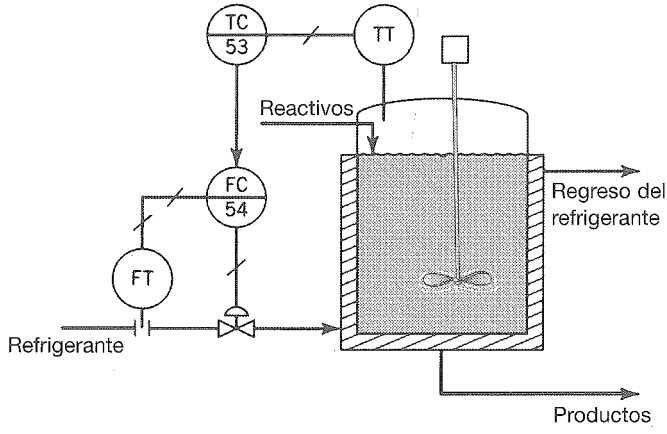


Figura P9-6 Reactor con camisa de enfriamiento para el problema 9-5.

a) Trazar el diagrama de bloques para el lazo de control en cascada indicando la función de transferencia para cada dispositivo. Prestar especial atención a la posición en falla de la válvula y a la acción (directa o inversa) de los controladores de flujo y de temperatura, e indicar los signos apropiados para cada una de sus funciones de transferencia.
b) Calcular la ganancia última y el periodo último del lazo de control de temperatura.
c) Repetir los incisos a) y b) suponiendo que se quita el controlador de flujo y que el controlador de temperatura manipula directamente la válvula. *Precaución*: la acción del controlador puede cambiar.

Capítulo
10

Control de relación, control override y control selectivo

En el capítulo 9 se inició la presentación de las estrategias de control que refuerzan el control por retroalimentación simple con el fin de proporcionar un desempeño de control mejorado. Específicamente, en el capítulo 9 se presentó el control en cascada. En este capítulo se continúa esta presentación con otras tres estrategias: el *control de relación*, el *control override* y el *control selectivo*; el control override también se conoce como *control de restricción*. El control de relación generalmente se usa para mantener dos corrientes o más en una relación prescrita. El control override y el control selectivo suelen implementarse por consideraciones de seguridad y optimización. Estas dos estrategias con frecuencia están asociadas con objetivos de control múltiples (variables controladas) y una sola variable manipulada. Hasta ahora sólo se han examinado procesos con un solo objetivo de control. El capítulo comienza con la presentación del software y los algoritmos de computadora disponibles para la implementación de éstas y otras estrategias de control.

10-1 SEÑALES, SOFTWARE Y ALGORITMOS DE CÁLCULO

Muchas de las estrategias de control presentadas en el presente capítulo y los subsecuentes requieren cierta capacidad de cálculo. Es decir, muchas de estas estrategias requieren la multiplicación, división, suma, resta, etc., de diferentes señales. Hasta hace algunos años estos cálculos se implementaban con instrumentación analógica. Hoy las computadoras permiten una implementación más simple, flexible, exacta, confiable y económica de estas operaciones.

Los sistemas computarizados que se usan en el control de procesos están basados en microprocesadores. Estos sistemas se denominan *sistemas de control distribuido* (DCS, por sus siglas en inglés) debido a que utilizan más de un microprocesador en la implementación de las estrategias de control. Así, en vez de tener una sola unidad de procesamiento (CPU) para

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

implementar todas las estrategias, éstas se distribuyen entre varios microprocesadores; esta distribución proporciona mayor confiabilidad.

10-1.1 Señales

Existen dos maneras diferentes de manipular las señales de campo una vez que entran a un DCS. La primera consiste en convertir la señal recibida en un número con unidades de ingeniería. Por ejemplo, si se lee la señal de un transmisor de temperatura, el número que se guarda en la memoria de la computadora es la temperatura en grados. A la computadora se le proporciona el valor menor del rango y la escala (*span*) del transmisor, y con esta información convierte la señal de campo en un número en unidades de ingeniería. Un posible comando en el DCS para leer cierta entrada es

Variable = AIN (# de canal de entrada, valor menor del rango del transmisor, escala del transmisor)

o bien,

$$T = AIN\ (3,50,100)$$

Este comando ordena al DCS leer una señal de entrada analógica (AIN) en el canal 3, le dice que la señal proviene de un transmisor con un valor menor de 50 y una escala de 100, y que le asigne el nombre T a la variable leída (posiblemente una temperatura de un transmisor con un rango de 50° a 150°C). Si la señal leída hubiera sido 60% o 0.6, entonces T = 110°C.

La segunda manera de manejar las señales, y afortunadamente la menos común, es no convertirlas en unidades de ingeniería, sino mantenerlas como un porcentaje, o fracción, de la escala. En este caso el comando de entrada podría quedar como

$$Variable = AIN\ (canal\ de\ entrada)$$

o

$$T = AIN(3)$$

y el resultado, para el mismo ejemplo anterior, es T = 0.6.

Durante la presentación en capítulos anteriores se mencionó que los instrumentos y controladores usan señales para transmitir información y que, en consecuencia, cada señal tiene un "significado físico". Es decir, cada señal utilizada en el esquema de control tiene cierto "significado" o, en otras palabras, está relacionada con un significado que tiene sentido desde el punto de vista de la ingeniería. Las señales están en porcentaje, pero porcentaje de "qué" (presión, temperatura, flujo, etc.). Este "qué" es el significado de la señal. Ahora es importante enfatizar de nuevo este hecho cuando se incursiona en el diseño de estrategias complejas para mejorar el desempeño del control.

Como se mencionó ya en este capítulo, las nuevas estrategias requieren con frecuencia la manipulación de señales a fin de calcular variables controladas, referencias o para decidir las acciones de control. Para ejecutar correctamente estos cálculos, es importante entender el significado de las señales.

Para ayudar a mantener toda la información organizada, y para entender los cálculos, al lado de cada señal se indicará su significado y la dirección del flujo de información (véase la figura 9-1.2). Esta práctica no es común en la industria, pero ayuda en el aprendizaje y la comprensión del tema.

10-1.2 Programación

Existen dos maneras de programar las manipulaciones matemáticas en sistemas DCS: "programación en bloques" y "programación en código".

Programación en bloques

La programación en bloques es software en forma de "subrutinas", las cuales se denominan algoritmos o bloques de cálculo. Cada bloque lleva a cabo una manipulación matemática específica. Por lo tanto, para desarrollar una estrategia de control, estos bloques de cálculo se enlazan entre sí, de tal modo que la salida de un bloque es la entrada de otro bloque. Este procedimiento de "enlace", o programación, se conoce comúnmente como *configuración* del sistema de control.

Algunas operaciones típicas que se realizan por bloques de cálculo son:

1. ***Adición/sustracción.*** Sumando y/o restando las señales de entrada se obtiene la señal de salida.
2. ***Multiplicación/división.*** Multiplicando y/o dividiendo las señales de entrada se obtiene la señal de salida.
3. ***Raíz cuadrada.*** Extrayendo la raíz cuadrada de la señal de entrada se obtiene la señal de salida.
4. ***Selector de altos/bajos.*** La señal de salida es la más alta/más baja de dos o más señales de entrada.
5. ***Limitador de altos/bajos.*** La señal de salida es la señal de entrada limitada a un valor alto/bajo predeterminado.
6. ***Generador de funciones o caracterización de señales.*** La señal de salida es una función de la señal de entrada. La función se define configurando las coordenadas x y y.
7. ***Integrador.*** La señal de salida es la integral con respecto al tiempo de la señal de entrada. El término industrial para el integrador es "totalizador".
8. ***Adelanto/atraso.*** La señal de salida es la respuesta de la función de transferencia

$$\text{Salida} = \left[\frac{\tau_{ld}s + 1}{\tau_{lg}s + 1}\right]\text{Entrada}$$

   Este cálculo se utiliza con frecuencia en esquemas de control, como el control feedforward, donde se requiere compensación dinámica.
9. ***Filtro.*** La señal de salida es la respuesta de la función de transferencia mostrada abajo. Este cálculo se usa con frecuencia para filtrar señales ruidosas.

$$\text{Salida} = \left[\frac{1}{\tau s + 1}\right]\text{Entrada}$$

10. ***Tiempo muerto.*** La señal de salida es igual a la señal de entrada con un retraso. Es muy fácil hacer este cálculo en computadora; sin embargo, hacerlo con instrumentación analógica es sumamente difícil.

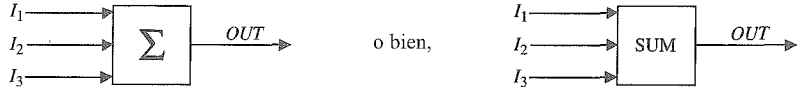
En la tabla 10-1.1 se muestran la notación y los algoritmos que se utilizan en este libro para los cálculos matemáticos. En muchos casos estos bloques se conectan gráficamente usando la tecnología convencional de "arrastrar y soltar".

Tabla 10-1.1 Bloques de cálculos.

OUT = salida del bloque
I_1, I_2, I_3 = entrada del bloque
K_0, K_1, K_2, K_3 = constantes que se usan para multiplicar cada entrada
B_0, B_1, B_2, B_3 = constantes

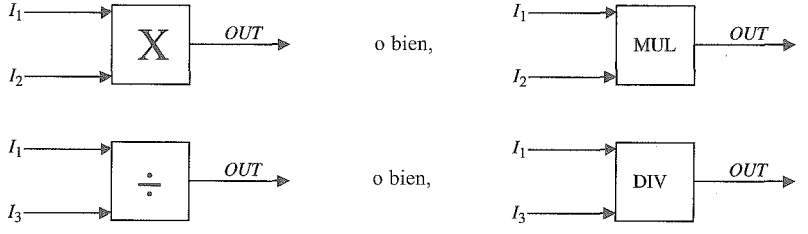
Sumador

$$\text{OUT} = K_1I_1 + K_2I_2 + K_3I_3 + B_0$$



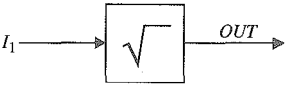
Multiplicador/divisor

$$\text{OUT} = \frac{K_0(K_1I_1 + B_1)(K_2I_2 + B_2)}{K_3I_3 + B_3} + B_0$$



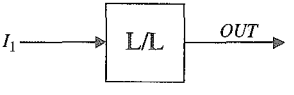
Raíz cuadrada

$$\text{OUT} = K_1\sqrt{I_1}$$



Adelanto/retardo

$$\text{OUT} = \frac{K_0(\tau_{ld}s + 1)}{(\tau_{lg}s_1 + 1)}I_1$$

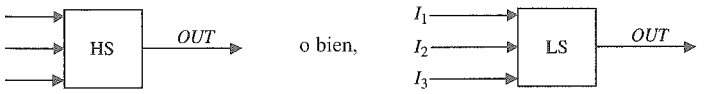


Selector

OUT = el máximo de las entradas I_1, I_2, I_3
OUT = el mínimo de las entradas I_1, I_2, I_3

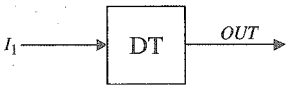
(continúa en la página siguiente)

Tabla 10-1.1 *(Continuación.)*



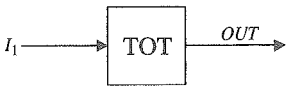
Tiempo muerto

OUT= entrada I_1 retrasada por t_0



Integrador

OUT= valor integrado, o totalizado, de I_1



Programación en código

Los fabricantes han desarrollado sus propios lenguajes de programación; sin embargo, todos ellos son similares y se parecen a los lenguajes Fortran, Basic o C. En la tabla 10-1.2 se presenta el lenguaje de programación que se utiliza en este libro; este lenguaje es similar a los que usan los diferentes fabricantes.

De particular interés es el controlador PID. En DCS que operan en unidades de ingeniería, es necesario suministrar al controlador PID el rango del transmisor que produce la variable controlada (hay varias formas de hacerlo). Con esta información, el controlador convierte tanto la variable como la referencia a valores porcentuales antes de aplicar el algoritmo del PID. Se procede así porque el error se calcula en %TO. Recuérdese, las unidades de K_c son %CO/%TO. Por tanto, la salida del controlador está en %CO. Una forma posible de "llamar" a un controlador PID es

OUT = PID (variable controlada, referencia, valor menor del rango del transmisor, escala del transmisor)

o bien,

OUT = PID (T, 75, 50, 100)

Este comando le ordena al DCS controlar la variable T a 75 (grados), la cual es proporcionada por un transmisor con un rango de 50 a 150 (grados). La salida del controlador (OUT) está en porcentaje (%CO). Los fabricantes ofrecen diferentes recursos para introducir al controlador los parámetros de sintonización y otra información, como la acción, información de rastreo (*tracking*) y los límites de protección para la saturación de la integral. No se tratarán aquí estos recursos, pero el lector debe recordar que es necesario suministrar esta información al DCS para completar la programación del controlador.

Es instructivo cerrar esta introducción a la programación en código mostrando dos lazos de control diferentes: en ambos ejemplos se supone que el DCS opera en unidades de ingeniería.

Tabla 10-1.2 Lenguaje de programación.

Entrada/salida
AIN = entrada analógica; AOUT = salida analógica
Formato:
Variable de entrada = AIN(# de canal de entrada, valor bajo del rango, escala del transmisor)
"Variable de entrada" se devolverá en unidades de ingeniería.

AOUT(# de canal de salida, variable de salida)
"Variable de salida" debe estar en %

Símbolos matemáticos
+, −, *, ∧, /, <, >, =

Enunciados
GOTO
IF/THEN/ELSE

Controlador
Salida = PID (variable, referencia, valor bajo del rango de la variable, escala de la variable).
"Salida" debe devolverse en %
Todos los términos en el argumento de PID deben estar en unidades de ingeniería.

Adelanto/retardo

$$\text{Salida} = K\left[\frac{\tau_{ld}s + 1}{\tau_{lg}s + 1}\right]\text{Entrada}$$

K = ganancia
τ_{ld} = constante de tiempo de adelanto, en minutos
τ_{lg} = constante de tiempo de retardo, en minutos
Salida = LdLg(variable de entrada, constante de tiempo de adelanto, constante de tiempo de retardo)
"Salida" está en las mismas unidades que la variable de entrada.
La constante de tiempo de adelanto y la constante de tiempo de retardo están en minutos.

Filtro
Utilizar el mismo comando que el adelanto/retardo pero hacer la constante de tiempo de adelanto = 0 min.

Integrador, o totalizador
Salida = TOT(variable de entrada)
"Salida" está en las unidades integradas de la variable de entrada.

Tiempo muerto
Salida = DT(variable de entrada, tiempo muerto)
"Salida" está en las mismas unidades que la variable de entrada.
El tiempo muerto está en minutos.

Comentarios
Para insertar un comentario en cualquier línea usar un signo de punto y coma seguido del comentario.

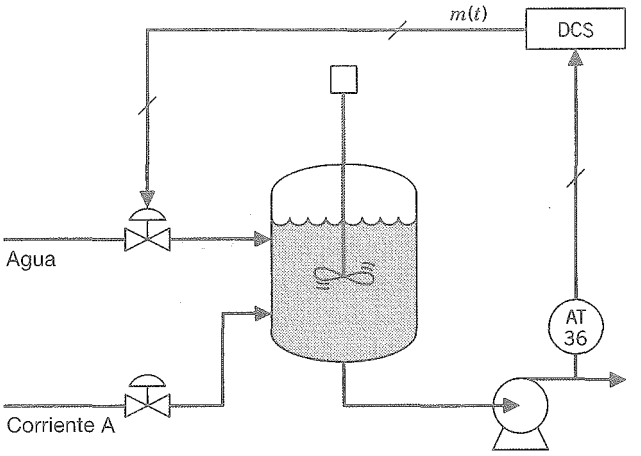


Figura 10-1.1 Proceso de mezclado.

Considérese primero el proceso mostrado en la figura 10-1.1, donde dos compuestos, A puro y agua, se mezclan. Se desea regular la concentración del compuesto A en la mezcla de salida en un valor de 0.2 lbmol/gal. Hay un analizador-transmisor con un rango de 0.05 a 0.5 lbmol/gal. En la figura 10-1.2 se muestra el programa para implementar este lazo.

Como un segundo ejemplo, considérese la estrategia en cascada que se muestra en la figura 9-1.2. Suponer que el rango para el TT101 es 320°-360°C y que el rango para el TT102 es 150°-200°C. El programa se muestra en la figura 10-1.3.

```
CA = AIN(4, 0.05, 0.45)          ; en el canal de entrada 4, lee,
CASET = 0.02                     ; la concentración del componente A
m = PID (CA, CASET, 0.05, 0.45)  ; referencia para la concentración de A
AOUT (1,m)                        ; controlador de la concentración
                                 ; en el canal de salida 1, envía la señal a la válvula
```

Figura 10-1.2 Programa de software para implementar el lazo de control de la figura 10-1.1.

```
TR = AIN (12,320,40)             ; en el canal de entrada 12, lee, la temperatura
                                   del reactor
TH = AIN (13,150,50)             ; en el canal de entrada 13, lee, la temperatura de salida
                                   de la caldera
TRSET = 341                      ; referencia para la temperatura en el reactor
M1 = PID (TR,TRSET,320,40)       ; salida del controlador maestro, %, TC101
THSET= 150 + M1*50/100           ; convierte la salida del controlador maestro en % a
                                 ; la referencia del controlador esclavo en °C
m = PID = (TH, THSET, 150, 50)   ; salida del controlador esclavo, %, TC102
AOUT = (5,m)                     ; en el canal de salida 5, envía la señal a la válvula
```

Figura 10-1.3 Programa de software para implementar la estrategia de control en cascada de la figura 9-1.2.

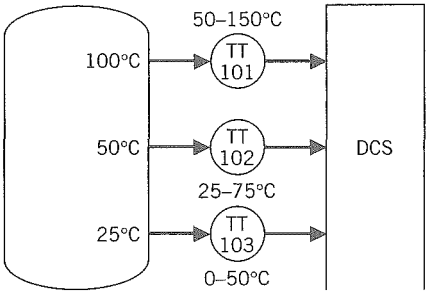


Figura 10-1.4 Tanque con tres transmisores de temperatura.

10-1.3 Algoritmos para calcular escalamientos

La segunda forma de manejar las señales de campo requiere cálculos adicionales antes de realizar las manipulaciones matemáticas necesarias. Primero se explica la necesidad y el significado de estos cálculos adicionales.

Considérese el tanque que se muestra en la figura 10-1.4, donde transmisores de temperatura con rangos diferentes miden la temperatura en tres sitios diferentes del tanque. En la figura se muestran los rangos de los transmisores y los valores de estado estacionario de cada temperatura, los cuales se encuentran en el valor medio de cada rango. Se desea calcular la temperatura promedio en el tanque. Este cálculo es directo para un sistema de control que lee cada señal y la convierte a unidades de ingeniería: los tres valores se suman y se dividen entre tres; esto es justamente lo que hace el programa de la figura 10-1.5. Las tres primeras líneas de código leen las temperaturas, denominadas T101, T102 y T103, y la cuarta línea calcula la temperatura promedio, TAVG.

```
1  T101 = AIN(1,50,100)       ; lee T101
2  T102 = AIN(2,25,50)        ; lee T102
3  T103 = AIN(3,0,50)         ; lee in T103
4  TAVG = (T101+T102+T103)/3 ; calcula la T promedio
```

Figura 10-1.5 Programa para leer las temperaturas, en unidades de ingeniería, y calcular la temperatura promedio.

```
1  T101 = AIN(1)     ; lee T101
2  T102 = AIN(2)     ; lee T102
3  T103 = AIN(3)     ; lee T103
4  TAVG = (T101+T102+T103)/3 ; calcula la T promedio
```

Figura 10-1.6 Programa para leer las temperaturas, en porcentaje de escala, y calcular la temperatura promedio.

Para los sistemas de control que tratan cada señal como un porcentaje de la escala, este cálculo simple generaría un resultado sin mucho sentido; en la figura 10-1.6 se muestra este programa. Es decir, debido a que cada señal es 50% de su rango, el resultado del cálculo también es 50%. Sin embargo, ¿50% de qué rango? ¿Cómo se traduce esta respuesta a una temperatura? Además, nótese que aun cuando todas las señales de entrada son de 50%, las temperaturas medidas correspondientes son diferentes porque los rangos son diferentes. Todo esto indica que para que el cálculo "tenga sentido", es necesario tomar en cuenta el rango de cada señal de entrada y el rango escogido para la variable de salida. Considérese que cada rango asegura la compatibilidad entre las señales de entrada y las señales de salida. El procedimiento para tomar en consideración el rango de cada señal se denomina "escalamiento". Afortunadamente, no muchos DCS manejan señales en porcentaje de la escala; sin embargo, para los que sí lo hacen, en la edición anterior de este libro (ver la referencia 1), se presenta el método para los cálculos de escalamiento.

10-2 CONTROL DE RELACIÓN

Una técnica de uso común en el control de procesos es el control de relación. El *control de relación* es una estrategia en la que se manipula una variable para mantenerla como una relación o proporción de otra. En esta sección se presentan dos ejemplos industriales para ilustrar su significado e implementación.

Ejemplo 10-2.1 Este primer ejemplo, realista y simple, muestra con toda claridad la necesidad del control de relación. Supóngase que se requiere mezclar dos corrientes de líquidos, A y B, en cierta proporción, o relación, R; el proceso se muestra en la figura 10-2.1. Es decir,

$$R = F_B/F_A$$

donde F_A y F_B son los caudales de las corrientes A y B, respectivamente.

Una manera fácil de lograr este objetivo se muestra en dicha figura. Cada corriente se controla con un lazo de flujo en el que las referencias de los controladores se ajustan de tal modo que los líquidos se mezclan en la proporción correcta. Sin embargo, supóngase ahora que la corriente A no se puede controlar pero sí medir. El caudal de esta corriente, llamado con frecuencia "flujo sin control", por lo general se manipula para controlar algo más, como el nivel o la temperatura aguas arriba. La tarea de control es ahora más difícil. De alguna manera el caudal de la corriente B debe variar a medida que el caudal de la corriente A cambie a fin de mantener la mezcla en la relación correcta. En la figura 10-2.2 se muestran dos posibles esquemas de control de relación.

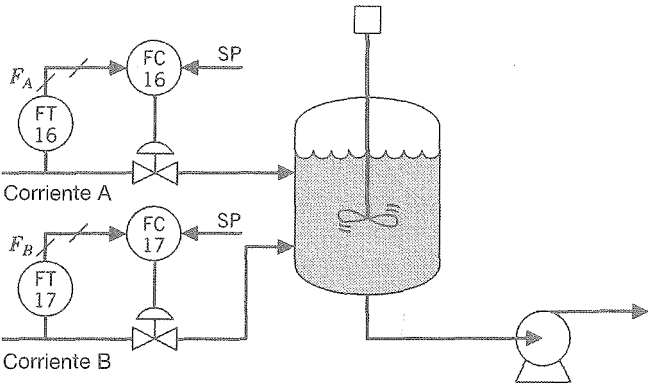


Figura 10-2.1 Control de mezclado de dos corrientes de líquido.

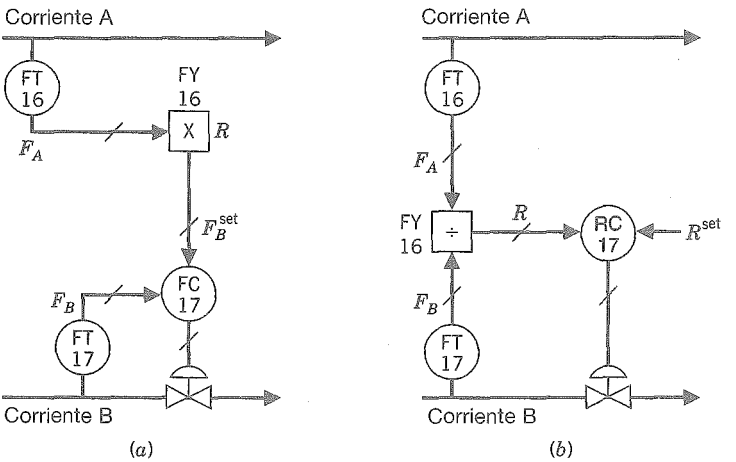


Figura 10-2.2 Control de relación de sistema de mezclado.

El primer esquema, mostrado en la figura 10-2.2*a*, consiste en medir el flujo sin control y multiplicarlo por la relación deseada, en FY16, para obtener el caudal requerido de la corriente B, es decir, $F_B^{set} = R \times F_A$. La salida de FY16 es el caudal requerido de la corriente B y se usa como la referencia para el controlador de flujo de la corriente B, FC17. De esta manera, a medida que el caudal de la corriente A varíe, la referencia que llega al controlador de la corriente B variará de manera consecuente a fin de mantener ambas corrientes en la relación requerida. Si se requiere una nueva relación entre ambas corrientes, ésta se establece en el multiplicador. La

```
1 FA=AIN(1, FT16LO, FT16SPAN) ; lee el flujo de la corriente A
2 FB=AIN(2, FT17LO, FT17SPAN) ; lee el flujo de la corriente B
3 FBSET=R*FA
4 CO17=PID(FB, FBSET, FT17LO, FT17SPAN) ; FC17
5 AOUT(1, CO17) ; envía la señal a la válvula
```

(*a*)

```
1 FA=AIN(1, FT16LO, FT16SPAN) ; lee el flujo de la corriente A
2 FB=AIN(2, FT17LO, FT17SPAN) ; lee el flujo de la corriente B
3 RCALC=FB/FA ; calcula la relación
4 CO17=PID(RCALC, R, RLO, RSPAN) ; RC17
5 AOUT(1, CO17) ; envía la señal a la válvula
```

(*b*)

Figura 10-2.3 Código equivalente a la figura 10-2.2.

referencia que llega al controlador de flujo de la corriente B se establece por un cálculo, no localmente. En la figura 10-2.3*a* se muestra el equivalente en código de la figura 10-2.2*a*, suponiendo que el sistema de control opera en unidades de ingeniería. FT16LO, FT16SPAN, FT17LO y FT17SPAN son el valor bajo y la escala de FT16 y FT17.

El segundo esquema de control de relación, mostrado en la figura 10-2.2*b*, consiste en medir ambas corrientes y dividirlas en FY16 para obtener la relación real que fluye por el sistema. Después, la relación calculada se envía al controlador RC17, el cual manipula el flujo de la corriente B a fin de mantener la referencia. La referencia de este controlador es la relación requerida, la cual se establece de manera local. En la figura 10-2.3*b* se muestra el esquema equivalente utilizando software. Nótese que en el controlador es necesario especificar RLO y RSPAN, que son el valor bajo y la escala en los que se esperaría que la relación cambie. Esto es equivalente a seleccionar el "rango de un transmisor de relación".

Los dos esquemas de control que se presentan en la figura 10-2.2 se utilizan; sin embargo, se prefiere el esquema de la figura 10-2.2*a*, ya que resulta en un sistema más lineal que el de la figura 10-2.2*b*. Esto se demuestra analizando las manipulaciones matemáticas de ambos esquemas. En el primer esquema, FY16 resuelve la ecuación $F_B^{\text{set}} = R \times F_A$. La ganancia de este dispositivo –es decir, cuánto cambia su salida por unidad de cambio en el caudal de la corriente A– está dada por

$$\frac{\partial F_B^{\text{set}}}{\partial F_A} = R$$

la cual, en tanto la relación requerida se mantenga constante, es un valor constante. En el segundo esquema, FY16 resuelve la siguiente ecuación

$$R = \frac{F_B}{F_A}$$

Su ganancia está dada por

$$\frac{\partial R}{\partial F_A} = \frac{F_B}{F_A^2} = \frac{R}{F_A}$$

por lo que cuando el caudal de la corriente A cambia, esta ganancia también cambia, produciendo una no linealidad.

Desde un punto de vista práctico, aun cuando sea posible controlar ambas corrientes, la implementación del control de relación aún puede ser más conveniente que el sistema de control de la figura 10-2.1. En la figura 10-2.4 se muestra un esquema de control de relación para este caso. Si es necesario cambiar el flujo total, el operador sólo necesita cambiar un flujo, la referencia de FC16, después de lo cual la referencia de FC17 cambia automáticamente una vez que el caudal de la corriente A ha cambiado. En el sistema de control de la figura 10-2.1, el operador necesita cambiar dos flujos, tanto la referencia de FC16 como la de FC17.

Los esquemas mostrados en las figuras 10-2.2*a* y 10-2.4 son bastante comunes en las industrias de procesos. La mayoría de los DCS ofrece un controlador, llamado PID-RATIO, que acepta una señal, aplica el mismo algoritmo que la unidad de relación, FY16 en la figura 10-2.2*a*, y usa el resultado interno como su referencia. Por lo tanto, si se usa el PID-RATIO, los cálculos realizados por FY16 y FC17 en la figura 10-2.4 se llevan a cabo en un solo bloque.

Como se ha señalado en varias ocasiones, al desarrollar esquemas de control resulta conveniente recordar que cada señal debe tener un significado físico. En las figuras 10-2.2 y 10-2.4 se ha anotado en cada señal su significado físico. Por ejemplo, en la figura 10-2.2*a*, la señal de salida de FT16 está relacionada con el caudal de la corriente A y está representada por F_A. Si esta señal se multiplica después por la relación F_B/F_A, la señal de salida de FY16 es el caudal requerido de la corriente B, F_B^{set}. Aun cuando este uso de la simbología no es una práctica estándar, en este capítulo se seguirán escribiendo las señales junto con sus significados físicos por razones didácticas. Se recomienda al lector hacer lo mismo.

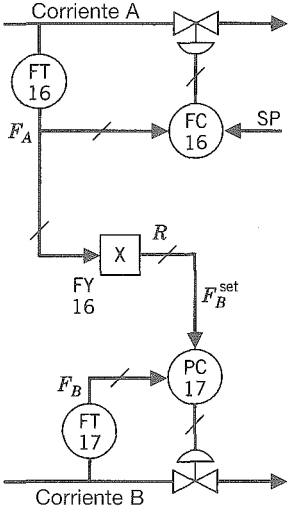


Figura 10-2.4 Control de relación del sistema de mezclado.

Ejemplo 10-2.2 Otro ejemplo común del control de relación usado en la industria de procesos es el control de la relación aire/combustible para una caldera u horno. El aire se introduce hasta un exceso establecido de lo que se requiere estequiométricamente para la combustión del combustible; esto se hace para asegurar una combustión completa. La combustión incompleta resulta no sólo en un uso ineficiente del combustible, sino también en la emisión de humo y la generación de contaminantes. La cantidad de aire en exceso depende del tipo de combustible, de la composición del combustible y del equipo utilizado. Sin embargo, a mayor cantidad de aire en exceso introducido, mayores serán las pérdidas de energía en los gases de escape. Por tanto, el control del flujo de aire y de combustible es de la mayor importancia para una operación segura y económica.

Es común usar el flujo de combustibles como la variable manipulada para mantener la presión del vapor producido en la caldera en algún valor deseado. En la figura 10-2.5 se muestra una manera de controlar la presión del vapor así como el esquema para el control de la relación aire/combustible. Este esquema se denomina control de posicionamiento en paralelo (O'Meara, 1979; Scheib y Russell, 1981; Congdon, 1981) con la relación combustible/aire ajustada manualmente. El controlador PT22 transmite la presión del vapor al PC22, el cual manipula una señal, llamada con frecuencia *señal maestra de la caldera*, que llega a la válvula de combustible. Simultáneamente, el controlador manipula la válvula de aire o compuerta de tiro a través de la unidad de relación FY24. Esta estación de relación establece la relación aire/combustible requerida.

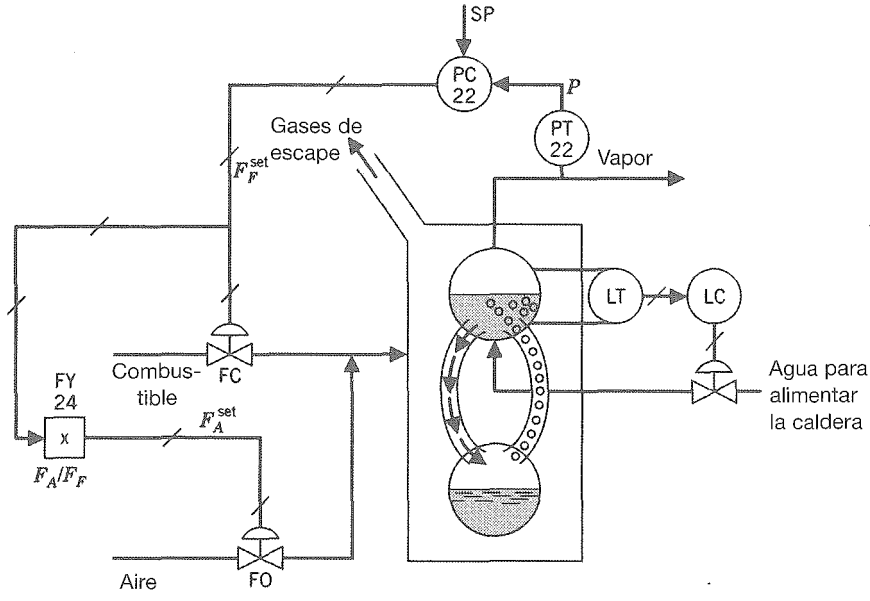


Figura 10-2.5 Control de posicionamiento paralelo con ajuste manual de la relación aire/combustible.

El esquema de control que se muestra en la figura 10-2.5 no mantiene en realidad una relación entre el flujo de combustible y aire, sólo mantiene una relación entre las señales que llegan a los elementos finales de control; es decir, los flujos reales no se miden ni se usan. El flujo a través de estos elementos depende de las señales y de la caída de presión a través de ellos. Por consiguiente, cualquier fluctuación de la presión a través de la válvula de combustible o de la compuerta de tiro del aire cambia el flujo, aun cuando su abertura no haya variado, lo cual afecta a su vez el proceso de combustión y la presión del vapor. Un sistema de control más adecuado para evitar este tipo de perturbaciones se muestra en la figura 10-2.6, el cual se denomina control

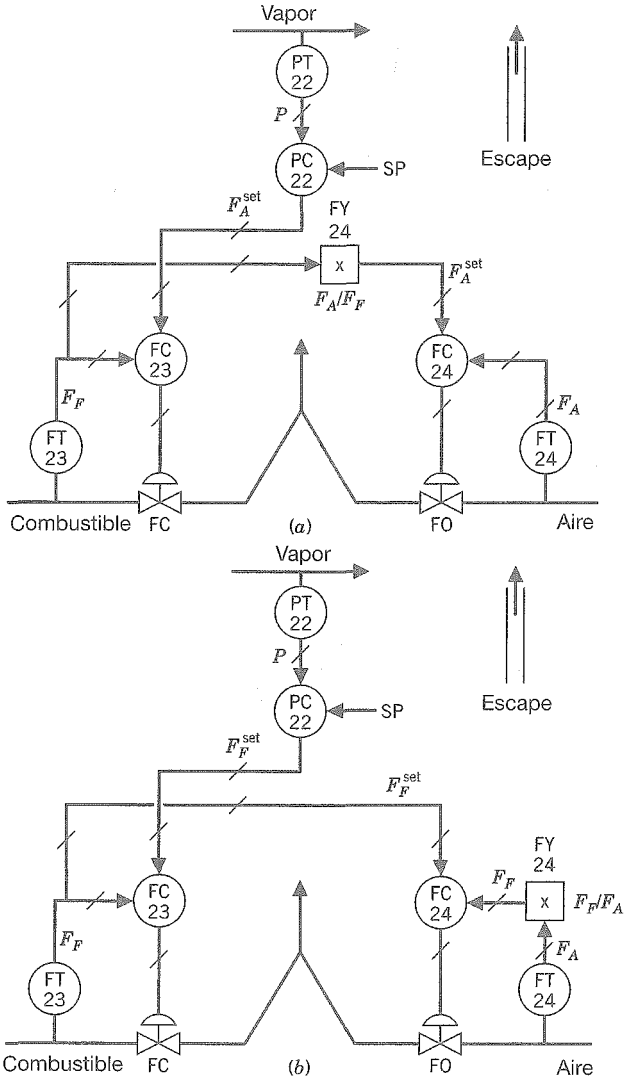


Figura 10-2.6 Control de medición completa con ajuste manual de la relación combustible/aire.

de medición completa (O'Meara, 1979). (La figura 10-2.6 se denomina diagrama de instrumentación "de arriba hacia abajo" y por lo general se usa para representar esquemas de control.) En este esquema, el controlador de presión establece el flujo de combustible, y el flujo de aire se calcula a través de la relación con el flujo de combustible. Los lazos de flujo corrigen cualquier perturbación. La relación combustible/aire se sigue ajustando manualmente.

Nótese la diferencia entre ambas figuras. En la figura 10-2.6*a*, la señal del FT23 se multiplica por la relación F_F/F_A antes de usarla como la referencia de FC24; nótese asimismo que el significado de todas las señales tiene sentido. La figura 10-2.6*b* puede parecer un tanto extraña. La figura muestra que la señal que establece la referencia de FC24 proviene de FT23 y, por lo tanto, que está relacionada con F_F; ¡FC24 es el controlador que cambia el flujo de aire! Nótese, sin embargo, que la señal de FT24, que está relacionada con el flujo de aire, se multiplica por F_F/F_A antes de utilizarla como la medición para FC24. Así, la medición y la referencia de FC24 tienen el mismo significado. Aun cuando la figura 10-2.6*b* parece ser un poco más difícil de entender, su uso en los esquemas siguientes resulta en un número menor de bloques (o cálculos) que es necesario emplear.

A continuación se analiza con mayor detalle el esquema de control mostrado en la figura 10-2.6. Cuando la presión en el cabezal de vapor aumenta, probablemente debido a una reducción en la demanda de vapor, el controlador de presión reduce la demanda de combustible. Cuando la referencia del controlador de flujo de combustible desciende, el controlador cierra la válvula para satisfacer la referencia. Por otra parte, cuando el flujo de combustible disminuye, la referencia del controlador de flujo de aire también disminuye. Por lo tanto, el flujo de aire sigue al flujo de combustible y durante un periodo de transición la mezcla de combustible que entra es más rica en aire de lo normal. Nótese que en la figura se ha indicado el significado de cada señal.

Considérese ahora el caso en que la presión en el cabezal de vapor disminuye, probablemente debido a un aumento en la demanda de vapor, y entonces el controlador de presión aumenta la demanda de combustible. Cuando la referencia del controlador de flujo de combustible aumenta, el controlador abre la válvula para satisfacer la referencia. Cuando el flujo de combustible aumenta, la referencia del flujo de aire se incrementa; el flujo de aire sigue de nuevo al flujo de combustible. En este último caso, la mezcla de combustible que entra no es más rica en aire durante el periodo de transición y si no se tiene cuidado incluso podría ser pobre en aire. Ciertamente esta situación no es deseable por dos razones importantes. Primera, una mezcla pobre en aire puede resultar en bolsas de combustible puro dentro de la cámara de combustión: una condición no muy segura (de hecho, explosiva). Segunda, una mezcla pobre en aire resulta en combustible sin quemar en los gases de escape, lo cual constituye un riesgo ambiental y una pérdida de energía y dinero. Por lo tanto, es necesario diseñar un sistema de control para evitar estas situaciones. Este esquema de control debe ser tal que primero incremente el aire y después el combustible cuando se requiera más combustible para mantener la presión. Cuando se requiera menos combustible, debe disminuir primero el combustible y luego el aire. Este patrón asegura que la mezcla de combustible será rica en aire durante los periodos de transición. En la figura 10-2.7 se muestra un esquema conocido como *control de lazos cruzados*, que proporciona el control requerido. Tan sólo es necesario agregar dos selectores, LS23 y HS24, al esquema de control de la figura 10-2.6*b*. Los selectores proporcionan una forma de decidir cuál de los dispositivos establece la referencia del controlador. Se reco-

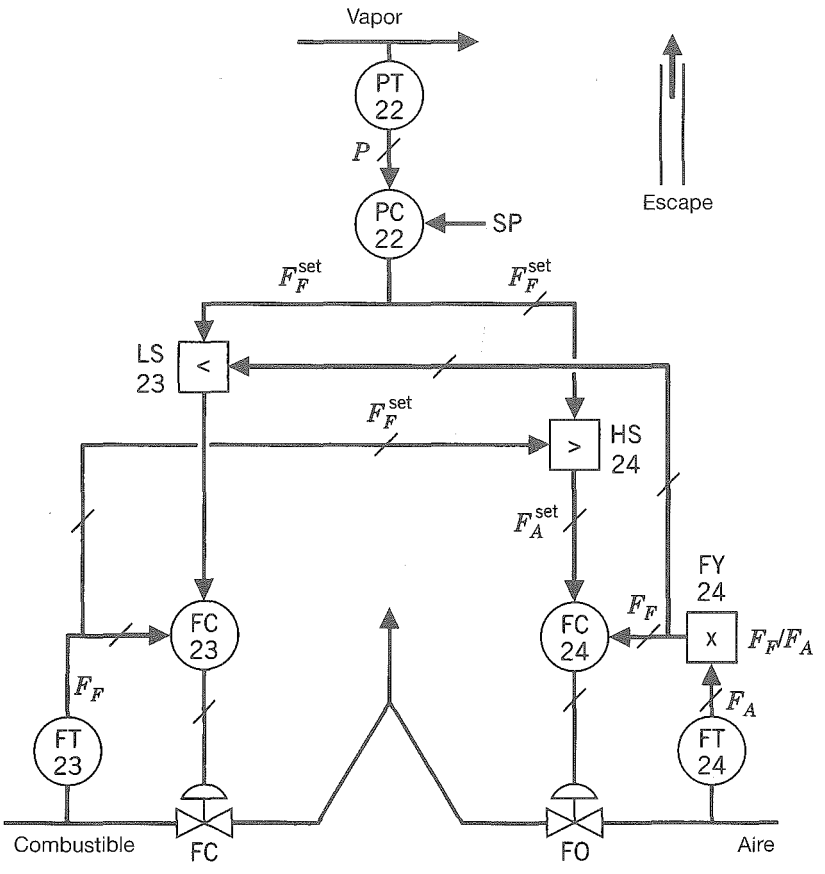


Figura 10-2.7 Control de lazos cruzados.

mienda al lector "seguir" el esquema para entender cómo funciona. Una manera de hacerlo es suponer que la relación aire/combustible es 2, y que en estado estacionario el flujo de combustible requerido es 10 unidades de flujo. Considérese luego qué sucede si la presión en el cabezal aumenta y el controlador de presión solicita sólo 8 unidades de flujo de combustible. Finalmente, considérese qué sucede si la presión en el cabezal disminuye y el controlador de presión pide 12 unidades de flujo de combustible.

Debido a que la cantidad de aire en exceso es tan importante en la operación de calderas por razones económicas y ambientales, se ha propuesto proporcionar alguna retroalimentación basada en el análisis de los gases de escape; el análisis suele ser el porcentaje de O_2 o de CO. Después se propone que la relación aire/combustible se ajuste con base en ese análisis. Este nuevo esquema, mostrado en la figura 10-2.8, consiste en un analizador-transmisor, AT25, y un

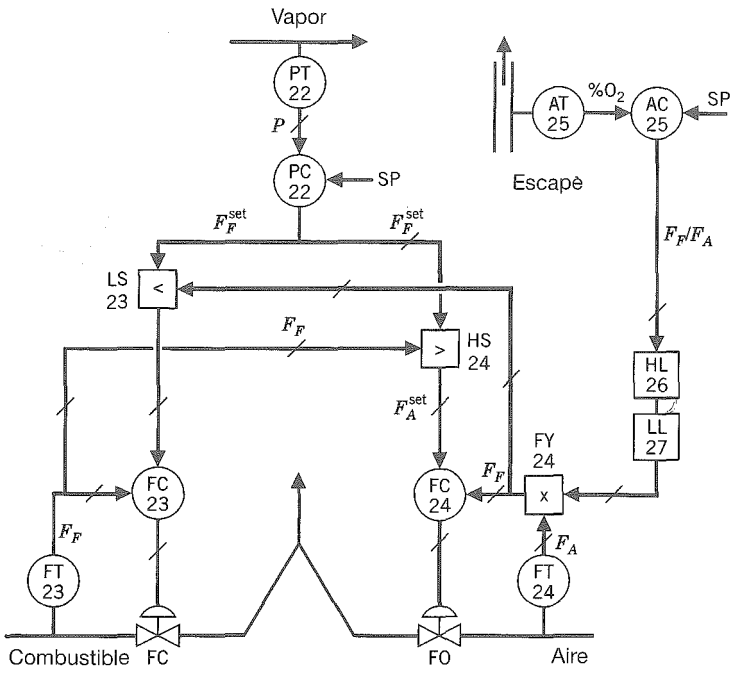


Figura 10-2.8 Control de lazos cruzados con compensador de O_2.

```
 1  P = AIN(1, P_low, P_span) ; lee la presión
 2  FA = AIN(2, FA_low, FA_span) ; lee el flujo de aire
 3  FF = AIN(3, FF_low, FF_span) ; lee el flujo de combustible
 4  %02 = AIN(4, %O2_low, %O2_span) ; lee el % de O2
 5  FOUT = PID(P, P^set, P_low, P_span) ; PC22
 6  ROUT = PID(%O2, %O2^set, %O2_span) ; AC25
 7  PFF^set = (FF_span/100)*FOUT + FF_low ; convierte la salida de PC22 en
                    ; flujo de combustible en unidades de ingeniería
 8  RATIO = (RATIO_span/100)*ROUT + RATIOl_ow ; convierte la salida de AC25
                    ;  a la relación FA/FF en unidades de ingeniería
 9  IF RATIO>RATIOMAX THEN RATIO = RATIOMAX ; HL26
10  IF RATIO<RATIOMIN THEN RATIO = RATIOMIN ; LL27
11  RFF = FA*RATIO ; FY24
12  IF PFF^set<RFF THEN FF^set = PFF^set ELSE FF^set = RFF ; LS23
13  COFUEL = PID(FF, FF^set, FF_low, FF_span) ; FC23
14  IF PFF^set>FF THEN FF^set = PFF^set ELSE FF^set = FF ; HS24
15  COAIR = PID(RFF, FF^set, FF_low, FF_span) ; FC24
16  AOUT(1, COFUEL) ; envía la señal a la válvula de combustible
17  AOUT(2, COAIR) ; envía la señal a la válvula de aire
```

Figura 10-2.9 Programa de código equivalente a la figura 10-2.8.

controlador, AC25. El controlador mantiene el porcentaje de O_2 requerido, por ejemplo, en los gases de escape estableciendo la relación combustible/aire requerida. En la figura se muestra el uso de los limitadores de altos y bajos, HL26 y LL27. Estas dos unidades se utilizan principalmente por razones de seguridad. Aseguran que la relación aire/combustible estará siempre entre valores mínimos y máximos preestablecidos.

En la figura 10-2.9 se muestra el programa de software equivalente a la estrategia de control de la figura 10-2.8; los comentarios asociados con cada enunciado ayudan a relacionar el programa con la figura 10-2.8.

En esta sección se han presentado dos aplicaciones de control de relación. Como se mencionó al inicio de la sección, el control de relación es una técnica común utilizada en las industrias de procesos; es simple y fácil de usar.

10-3 CONTROL OVERRIDE O DE RESTRICCIÓN

El *control override* o *control de restricción* es una estrategia simple pero poderosa usada por lo general como: 1) estrategia de protección para mantener las variables del proceso dentro de límites que es necesario hacer cumplir a fin de garantizar la seguridad del personal y los equipos, así como la calidad de los productos, y 2) estrategia de optimización que permite una transición uniforme entre esquemas de control para poder obtener el mayor provecho. Como una técnica de protección, el control override no es tan radical como el control entrelazado. El control entrelazado se usa principalmente para protegerse de fallas de los equipos. Cuando se detecta una falla, el sistema entrelazado por lo general interrumpe el proceso. Los sistemas entrelazados no se examinan aquí, pero se dan las referencias 5 y 6 para su estudio. Se presentan a continuación dos ejemplos de estrategias de control de restricción para ilustrar su concepto e implementación.

Ejemplo 10-3.1 Considérese el proceso de la figura 10-3.1. Un líquido caliente saturado entra en un tanque y de ahí se bombea bajo control de flujo de regreso al proceso. Bajo operación normal, el nivel en el tanque está a la altura h_1. Si por cualquier circunstancia el nivel del líquido desciende por debajo de h_2, el líquido no tendrá la suficiente succión positiva neta (NPSH) y ocurrirá cavitación en la bomba. Por lo tanto, es necesario diseñar un esquema de control que evite esta condición. Este nuevo esquema de control se muestra en la figura 10-3.2.

Ahora el nivel en el tanque está medido y controlado. La referencia de LC50 es un valor que está un poco arriba de h_2, como se observa en la figura. Es importante notar la acción de los controladores y el elemento final de control. La bomba de velocidad variable es tal que cuando la energía de entrada aumenta (un caudal en este caso) bombea más líquido. Por lo tanto, el controlador FC50 es de acción inversa mientras que el controlador LC50 es de acción directa. La salida de cada controlador está conectada a un selector de bajos, LS50, y la señal de este selector llega a la bomba.

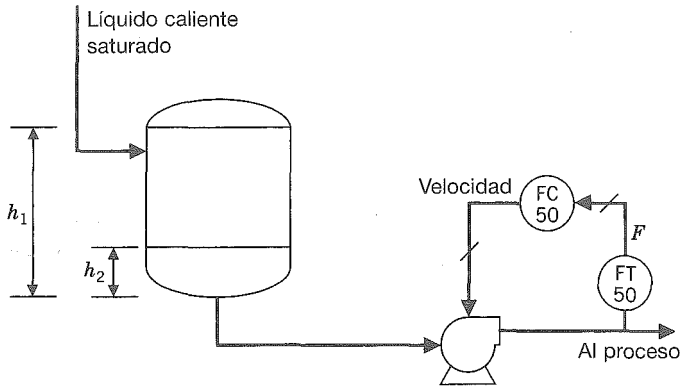


Figura 10-3.1 Tanque y lazo de control de flujo.

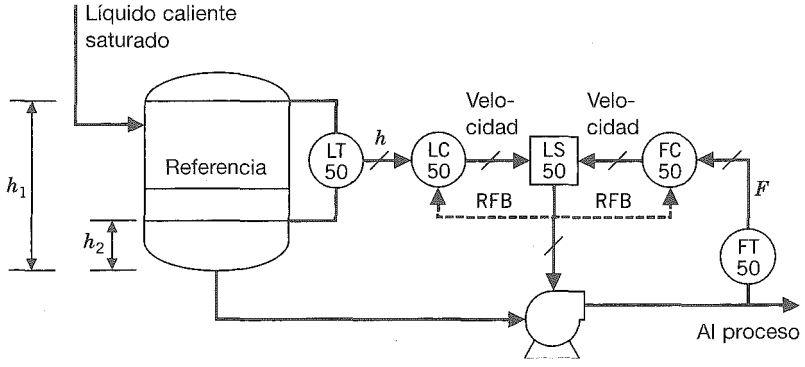


Figura 10-3.2 Esquema de control override.

Bajo condiciones de operación normal, el nivel está en h_1, que está por encima de la referencia del controlador de nivel. Por consiguiente, el controlador tratará de acelerar la bomba lo más posible, incrementando su salida a 100%. Bajo condiciones normales, la salida del controlador de flujo puede ser de 75% y el selector de bajos selecciona esta señal para manipular la velocidad de la bomba. Por tanto, en condiciones normales, el controlador de flujo manipula la bomba. El controlador de nivel no está conectado a la bomba ya que el nivel no se encuentra en un estado indeseable. Ésta es la condición de operación deseada.

Supóngase ahora que el flujo de líquido caliente saturado que entra al tanque disminuye y que el nivel comienza a bajar. Tan pronto como el nivel llega por abajo de la referencia del controlador de nivel, éste desacelerará la bomba reduciendo así su salida. Cuando la salida del controlador de nivel cae por abajo de la salida del controlador de flujo, el selector de bajos selecciona la salida del controlador de nivel para manipular la bomba. Se puede decir que el controlador de nivel "anula" (*overrides*) al controlador de flujo.

Cuando el flujo de líquido caliente vuelve a su valor normal y el nivel aumenta por encima de la referencia, el controlador de nivel aumenta su salida para acelerar la bomba. Una vez que la salida del controlador de nivel aumenta por encima de la salida del controlador de flujo, el selector de bajos selecciona al controlador de flujo y la operación vuelve a su condición normal.

Una consideración importante al diseñar un sistema de control override es la protección contra la saturación debida a la acción de integral para cualquier controlador con integración. La salida del controlador no seleccionado debe detenerse en 100%, no en un valor mayor, o en 0%, no en un valor menor. Una operación aún más deseable es aquella en la que, si la salida del controlador seleccionado es 75%, entonces fuerce la salida del controlador no seleccionado a estar cerca de 75%, no de 100%. De esta manera fuerza la salida del controlador no seleccionado a estar cerca de la salida seleccionada. Esta operación deseable se logra fácilmente usando la técnica de *integral por retroalimentación (RFB)* presentada en el capítulo 5. En la figura 10-3.2 se muestran las conexiones de la integral por retroalimentación (líneas discontinuas) para ambos controladores. En este caso, la señal de la integral por retroalimentación que llega a los controladores proviene de un cálculo externo, un selector de bajos, no del controlador en sí, como se muestra en la figura 5-3.16; algunas veces se hace referencia a esta señal como integral por retroalimentación externa. La salida del selector de bajos es la que llega a la bomba y también se usa como la señal de la integral por retroalimentación de los controladores.

En la figura 10-3.3 se muestra un esquema de los dos controladores con integral por retroalimentación externa. Para explicar con mayor detalle cómo opera este sistema, considérese que en estado estacionario el controlador de flujo produce una señal de 75% para mantener su referencia y que el nivel en el tanque está por encima de su referencia. En este caso, el

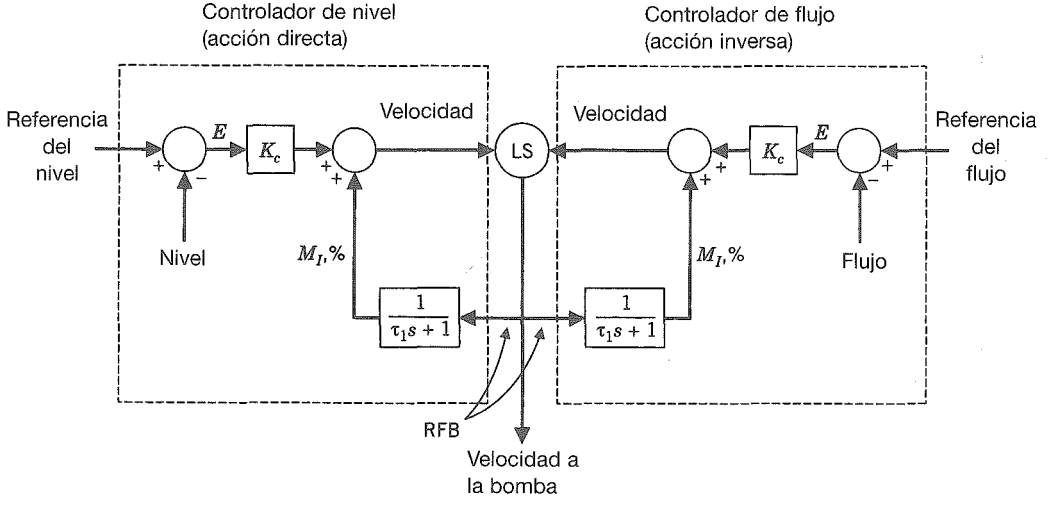


Figura 10-3.3 Controladores con integral por retroalimentación (RFB).

controlador de nivel aumentará su salida para acelerar la bomba y llevar el nivel a la referencia. Así, el selector de bajos selecciona la señal de 75% del controlador de flujo; ésta es la condición de operación normal. La señal de salida del selector es la señal RFB de ambos controladores, y la señal M_1 correspondiente será también de 75%. En este estado estacionario, el error en el controlador de flujo es cero, y el cálculo proporcional de este controlador también es cero. Como el nivel del tanque está por encima de la referencia, el error en el controlador de nivel es positivo (acción directa) y el cálculo proporcional tendrá cierto valor, dependiendo del error y de la ganancia del controlador, digamos 10%. Puesto que la señal M_1 es de 75%, la salida del controlador de nivel al selector de bajos es de 85%. Supóngase ahora que el flujo de entrada al tanque disminuye y que el nivel en el tanque comienza a bajar. Cuando esto ocurre, el cálculo proporcional en el controlador de nivel también comienza a disminuir de 10% hacia abajo, así como la salida del controlador de 85% hacia abajo. Cuando el nivel en el tanque desciende por debajo de su referencia, el error en el controlador y el cálculo proporcional se hacen negativos, dando como resultado una salida menor que 75%, digamos 74%. En este momento, el selector elige esta señal, el controlador de nivel se sobrepone al controlador de flujo y envía la señal a la bomba para desacelerarla; este nuevo valor también es la señal RFB de los controladores. Cuando la bomba se desacelera para evitar un nivel bajo en el tanque, el error en el controlador de flujo se hace positivo (acción inversa) y el cálculo proporcional aumenta para incrementar el flujo y corregir el error. Sin embargo, el selector de bajos no permitirá esta acción correctiva; es más importante evitar un nivel bajo en el tanque. Nótese que la salida del controlador de flujo será entonces igual a la salida del selector de bajos más su propio cálculo proporcional.

La mayoría de los controladores ofrece esta capacidad de la integral por retroalimentación externa. En resumen, esta capacidad, algunas veces llamada rastreo de la salida, permite al controlador no seleccionado sobreponerse al controlador seleccionado tan pronto como su error cambia de signo. Más de dos controladores pueden enviar señales a un selector y tener señales RFB; esto se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10-3.2 Un calentador de fuego directo, u horno, es otro proceso común que requiere la implementación de control de restricción. En la figura 10-3.4 se muestra un calentador con un control de temperatura que manipula el flujo de combustible gaseoso. Se ha omitido la manipulación del aire de combustión para simplificar el diagrama; sin embargo, es el mismo que se discutió en detalle en la sección de control de relación. Hay varias condiciones en este calentador que pueden resultar bastante peligrosas. Entre ellas se incluyen: 1) una presión del combustible mayor a la que puede mantener una llama estable, y 2) temperaturas de escape o tubería más altas que las que el equipo puede manejar con seguridad. Si alguna de estas condiciones está presente, el flujo de combustible se debe disminuir para evitar una condición insegura; en este momento, el control de temperatura ciertamente no es tan importante como la seguridad de la operación. Sólo cuando las condiciones inseguras desaparecen se permite volver al control directo de la temperatura.

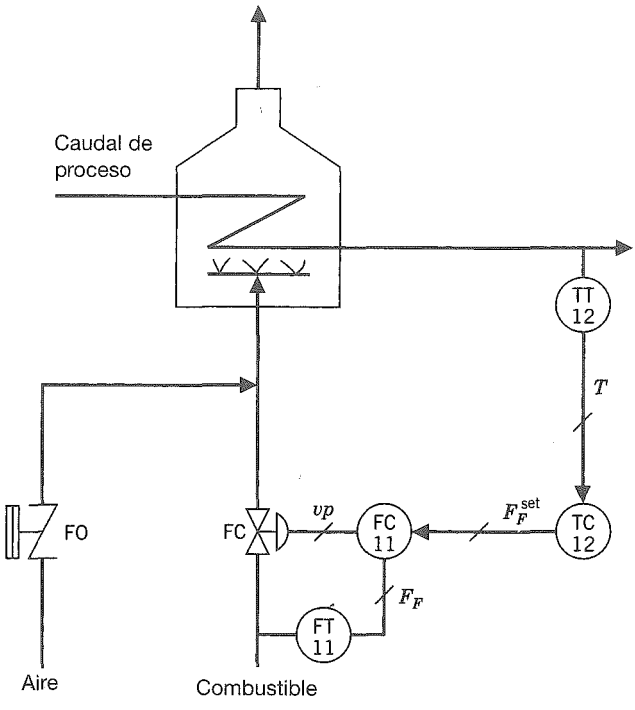


Figura 10-3.4 Control de temperatura del calentador.

La figura 10-3.5 muestra una estrategia de control de restricción para protegerse de las condiciones inseguras descritas. La presión del combustible gaseoso normalmente está por debajo de la referencia de PC14, por lo que el controlador tratará de aumentar la referencia del controlador de flujo de combustible. En general, la temperatura de la chimenea estará también por debajo de la referencia de TC13, por lo que este controlador también tratará de aumentar la referencia del controlador de flujo de combustible. Así, bajo condiciones normales de operación, el controlador de temperatura de salida del calentador es el controlador seleccionado por el selector de bajos, ya que su salida será la más baja de los tres controladores. Sólo cuando existe una de las condiciones inseguras entonces el controlador TC12 es "anulado" por uno de los otros controladores.

Como se explicó en el ejemplo 10-3.1, es importante prevenir la saturación de los controladores que no son seleccionados. Por lo tanto, el sistema de control debe configurarse para que provea la integral por retroalimentación. Ésta se muestra con líneas discontinuas en la figura.

El esquema de control de restricción de la figura 10-3.5 contiene una posible dificultad de seguridad. Si en algún momento el personal de operación pusiera el controlador de flujo FC11 en la referencia local o en modo manual (referencia remota desactivada), no tendría efecto la seguridad proporcionada por TC13 y PC14. Esto podría resultar en una condición de operación insegura e inaceptable. Quizá al lector le gustaría pensar cómo diseñar una nueva estrategia de control de restricción que permita al personal de operación poner el controlador de flujo en

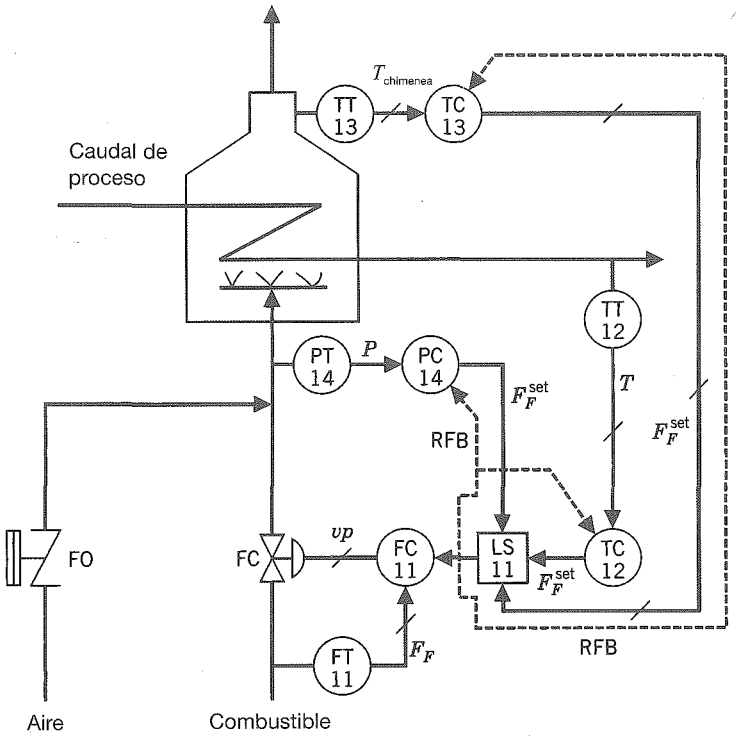


Figura 10-3.5 Control de la temperatura del calentador: control de restricción.

automático o manual y seguir contando con la seguridad proporcionada por TC13 y PC14. Éste es uno de los problemas del final del capítulo.

En la introducción de esta sección se mencionó que el control override se usa comúnmente como un esquema de protección, y en los ejemplos 10-3.1 y 10-3.2 se presentaron dos aplicaciones del mismo. Tan pronto como el proceso vuelve a las condiciones normales de operación, el esquema de override regresa automáticamente a su estado de operación normal. En los dos ejemplos presentados se muestran objetivos de control (variables controladas) múltiples con una sola variable manipulada; sin embargo, sólo se cumple un objetivo a la vez.

10-4 CONTROL SELECTIVO

El *control selectivo* es otra estrategia de control interesante usada por consideraciones de seguridad y optimización de procesos. A continuación se presentan dos ejemplos para mostrar sus principios e implementación.

Ejemplo 10-4.1 Considérese el reactor de flujo pistón mostrado en la figura 10-4.1, donde ocurre una reacción catalítica exotérmica. En la figura se muestra el control de temperatura del reactor. El sensor que proporciona la medición de la temperatura debe estar colocado en el punto de temperatura más alta (llamado punto caliente) del reactor. Cuando el catalizador en el reactor pierde fuerza, o si las condiciones cambian, el punto caliente se mueve. Se desea diseñar un esquema de control tal que su variable medida "se mueva" cuando el punto caliente se mueva. Una estrategia de control que logra la especificación deseada se muestra en la figura 10-4.2. El selector de altos en este esquema selecciona el transmisor con la salida más alta y así la variable controlada es siempre la temperatura más alta, o la más próxima a ella.

Una consideración importante al implementar esta estrategia de control es que todos los transmisores de temperatura deben tener el mismo rango para que sus señales de salida puedan compararse sobre la misma base. Otra consideración que puede ser importante es instalar un indicador para saber cuál de los transmisores está produciendo la señal más alta. Si el punto caliente se mueve más allá del último transmisor, TT17, esto puede ser una indicación de que es tiempo ya sea de regenerar o de cambiar el catalizador. La longitud restante del reactor probablemente no es suficiente para lograr la conversión deseada.

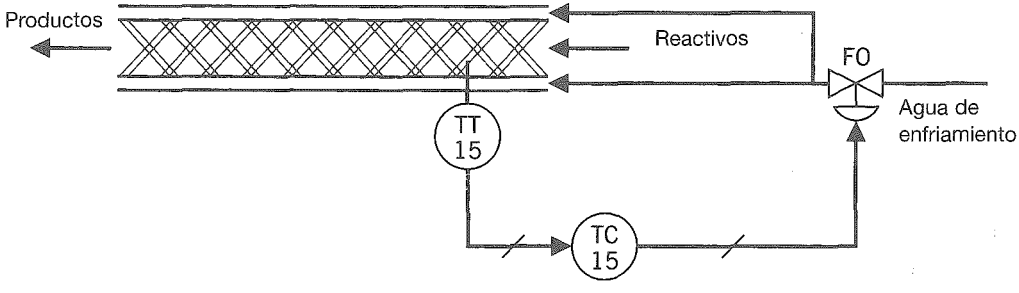


Figura 10-4.1 Control de temperatura de un reactor de flujo pistón.

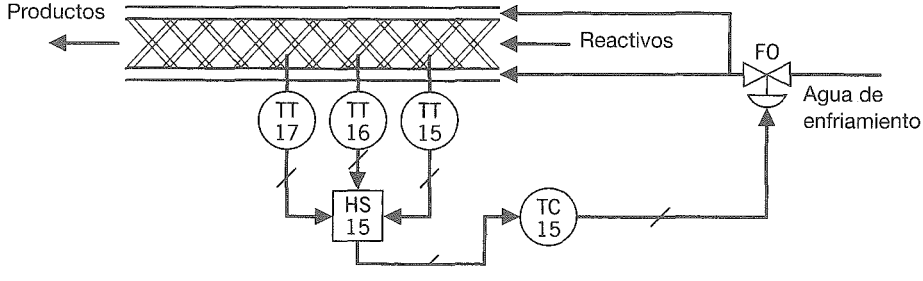


Figura 10-4.2 Control selectivo para un reactor de flujo pistón.

Ejemplo 10-4.2 Un proceso instructivo y realista en el que el control selectivo puede mejorar la operación se muestra en la figura 10-4.3. Un horno calienta un aceite de transferencia de calor para suministrar una fuente de energía a varias unidades de proceso. Cada unidad manipula el flujo de aceite requerido para mantener su variable controlada en la referencia. Además, la temperatura del aceite a la salida del horno se controla manipulando el flujo de combustible. Se incluye también un lazo de control de *bypass,* DPC16.

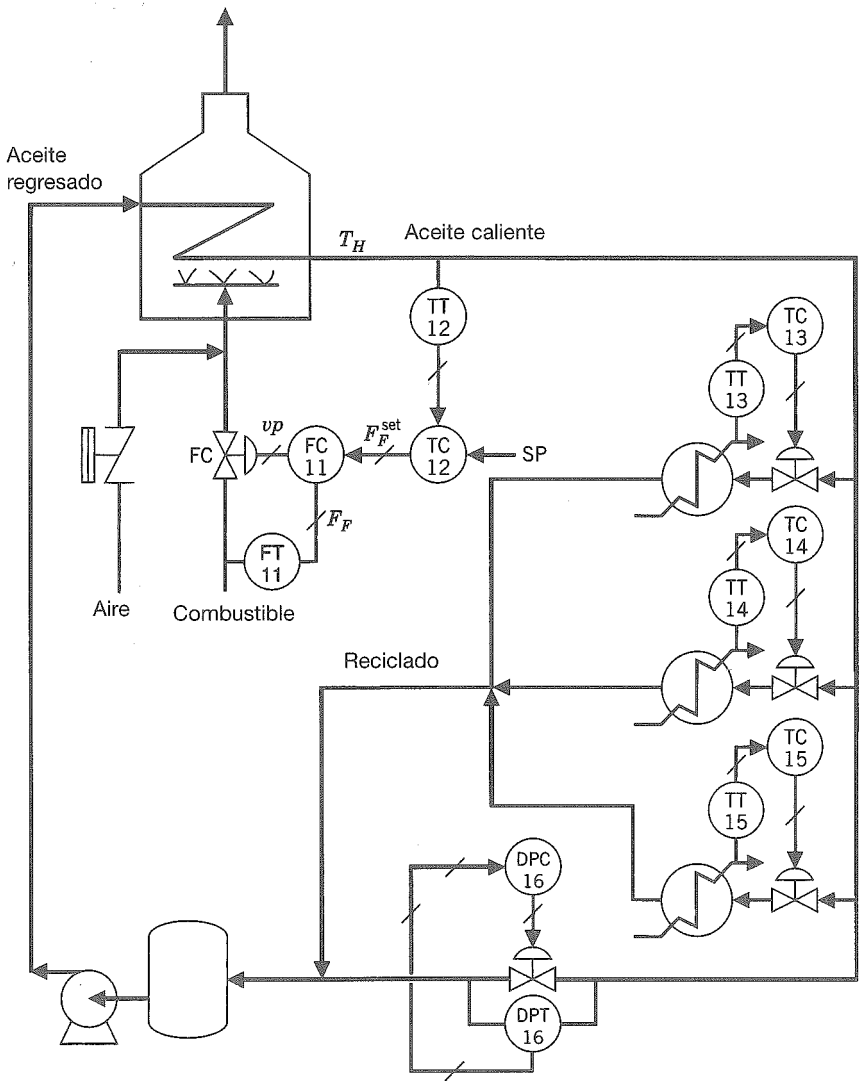


Figura 10-4.3 Sistema de aceite caliente.

Supóngase que se nota que la válvula de control de cada unidad no está muy abierta, es decir, la salida de TC13 es de 20%, la de TC14 es de 15% y la de TC15 es de 30%. Esto indica que la temperatura del aceite caliente proveniente del horno puede ser más alta de lo que requieren los usuarios. Por consiguiente, no se requiere mucho flujo de aceite y la mayor parte del mismo es desviado de los usuarios. Esta situación es ineficiente desde el punto de vista energético, ya que es necesario quemar una gran cantidad de combustible para obtener una temperatura alta del aceite. Además, una cantidad importante de la energía proporcionada por el combustible se pierde en el medio ambiente que rodea al sistema de tuberías y en los gases de escape.

Una operación más eficiente es aquella que mantiene el aceite que sale del horno a una temperatura lo suficientemente caliente para proveer la energía necesaria a los usuarios con un flujo mínimo a través de la válvula de paso. En este caso, las válvulas de control de temperatura estarán casi completamente abiertas. En la figura 10-4.4 se muestra una estrategia de control

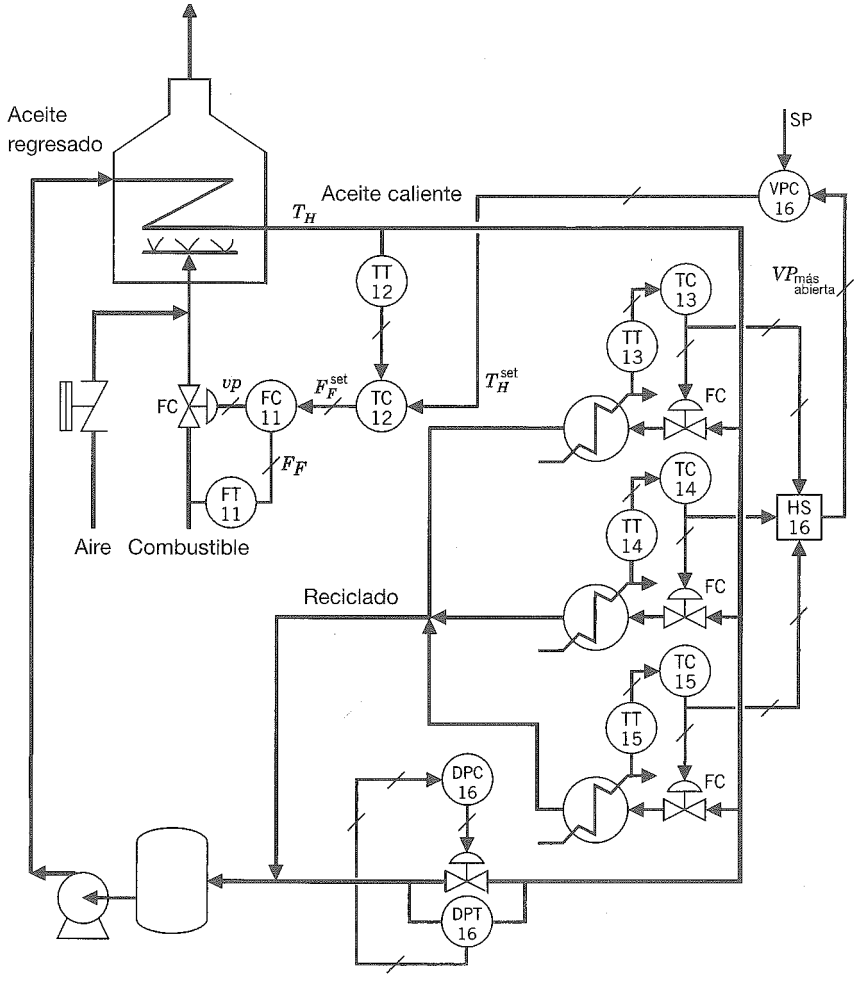


Figura 10-4.4 Control selectivo para el sistema de aceite caliente.

selectivo que proporciona este tipo de operación. La estrategia selecciona primero la válvula más abierta usando un selector de altos, HS16. El controlador de posición de la válvula, VPC16, controla la posición seleccionada –digamos 90% abierta– manipulando la referencia del controlador de temperatura del horno. Por lo tanto, la estrategia asegura que la temperatura del aceite proveniente del horno esté lo "suficientemente caliente".

Nótese que como la válvula más abierta se selecciona comparando las señales que llegan a cada válvula, éstas deben tener las mismas características.

La estrategia de control selectivo muestra nuevamente que, con un poco de lógica, una operación de un proceso se puede mejorar de manera significativa.

10-5 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL

En esta sección se presentan tres ejemplos a fin de proporcionar algunas sugerencias sobre cómo diseñar esquemas de control. Para obtener el máximo beneficio de esta sección, se le recomienda al lector leer primero el planteamiento del ejemplo y tratar de solucionarlo él mismo. Después podrá comparar su solución con la solución presentada.

Ejemplo 10-5.1 Considérese el reactor, figura 10-5.1, donde se lleva a cabo la reacción exotérmica A + B → C. El diagrama muestra el control de temperatura del reactor mediante la manipulación de la válvula del agua de enfriamiento.

a) Diseñar un esquema de control para regular el flujo de los reactivos que entran al reactor. Los flujos de A y B deben entrar al reactor a cierta velocidad, R, es decir, $R = F_B/F_A$. Ambos flujos pueden medirse y controlarse.

b) La experiencia operativa ha demostrado que la temperatura de entrada del agua de enfriamiento presenta cierta variación. Debido a los retardos en el sistema, esta perturbación por lo general resulta en oscilaciones cíclicas en la temperatura del reactor. El ingeniero a cargo de esta unidad se ha preguntado si algún otro esquema de control puede ayudar a mejorar el control de temperatura. Diseñar un esquema de control para ayudarlo.

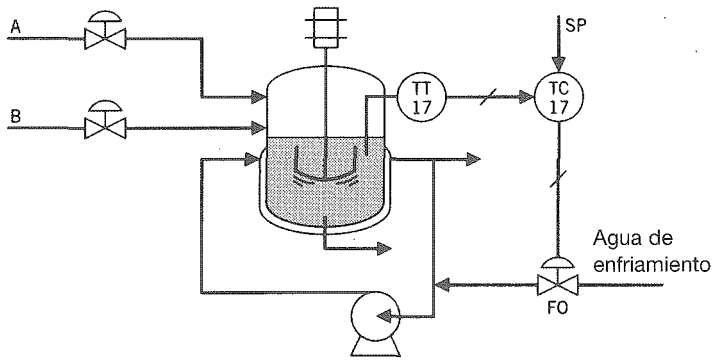


Figura 10-5.1 Reactor para el ejemplo 10-5.1.

c) La experiencia operativa también ha demostrado que bajo algunas condiciones excepcionales el sistema no suministra el enfriamiento suficiente. En este caso, la única manera de controlar la temperatura es reduciendo el flujo de los reactivos. Diseñar un esquema de control para hacer esto automáticamente. El esquema debe ser tal que cuando la capacidad de enfriamiento vuelva a la normalidad el esquema del inciso b) se restablezca.

Solución **a)** En la figura 10-2.2*a* se presenta un esquema que se puede usar para satisfacer el objetivo del control de relación; en la figura 10-5.2 se muestra la aplicación del esquema al presente proceso. El operador establece el flujo de la corriente A, la referencia de FC15, y así el flujo de la corriente B se establece en consecuencia.

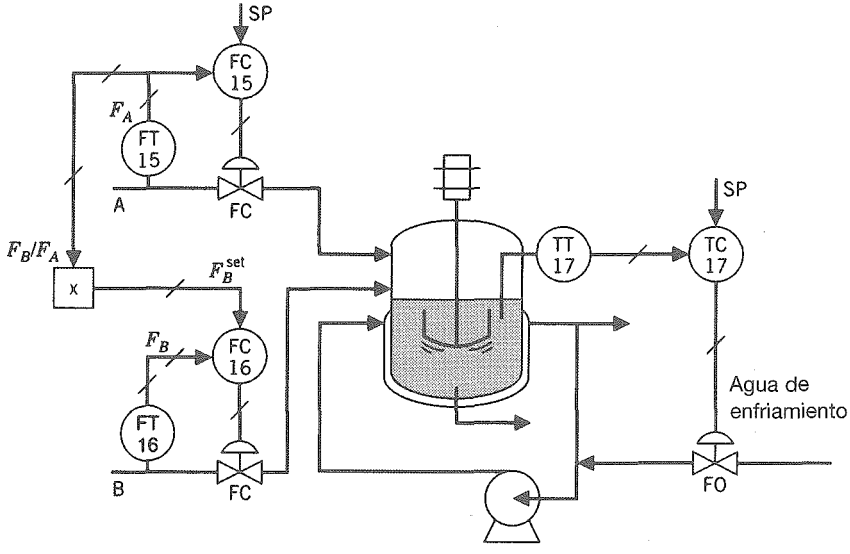


Figura 10-5.2 Esquema de control de relación para el inciso a) del ejemplo 10-5.1.

b) Un procedimiento común que se sigue para diseñar esquemas de control es pensar primero en cómo se controlaría el proceso manualmente. En este caso, luego de pensar un poco, usted podría decidir que sería bueno si de algún modo pudiera saber lo antes posible que ha habido un cambio en la temperatura del agua de enfriamiento. Si se sabe de este cambio, entonces usted podría hacer algo para contrarrestar sus efectos. Por ejemplo, si la temperatura del agua de enfriamiento aumentara, entonces podría abrir la válvula para alimentar más agua fresca al proceso; en la figura 10-5.3 se ilustra esta idea. "Pero, piensa usted, no estoy considerando en absoluto el controlador de temperatura TC17". Bueno, por qué no usar la salida de TC17 como referencia, como en un esquema de control en cascada; en la figura 10-5.4 se muestra el esquema propuesto. Después usted decide automatizar su idea, para lo cual traza la figura 10-5.5. Usted se ha reemplazado a usted mismo con otra inteligencia: la de un controlador.

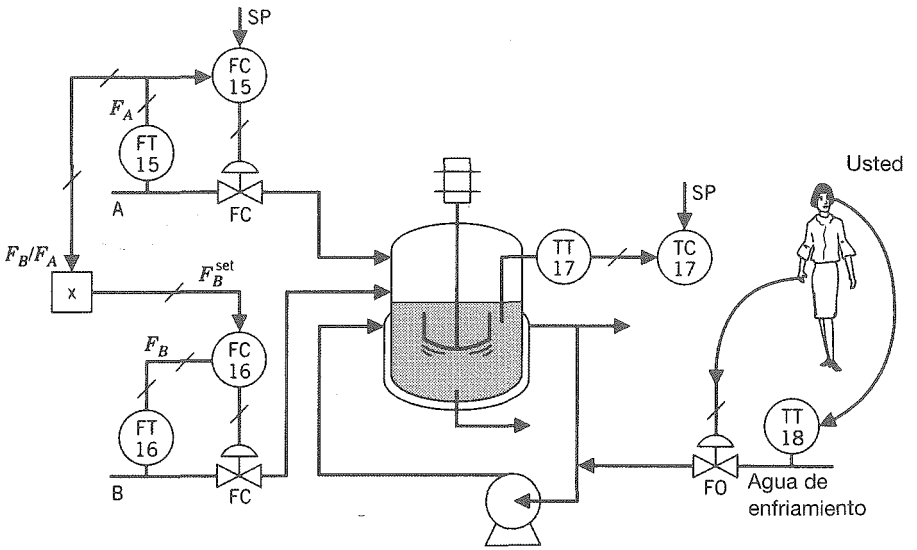


Figura 10-5.3 Esquema de control *manual* propuesto (primer borrador) para compensar los cambios en la temperatura de entrada del agua de enfriamiento.

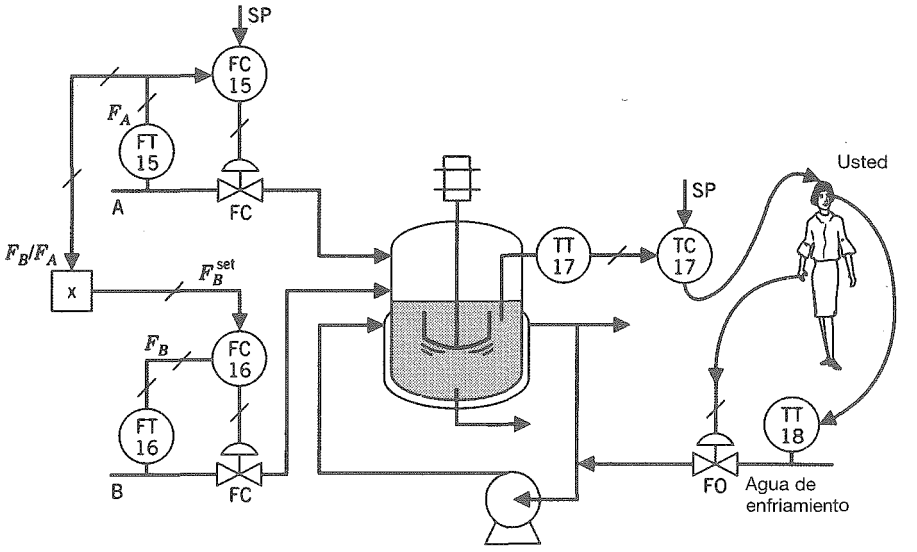


Figura 10-5.4 Esquema de control *manual* propuesto (segundo borrador) para compensar los cambios en la temperatura de entrada del agua de enfriamiento.

Ahora que usted ha dibujado su idea, tendrá que analizarla con mayor detalle. La figura muestra que el controlador maestro, TC17, examina la temperatura del reactor, la compara con

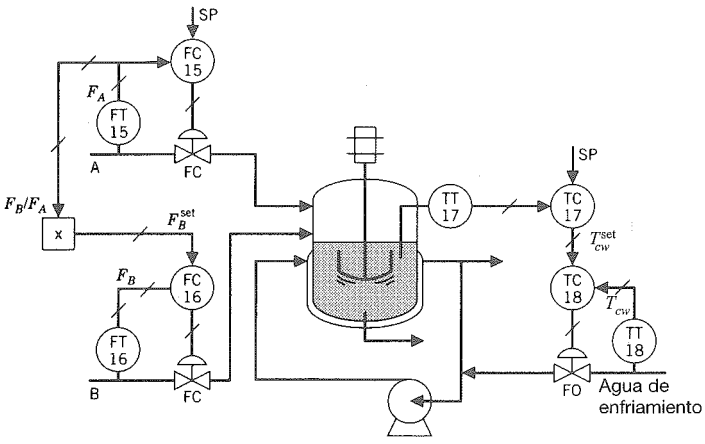


Figura 10-5.5 Esquema de control *automático* propuesto (primer borrador) para compensar los cambios en la temperatura de entrada del agua de enfriamiento.

su referencia y decide la referencia del controlador esclavo. Es decir, el controlador maestro decide la temperatura de entrada requerida del agua de enfriamiento, T_{CW}^{set}. Supóngase ahora que la temperatura de entrada del agua de enfriamiento no es igual a la referencia, por ejemplo, $T_{CW} > T_{CW}^{set}$. ¿Qué haría el controlador esclavo? ¿Abrir la válvula para dejar entrar más agua? ¿Con esta acción se haría $T_{CW} = T_{CW}^{set}$? La respuesta es por supuesto que no. El controlador abriría la válvula pero T_{CW} no cambiaría. ¡Abrir o cerrar la válvula no tiene ningún efecto sobre T_{CW}! El controlador seguiría abriendo la válvula hasta que se saturara. Éste es un ejemplo perfecto en el que la acción tomada por el controlador no afecta su medición. ¿Recuerda usted el M-D-A en el capítulo 1? ¿Recuerda que dijimos que estas tres operaciones –medición, decisión y acción– deben estar en un lazo? Es decir, la acción (A) tomada por el controlador debe afectar su medición (M). El esquema de la figura 10-5.5 no proporciona un "lazo cerrado" sino un "lazo abierto".

Bueno, entonces este esquema no funciona. Pero la idea sigue siendo válida, es decir, saber tan pronto como sea posible que la temperatura del agua de enfriamiento ha cambiado. ¿Qué tal el esquema de la figura 10-5.6? Repita el análisis anterior y llegará a la misma conclusión. Es decir, que el esquema sigue proporcionando un "lazo abierto". Abrir o cerrar la válvula no afecta la temperatura en el punto donde se está midiendo.

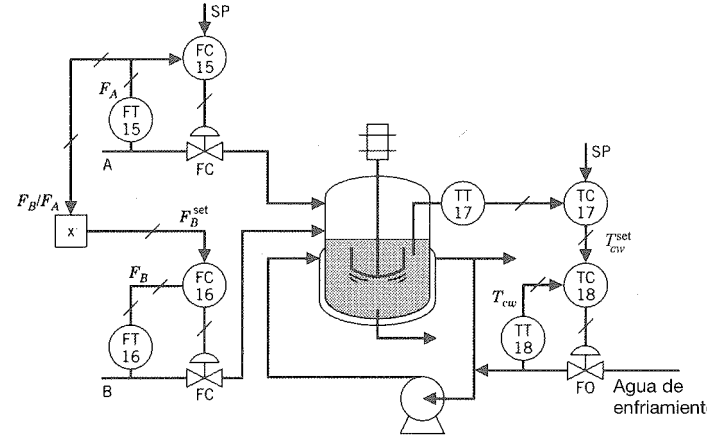


Figura 10-5.6 Esquema de control *automático* propuesto (segundo borrador) para compensar los cambios en la temperatura de entrada del agua de enfriamiento.

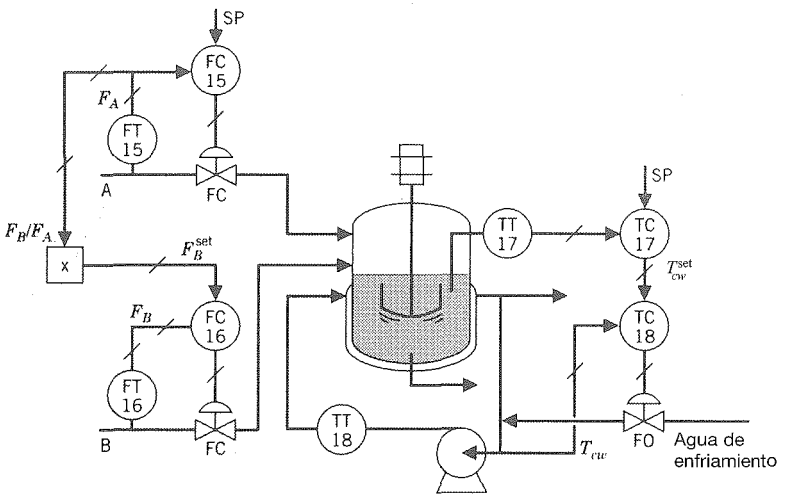


Figura 10-5.7 Esquema de control en cascada.

Lo antes que usted puede detectar un cambio en el agua de enfriamiento y tener un lazo cerrado es en la línea de reciclado o en la camisa de enfriamiento; en la figura 10-5.7 se muestra el transmisor instalado en la línea de reciclado, y en la figura 10-5.8 se muestra el transmisor instalado en la camisa de enfriamiento. Repita el análisis anterior hasta convencerse de que ambos esquemas proporcionan un lazo cerrado.

c) Para este inciso, usted se pone de nuevo en lugar del controlador. Sabe que tan pronto como el sistema de enfriamiento deje de proporcionar el enfriamiento suficiente deberá reducir el flujo de reactivos al reactor. Pero, ¿cómo se dará cuenta de que no hay suficiente capacidad de enfriamiento? Desde luego, si la temperatura en el reactor, o en la camisa, alcanza un valor alto, el sistema de enfriamiento quizá no esté proporcionando el enfriamiento requerido. Pero, ¿cuál es este valor? Un análisis (pensamiento) adicional señala que el mejor indicador de la capacidad de enfriamiento es la abertura de la válvula de enfriamiento. Cuando esta válvula está completamente abierta no es posible más enfriamiento. En ese momento el controlador de temperatura no puede hacer nada más, y el proceso está fuera de control. En la figura 10-5.9 se muestra lo que usted puede hacer si fuera el controlador.

La idea parece buena, pero se trata de un control manual, de modo que ¿cómo podría automatizarse? En la figura 10-5.10 se muestra un esquema de control override para lograrlo. A continuación se explica el concepto. La señal de salida de TC18 que llega a la válvula de enfriamiento también se usa como la medición para un controlador que se llamará VPC20. Este controlador compara la medición, la cual indica la posición de la válvula, con la referencia y envía una señal al controlador de flujo FC15. El VPC20 está haciendo exactamente lo que usted estaba haciendo en la figura anterior. Nótese que antes que la señal de VPC20 llegue a FC15 pasa a través de un selector. El selector se usa para elegir cuál de las señales, la establecida por el operador o la que llega de VPC20, en realidad va hacia FC15. En este momento no sabemos qué tipo de selector utilizar (de bajos o de altos), entonces decidámoslo ahora.

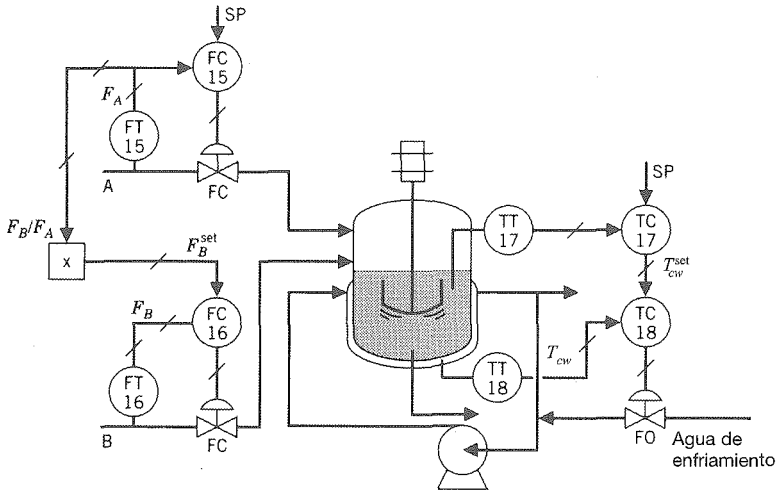


Figura 10-5.8 Esquema de control en cascada.

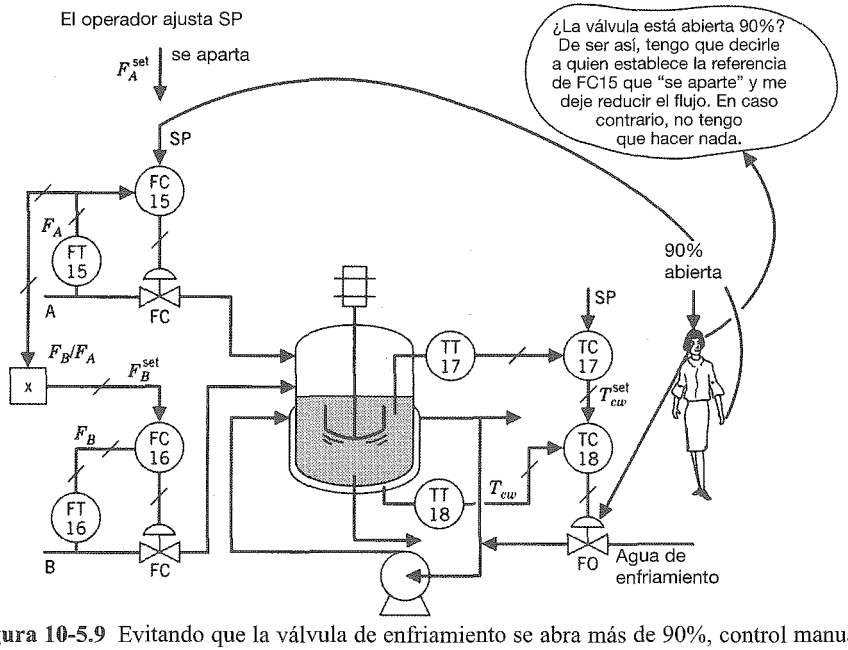


Figura 10-5.9 Evitando que la válvula de enfriamiento se abra más de 90%, control manual.

Bajo condiciones normales, la válvula de enfriamiento está abierta menos de 90%, digamos 65%. Como VPC20 "ve" que esta válvula está abierta 65%, decide que la única manera de abrirla a 90% es pidiendo más reactivos, para lo cual aumenta su señal de salida –digamos hasta

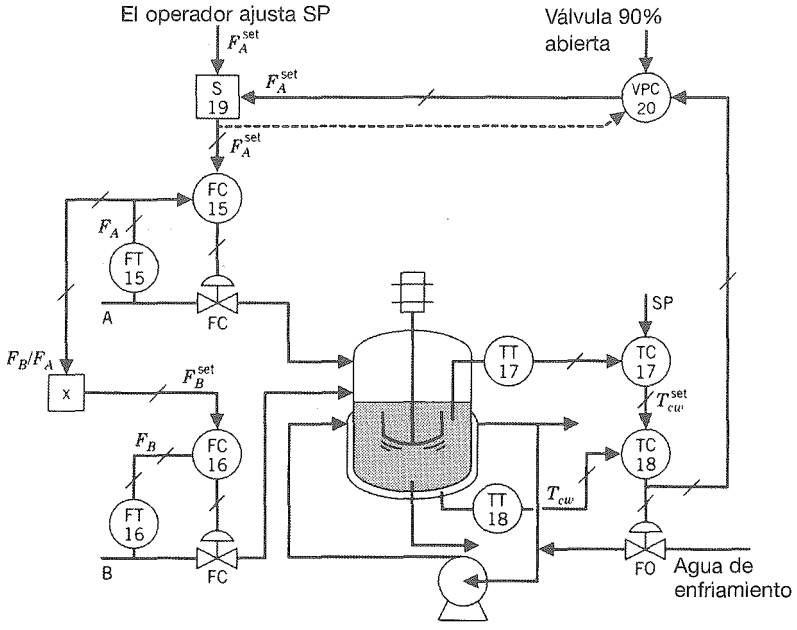


Figura 10-5.10 Esquema de control override para compensar la pérdida de capacidad de enfriamiento.

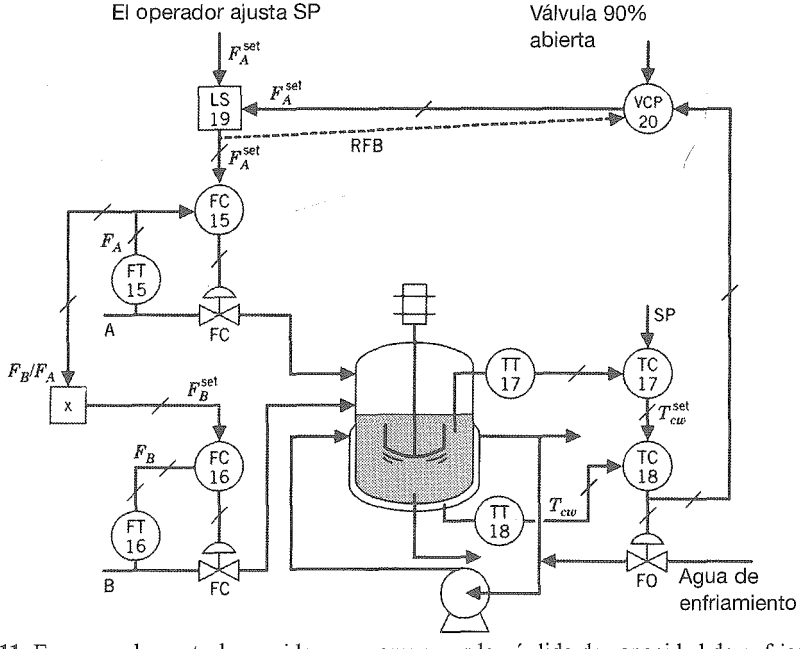


Figura 10-5.11 Esquema de control override para compensar la pérdida de capacidad de enfriamiento.

100%– para aumentar la referencia de FC15. Obviamente, bajo estas condiciones aún queda mucha capacidad de enfriamiento disponible y no hay razón para cambiar el flujo de reactivos establecido por el operador. El selector debe ser tal que seleccione la señal del operador y no la de VPC20. Debido a que la señal de VPC20 es probablemente de 100%, el selector debe ser un selector de bajos; esto se muestra en la figura 10-5.11. *VPC20 usa el selector esencialmente para decirle a la referencia del operador "A un lado, y déjame establecer la referencia".* Nótese la indicación de la integral por retroalimentación del selector a VPC20. Favor de analizar este esquema hasta entender completamente el uso del selector.

Antes de dejar este ejemplo, hay un par de puntos adicionales que es necesario analizar. Primero, como se recordará del estudio sobre el control en cascada en el capítulo 9, FC15 debe ajustarse en el modo de referencia remota. Sin embargo, ¿qué pasaría si el operador ajusta el controlador FC15 en referencia local o manual? Es decir, ¿qué pasaría si VPC20 pidiera una referencia más baja pero FC15 no está en el modo de referencia remota? La respuesta es que no pasaría nada, y la seguridad proporcionada por VPC20 no funcionaría, pues en esencia no estaría activa. ¡Se trata, sin lugar a dudas, de una operación insegura! Entonces, ¿qué se puede hacer? Es decir, ¿cómo se puede diseñar un sistema de control que le permita al operador ajustar el controlador FC15 en el modo de referencia local o manual y que, al mismo tiempo y en cualquier momento, el VPC20 pueda reducir el flujo de reactivos? Se sugiere al lector pensar en esto antes de continuar.

En la figura 10-5.12 se muestra el nuevo esquema de control. En este esquema, la salida de VPC20 llega directamente a la válvula y no a la referencia de FC15. Así, sin importar el modo

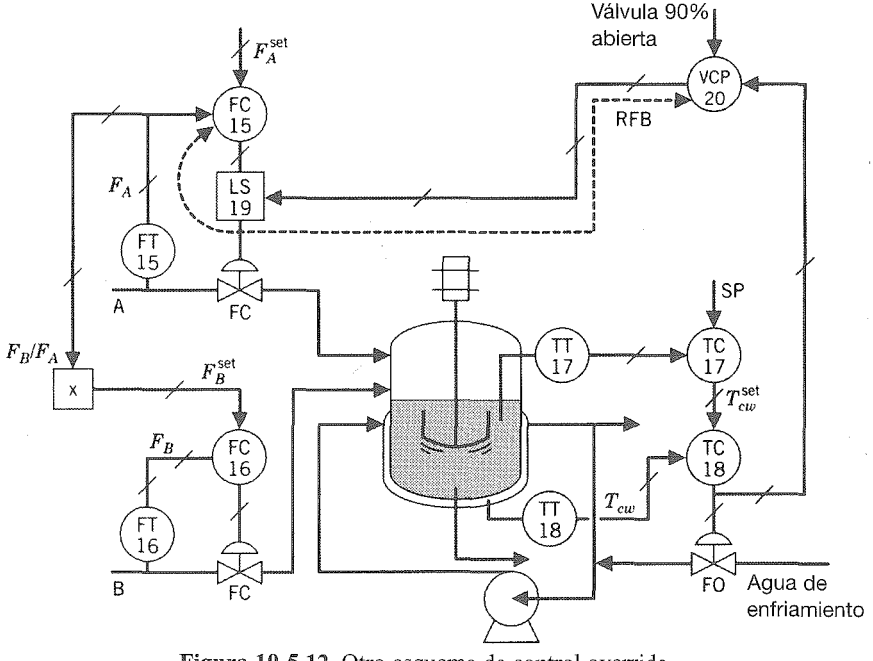


Figura 10-5.12 Otro esquema de control override.

en que se encuentre FC15, la decisión de cerrar la válvula se encuentra después del controlador. En este caso, el selector es también un selector de bajos. El lector se debe convencer a sí mismo de esta selección. *¡Si por razones de seguridad es necesario manipular un flujo, siempre es una buena práctica ir directamente a la válvula y no a la referencia de un controlador que manipula la válvula!* Nótese que la integral por retroalimentación llega como siempre a los controladores que alimentan al selector.

Ahora, es necesario considerar la referencia de VPC20. El controlador recibe la señal de salida de TC18 para decidir si la válvula está abierta un 90% o no. Nótese, sin embargo, que la válvula del agua de enfriamiento es del tipo abierta en falla (FO). Por lo tanto, ¡la válvula está abierta 90% cuando la señal es de 10%! Así, la referencia real en VPC20 debe ser de 10%, como se muestra en la figura 10-5.13. Como ejercicio, quizá el lector quiera pensar en la acción de VPC20.

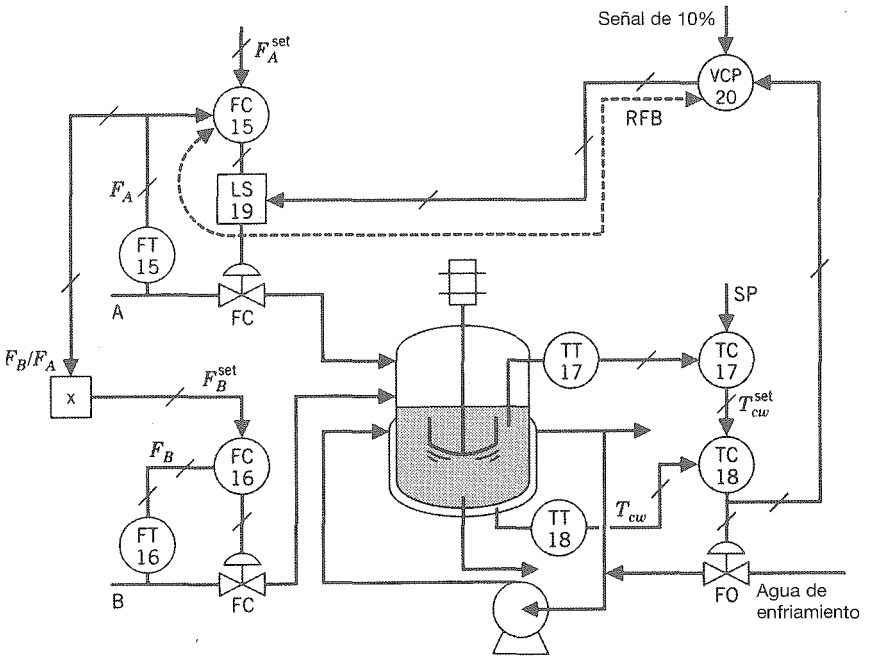


Figura 10-5.13 Esquema de control override.

En la figura 10-5.14 se muestra un programa en software que utiliza el lenguaje presentado en la sección 10-1. Los comentarios en cada línea ayudan a relacionar el programa con la figura 10-5.13. Para las personas con experiencia en programación pudiera ser más fácil diseñar esquemas de control pensando primero en términos de programación.

```
1   FA=AIN(1,FALO,FASPAN) ; lee el flujo de la corriente A, FT15
2   FB=AIN(2,FBLO,FBSPAN) ; lee el flujo de la corriente B, FT16
3   TR=AIN(3,TRLO,TRSPAN) ; lee la temperatura del reactor, TT17
4   TJ=AIN(4,TJLO,TJSPAN) ; lee la temperatura de la camisa, TT18
5   FBSP=FA*RATIO ; calcula la SP de la corriente B, el operador define el valor de RATIO
6   VPB=PID(FB,FBSP,FBLO,FBSPAN) ; FC16
7   AOUT(1, VPB) ; envía la señal a la válvula en la corriente B
8   OUTTJSP=PID(TR,TRSP,TRLO,TRSPAN) ; controlador maestro, TC17
                                       ; el operador define la referencia TRSP
9   TJSP=TJLO+OUTTJSP*TJSPAN/100 ; convierte la salida del controlador TC17 en
                                 ; unidades de ingeniería de la temperatura de
                                   la camisa
10  VPCW=PID(TJ,TJSP,TJLO,TJSPAN ; controlador esclavo, TC18
11  AOUT(2,VPCW) ; envía la señal a la válvula del agua de enfriamiento
12  FAOVVP=PID(VPCW,10,0,100) ; VPC20
13  FAOPVP=PID(FA,FAOPSP,FALO,FASPAN) ; FC15, el operado define la referencia
                                      ; FAOPSP
14  IF FAOPVP < FAOVVP THEN VPFA =FAOPVP ELSE VPFA = FAOVVP ; LS19
15  AOUT(3, VPFA) ; envía la señal a la válvula en la corriente A
```

Figura 10-5.14 Programa de computadora para el esquema de control de la figura 10-5.13.

Ejemplo 10-5.2 Considérese un reactor, figura 10-5.15, en el que se lleva a cabo la reacción en estado líquido irreversible y completa A + B → C. El producto C es la materia prima para varias unidades de proceso corriente abajo del reactor. El reactivo A está disponible de dos fuentes. Debido a un contrato a largo plazo, la fuente 1 es menos costosa que la fuente 2. Sin embargo, el contrato incluye dos limitaciones: una tasa de flujo máxima instantánea de 100 gpm y un consumo mensual máximo de 3.744×10^6 galones. Si cualquiera de estas limitaciones se excede, debe pagarse una alta penalidad, por lo que resulta menos costoso usar el exceso de la fuente 2. Por ejemplo, si se requieren 120 gpm del reactivo A, 100 gpm pueden provenir de la fuente 1 y los 20 gpm restantes de la fuente 2. Del mismo modo, si en el día 27 del mes se han obtenido 3.744×10^6 galones de la fuente 1, en adelante y hasta el final del mes todo el reactivo A debe provenir de la fuente 2. Puede suponerse que las densidades de cada reactivo, A y B, y del producto C, no varían mucho y, en consecuencia, se pueden considerar constantes.

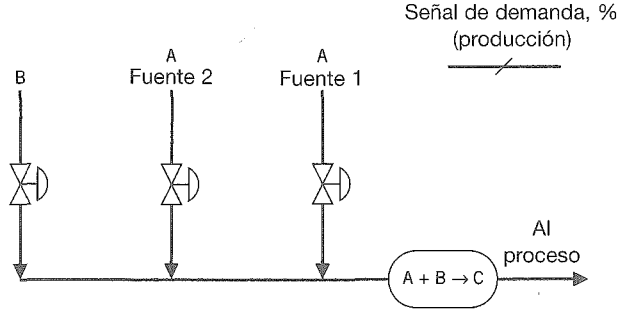


Figura 10-5.15 Reactor del ejemplo 10-5.2.

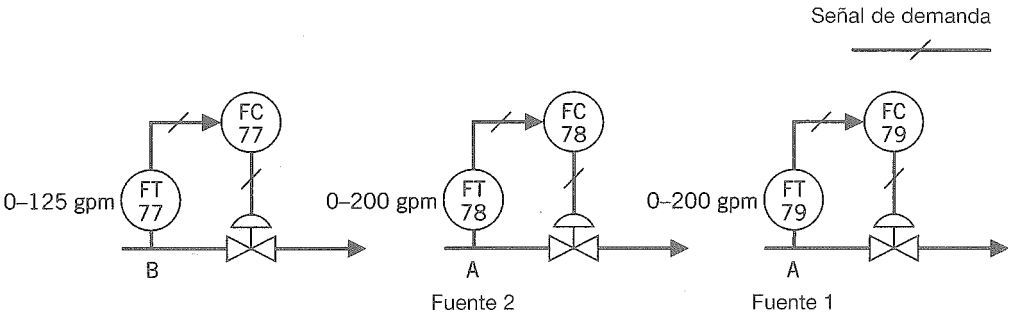


Figura 10-5.16 Lazo de flujo instalado en cada corriente.

a) Diseñar un sistema de control que use preferentemente el reactivo A de la fuente 1 y que no permita exceder las limitaciones contractuales. La relación de alimentación de A a B es 2:1 en unidades gpm.

b) Varias semanas después de que la estrategia de control diseñada en el inciso a) se puso en operación se notó que, por alguna razón desconocida, el proveedor reducía de vez en cuando la presión de suministro de la fuente 2. En consecuencia, el controlador de flujo que manipula el flujo de la fuente 2 tenía que abrir la válvula, la cual en algunos casos quedaba completamente abierta. En ese momento no había suficiente flujo de la fuente 2 para satisfacer la demanda. Se decidió que la acción correcta a tomar en este caso, mientras los abogados investigaban –lo que puede tomar mucho tiempo–, sería obtener de la fuente 1 lo que la fuente 2 no suministraba. Diseñar una estrategia de control para llevar a cabo esta acción. Asegurarse de que el diseño sea tal que siempre que la fuente 2 suministre el flujo requerido, el esquema diseñado en el inciso a) esté en operación.

Solución **a)** Lo primero que se hará es instalar un lazo de flujo en cada una de las tres corrientes; esto se muestra en la figura 10-5.16 junto con el rango de cada transmisor. Este diseño se concreta desarrollando primero el programa de software. Nótese que la señal de demanda es la que manipula los flujos, por lo que se empieza dándole un significado a esta señal. El significado puede ser cualquier cosa que tenga sentido, por ejemplo, el flujo total de A o el flujo de B. Se le llamará el flujo de B; después se convierte esta señal de por ciento a unidades de flujo de B:

```
1   FBSP=(Demand signal)*125 /100 ; convierte la señal de
                                  ; demanda de porcentaje a
                                  ; unidades de flujo de la
                                  ; corriente B
```

Luego se envía esta referencia a FC77:

```
2   FB=AIN(1, 0, 125) ; lee el flujo de B
3   VPB=PID(FB, FBSP, 0, 125) ; controla el flujo de B (FC77)
4   AOUT(1, VPB) ; envía la señal a la válvula
```

Ahora que se conoce el flujo de B, se multiplica por la relación con el flujo total de A para calcular FA:

```
5   FA=Ratio*FB ; el operador decide el RATIO (FY75
                ; en figura 10-5.17)
```

Antes de establecer la referencia para el flujo de A de la fuente 1, es necesario asegurarse de que no exceda 100 gpm, así como de que el flujo total de A de la fuente 1 no exceda 3.744×10^6 galones:

```
6   FA1=AIN(2, 0, 200) ; lee el flujo A de la Fuente 1
7   FA2=AIN(3, 0, 200) ; lee el flujo A de la Fuente 2
8   IF FA<100 THENFA1SP=FA ELSEFA1SP=100 ;FASP1 es
                                          ;la referencia
                                          ;al
                                    ; controlador en A
                                    ; Fuente 1 (LS74)
9   FA1TOT=TOT(FA1) ; TOT ( ) es la función que
                    ; totaliza su argumento
                    ; (TOT71)
10  FA1LEFT=3.744 x 10^6-FA1TOT ; calcula el flujo de
                                ; la Fuente 1
                                ; que queda para completar la cantidad
                                ; mensual (SUM72)
11  IF FA1LEFT<=0 THEN FA1LEFT=0 ; revisa para asegurarse que
                                 ; FA1LEFT < 0
12  IF FA1LEFT<FA1SP THEN FA1SP=FA1LEFT ; (LS74)
13  VPA1=PID(FA1, FA1SP, 0, 200) ; FC79
14  AOUT(2, VPA1) ; envía la señal a la válvula de la Fuente 1
15  FA2SP=FA-FA1SP ; calcula SP de A de la Fuente 2 (SUM73)
16  VPA2=PID(FA2, FA2SP, 0, 200) ; FC78
17  AOUT(3, VPA2) ; envía la señal a la válvula en Fuente 2
```

Las líneas de la 1 a la 17 son el programa de software que logra el objetivo de control. La figura 10-5.17 es el esquema de control equivalente; es conveniente dedicar algún tiempo al análisis de ambas formas de hacerlo.

b) Con base en la decisión, una vez que la válvula que suministra el componente A de la fuente 2 está completamente abierta, el flujo que la fuente 2 no suministra debe provenir de la fuente 1. Dos líneas de código bastan para hacer esto: las nuevas líneas 13 y 14 que se muestran abajo. La línea 13 calcula el flujo no suministrado por la fuente 2 (NOTFA2); por lo general esta cantidad es cero. La línea 14 verifica si la salida del controlador es 98% o mayor (es decir, si la válvula está abierta al menos 98%); si éste es el caso, entonces suma NOTFA2 a la referencia de la fuente 1 (FA1SP); si no lo es, entonces no suma nada a FA1SP.

```
12  IF FA1LEFT<FA1SP THEN FA1SP=FA1LEFT ; (LS74)
13  NOTFA2=FA2SP-FA2 ;  la Fuente 2 no proporciona el flujo
14  IF VPA2>98 THEN FA1SP = FA1SP + NOTFA2 ELSE FA1SP = FA1SP
15  VPA1=PID(FA1, FA1SP, 0, 200) ; FC79
16  AOUT(2, VPA1) ; envía la señal a la válvula en Fuente 1
17  FA2SP=FA-FA1SP ; calcula el SP de A en Fuente 2 (SUM)
18  VPA2=PID(FA2, FA2SP, 0, 200) ; FC78
19  AOUT(3, VPA2) ;  envía la señal a la válvula en Fuente 2
```

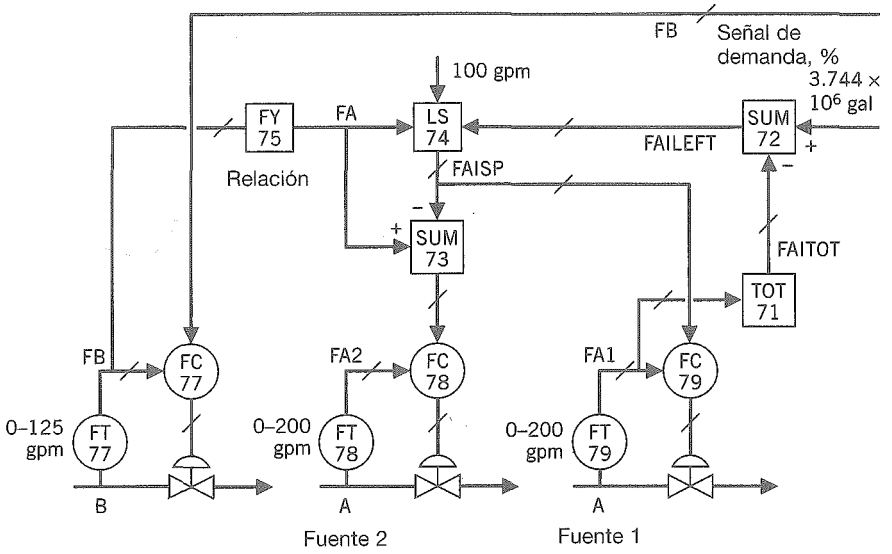


Figura 10-5.17 Esquema de control para el ejemplo 10-5.2.

Ejemplo 10-5.3 Considérese el reactor mostrado en la figura 10-5.18, donde la corriente A reacciona con agua. La corriente A se puede medir pero no manipular. Esta corriente es el producto secundario de otra unidad. El agua entra al reactor en dos estados diferentes: como líquido y como vapor. El vapor se usa para calentar el contenido del reactor. Es necesario mantener cierta relación, R, entre el agua total y la corriente A que entra al reactor. También es necesario controlar la temperatura en el reactor. Es importante mantener la relación entre el flujo total de agua y el flujo de la corriente A por debajo de cierto valor Y: de otro modo, se puede producir un polímero muy denso que obstruiría el reactor.

Una situación que ha ocurrido varias veces durante periodos prolongados es que el flujo de la corriente A se reduce de manera significativa. En este caso, el esquema de control corta por completo el flujo de agua líquida al reactor para mantener la relación. Sin embargo, el flujo de vapor al reactor, usado para mantener la temperatura, continúa proporcionando más agua de la

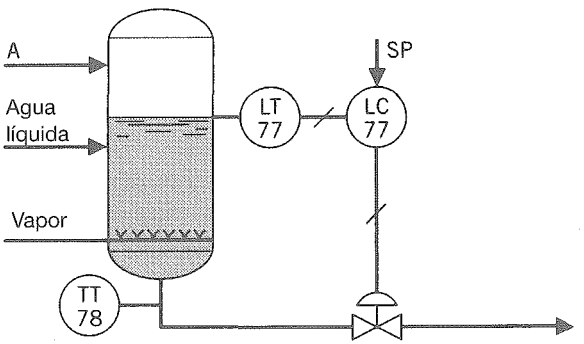


Figura 10-5.18 Reactor para el ejemplo 10-5.3

necesaria, por lo que la relación real entre el agua y la corriente A que entra al reactor se acerca peligrosamente a Y. Diseñar un esquema de control para regular la temperatura en el reactor, y otro esquema para mantener la relación entre el agua total y la corriente A, al tiempo que se evite alcanzar el valor de Y aun cuando esto signifique que la temperatura se desvíe de la referencia.

Solución En la figura 10-5.19 se muestra el control de temperatura y el control de relación requeridos. La temperatura se controla manipulando el flujo de vapor mediante el uso de un esquema de control en cascada. El flujo de la corriente A se mide y se multiplica por R, en MUL 76, para obtener el valor del flujo total de agua requerido, F_{TW}. Después se resta el flujo de vapor del agua total para calcular el flujo de agua líquida requerido, el cual se usa entonces como la referencia del controlador de agua líquida.

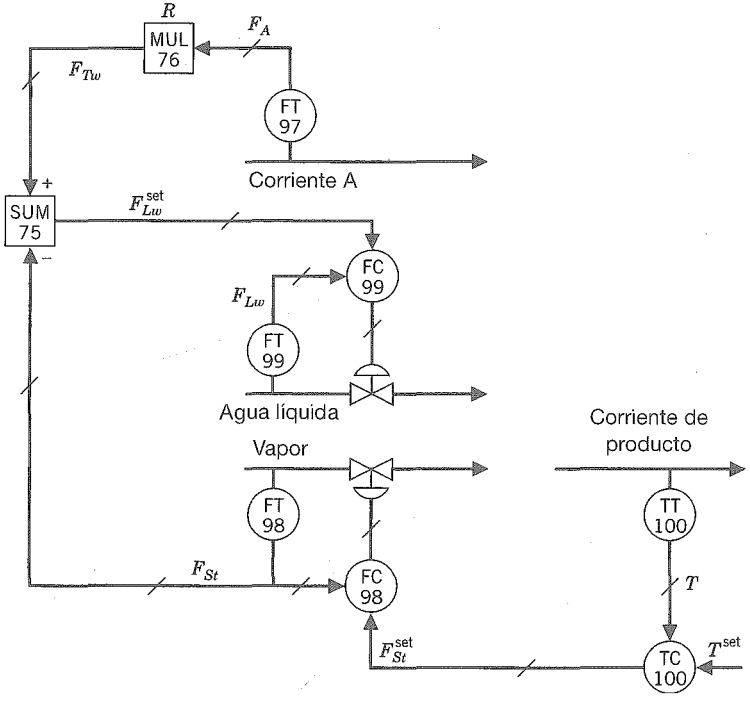


Figura 10-5.19 Control de temperatura y de relación para el reactor del ejemplo 10-5.3.

En la figura 10-5.20 se muestra un esquema de control, agregado al anterior, para evitar que la relación entre el agua total y la corriente A exceda el valor de Y. En este esquema los flujos medidos de agua líquida y vapor se suman, en SUM 74, para obtener el flujo real de agua que entra al reactor (este flujo total de agua debe ser igual a la salida de MUL 76 en condiciones normales). La relación entre el agua total y la corriente A se calcula usando DIV 73. Esta

relación se envía entonces a un controlador, RC 95, cuya referencia está ajustada en el valor de Y, o algo menor por razones de seguridad. Las salidas de RC 95 y TC 100 se comparan en LS 101 y el valor más bajo se selecciona como la referencia de FC 98. En condiciones normales se seleccionará TC 100. Sólo cuando la relación entre el agua total y la corriente A esté por encima de la referencia de RC 95, el controlador de relación reducirá lo suficiente su salida, en un esfuerzo por disminuir la corriente, y será seleccionado. Nótense las señales de la integral por retroalimentación hacia RC 95 y TC 100.

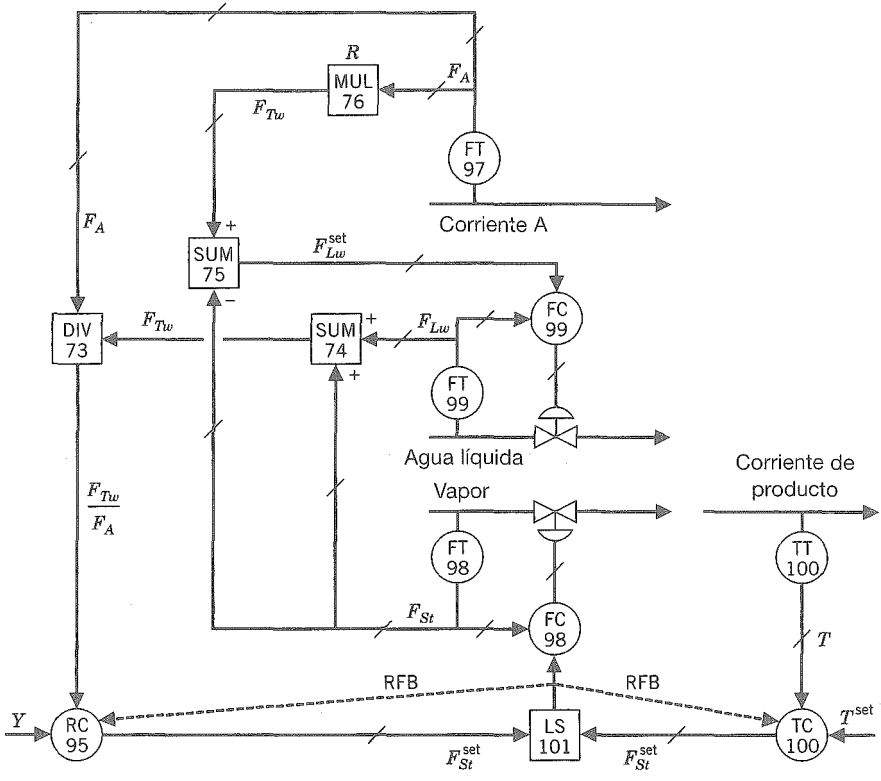


Figura 10-5.20 Esquema de control completo para el reactor del ejemplo 10-5.3.

Obsérvese que la relación entre el agua total y la corriente A estará en Y, o en un valor próximo, sólo luego de que el flujo de agua líquida se haya reducido a cero, es decir, cuando la única agua que entra es vapor. Haciendo uso de este hecho, en la figura 10-5.21 se muestra un esquema de control más sencillo. En este caso, F_A se multiplica por Y para obtener el flujo máximo de agua que se puede alimentar, $F_{TW\,\text{máx}}$. Este esquema es más simple porque en él no es necesario sintonizar un controlador. Quizá el lector quiera escribir el programa de software para implementar el esquema mostrado en la figura 10-5.21.

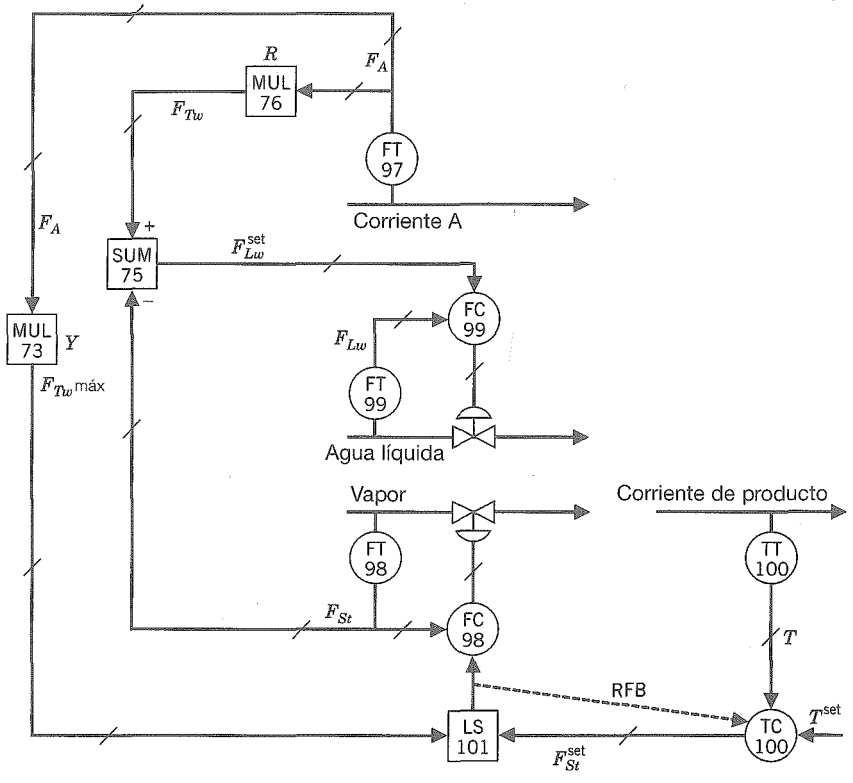


Figura 10-5.21 Otro esquema de control completo para el reactor del ejemplo 10-5.3.

10-6 RESUMEN

En este capítulo se ha presentado una introducción a las herramientas de cálculo provistas por los fabricantes. También se presentó un breve análisis del significado y la importancia de las señales utilizadas en el campo.

Asimismo, en el capítulo se presentaron los conceptos y aplicaciones del control de relación, el control override y el control selectivo. Estas técnicas ofrecen un método realista y simple para mejorar la seguridad en el proceso, la calidad del producto y las operaciones de proceso. Por último, el capítulo concluyó con tres ejemplos que dan algunas claves para el diseño de esquemas de control.

REFERENCIAS

1. Smith, C. A., y A. B. Corripio, *Control automático de procesos. Teoría y práctica,* Editorial Limusa, México.

2. O'Meara, J. E., "Oxygen Trim for Combustion Control", en *Instrumentation Technology.*
3. Scheib, T. J., y T. D. Russell, "Instrumentation Cuts Boiler Fuel Costs", en *Instrumentation and Control Systems.*
4. Congdon, P., "Control Alternatives for Industrial Boilers", en *InTech.*
5. Becker, J. V., "Designing Safe Interlock Systems", en *Chemical Engineering Magazine.*

PROBLEMAS

10-1. Considérese el sistema que se muestra en la figura P10-1, el cual se usa para diluir una solución de NaOH al 50% en masa a una solución al 30% en masa. Un controlador, que no se muestra en el diagrama, manipula la válvula de NaOH. Debido a que el flujo de la solución de NaOH al 50% puede variar con frecuencia, se desea diseñar un esquema de control de relación para manipular el flujo de agua con el fin de mantener la dilución requerida. El flujo nominal de la solución de NaOH al 50% es de 200 lbm/h. El elemento de flujo usado para las dos corrientes es tal que la señal de salida de los transmisores está relacionada linealmente con el flujo másico. El transmisor en la corriente de NaOH al 50% tiene un rango de 0 a 400 lbm/h y el transmisor en la corriente de agua tiene un rango de 0 a 200 lbm/h. Especificar los bloques de cálculo requeridos para implementar el esquema de control de relación y escribir el programa DCS completo que lo implementaría.

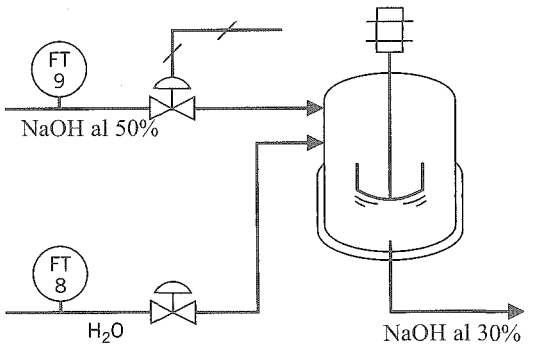


Figura P10-1 Proceso de mezclado para el problema 10-1.

10-2. Un computador convencional de flujo másico calcula el flujo másico de gas con la ecuación para un orificio

$$w(t) = K_0 \sqrt{Mp(t)h(t)/RT(t)}$$

donde $w(t)$ es el flujo másico, K_0 es el coeficiente del orificio, M es el peso molecular del gas, $p(t)$ es la presión absoluta, R es la constante de los gases ideales, $T(t)$ es la temperatura absoluta del gas y $h(t)$ es la presión diferencial a través del orificio. Para esta aplicación

$$K_0 = 200(\text{lb/h})/(\text{pulg } H_2O\text{-lb/ft}^3)^{0.5}$$
$$M = 40 \text{ lb/lbmol}; \qquad R = 10.73 \text{ psia-ft}^3/\text{lbmol-°R}$$

con rangos de los transmisores de

$$p(t) = 0 \text{ a } 50 \text{ psig}; \qquad T(t) = 100° \text{ a } 200°\text{F}$$
$$h(t) = 0 \text{ a } 100 \text{ pulg } H_2O; \qquad w(t) = 0 \text{ a } 1500 \text{ lb/h}$$

Desarrollar el programa DCS completo para implementar el cálculo de flujo másico.

10-3. El intercambiador de calor mostrado en la figura 1-1.2 calienta un fluido de proceso por condensación de vapor. Un esquema de control requiere controlar el calor transferido al fluido. Esta transferencia de calor se calcula usando la siguiente ecuación

$$Q = F\rho C_p (T - T_1)$$

Se conoce la siguiente información:

Variable	Rango	Estado estacionario
F	0-50 gpm	30 gpm
T	50-120°F	80°F
T_1	25-60°F	50°F
Q	0-?	?

La densidad ($\rho = 5.62$ lb/gal) y la capacidad térmica ($C_p = 0.60$ Btu/lb-°F) se suponen constantes. Usando los bloques mostrados en la figura 10-1.1, trazar la estrategia de control para regular la transferencia de calor al fluido de proceso. Escribir después el programa DCS completo para implementar este control.

10-4. En la figura P10-2 se muestra el reflujo al tope de una columna de destilación. El reflujo interno, L_I, controla la separación en la columna. Este reflujo interno no puede manipularse directamente; sin embargo, el reflujo externo L_E sí se puede manipular. El "computador de reflujo interno" calcula la referencia, L_E^{set}, del controlador de reflujo externo para mantener el reflujo interno en cierto valor deseado, L_I^{set}. El reflujo interno es mayor que el externo debido a la condensación de vapores en el plato superior, el cual se requiere para llevar el reflujo subenfriado a la temperatura T_L hasta su punto de burbuja, T_V. Un balance de energía en el plato superior produce la siguiente ecuación

$$(L_I - L_E)\lambda = L_E C_{PL}(T_V - T_L)$$

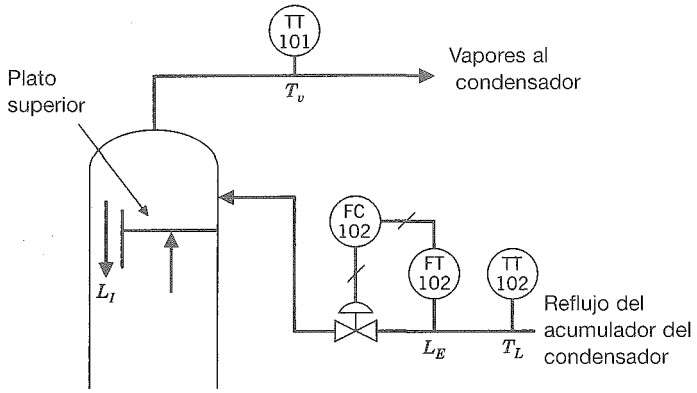


Figura P10-2 Columna de destilación para el problema 10-4.

Para este proceso, la capacidad térmica del fluido del líquido y el calor latente pueden suponerse constantes con valor de C_{PL} = 0.76 Btu/lb-°F y λ = 285 Btu/lb. Otras especificaciones de diseño son:

Transmisor	Rango	Valor normal
FT102 (L_E)	0-5000 lb/h	3000 lb/h
TT102 (T_L)	100-300°F	195°F
TT101 (T_V)	150-250°F	205°F

Desarrollar el programa DCS completo para implementar este control.

10-5. Considérese el reactor de la figura P10-3. Este reactor es similar a un horno en que la energía requerida para la reacción proviene de la combustión de un combustible con aire (para simplificar el diagrama, el control de temperatura no se muestra completo). Metano y vapor reaccionan para producir hidrógeno por medio de la reacción

$$CH_4 + 2H_2O \longrightarrow CO_2 + 4H_2$$

La reacción ocurre en tubos dentro del horno. Los tubos se llenan con un catalizador necesario para la reacción. Es importante que la mezcla reactiva sea siempre rica en vapor para evitar la coquización del catalizador. Es decir, si se deposita suficiente carbón sobre el catalizador, este último se contamina. Esta situación se puede evitar asegurándose de que la mezcla de entrada sea siempre rica en vapor. Sin embargo, demasiado vapor también puede resultar costoso ya que se requiere más energía (combustible y aire). El departamento de ingeniería ha estimado que es necesario mantener la relación óptima R_1 (entre el metano y el vapor). Diseñar un esquema de control que garantice que la relación requerida se mantenga, y que durante los cambios en la tasa de producción, sean de aumento o disminución, la mezcla reactiva sea rica en vapor. Favor de advertir que hay una señal que establece el flujo de metano requerido

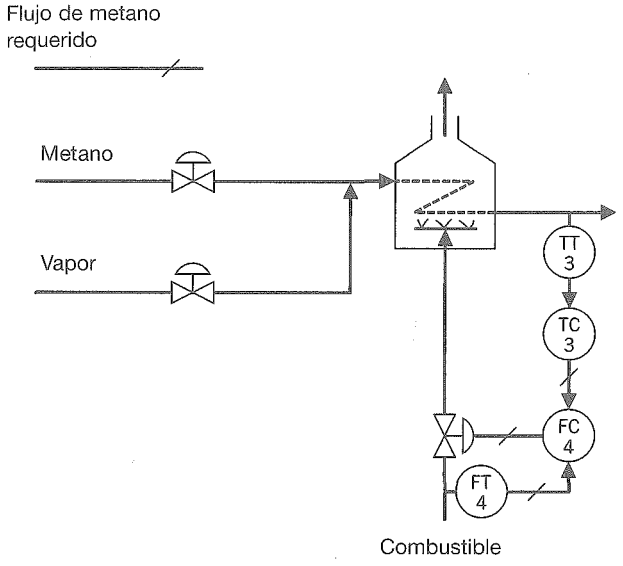


Figura P10-3 Reactor para el problema 10-5.

10-6. Se usa cloración para desinfectar el efluente final de una planta de tratamiento de aguas residuales. La EPA requiere que se mantenga cierto residual de cloro en el efluente. Para cumplir con este requerimiento, el cloro libre residual se mide al principio de la laguna de contacto con el cloro, como se muestra en la figura P10-4. Se agrega una solución acuosa de hipoclorito de sodio al efluente final para mantener el cloro residual libre en la laguna. La cantidad requerida de hipoclorito de sodio es directamente proporcional a la tasa de flujo del efluente. La planta de tratamiento de aguas residuales tiene dos corrientes paralelas de filtrado del efluente, las cuales se combinan en la laguna de contacto con el cloro. El hipoclorito de sodio se agrega a cada corriente con base en la cantidad de cloro residual libre en la cámara.

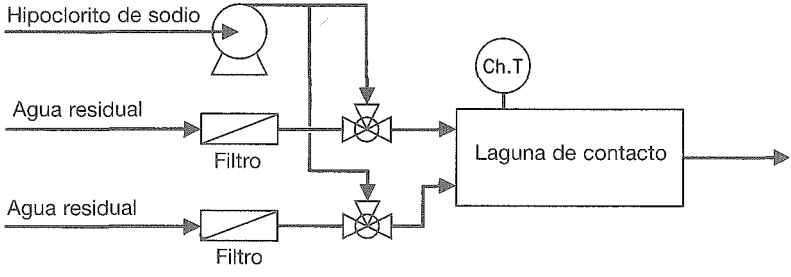


Figura P10-4 Proceso de cloración para el problema 10-6.

a) Diseñar un esquema de control para manipular el cloro residual al principio de la laguna.
b) Debido a varias reacciones que ocurren en la laguna de contacto, el cloro residual en la laguna no es el mismo que el cloro residual que entra a la misma (el que se mide). Resulta que la EPA está interesada en el cloro residual a la salida de la laguna. Por lo tanto, se agrega un segundo analizador en el efluente de la laguna de contacto. Diseñar un esquema de control para regular el cloro residual del efluente.

10-7. Considérese el tanque de la figura P10-5. En este tanque se mezclan tres componentes en una proporción dada para formar una reserva que se suministra a otro proceso. Para una formulación particular, la mezcla final contiene 50% en masa de A, 30% en masa de B y 20% en masa de C. Otro proceso suministra la señal a la bomba dependiendo de su demanda.

a) Diseñar un sistema de control para regular el nivel en el tanque y para mantener al mismo tiempo la formulación correcta.
b) Supóngase ahora que, debido a problemas de operación, en una o más de las unidades que suministran a A, B o C la presión de abastecimiento en una o más de estas líneas disminuye. Obviamente, el controlador que manipula la válvula correspondiente empezará a abrirla. Una vez que una válvula está 100% abierta deja de haber control. De hecho, una vez que una válvula está abierta cerca de 90% ya no hay gran acción de control. Entonces, ¿qué haría el lector para evitar que alguna de las válvulas se abra más de 90%? *Recuerde:* todavía debe mantener el control de nivel. ¿Cómo automatizaría la estrategia de control propuesta?

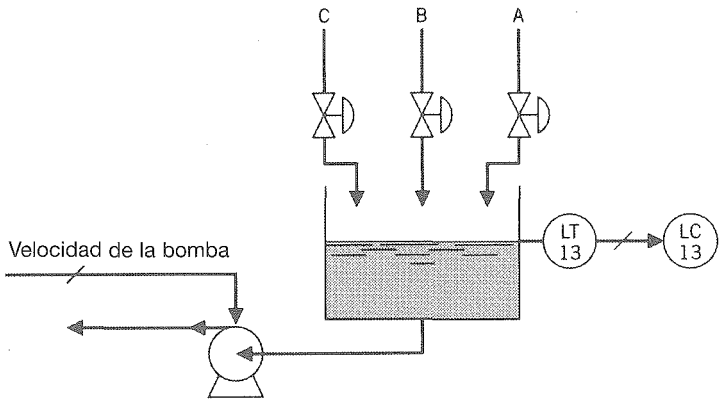


Figura P10-5 Proceso para el problema 10-7.

10-8. Las celdas de combustible se utilizan en naves espaciales y en bases extraterrestres proyectadas para la generación de electricidad y calor. La celda produce energía eléctrica por la reacción entre hidrógeno líquido y oxígeno líquido

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$$

Diseñar un controlador de relación que mantenga los flujos de hidrógeno y oxígeno líquidos hacia la celda en la proporción estequiométrica exacta (tanto el hidrógeno como el oxígeno son valiosos en el espacio, por lo que no se puede suministrar ninguno de ellos en exceso). Calcular los flujos de diseño del hidrógeno y el oxígeno requeridos para producir 0.5 kg/h de agua y la relación de diseño entre los flujos del oxígeno y el hidrógeno. Trazar un esquema del control de relación que manipule el flujo de oxígeno para mantener la relación estequiométrica exacta entre ambos flujos. Se puede suponer que las señales de los transmisores de flujo son lineales con las tasas de flujo másico. Calcular rangos razonables para los transmisores de flujo y la relación en términos de las señales de los transmisores.

10-9. Considérese el proceso de la figura P10-6. Se introduce lodo en el tanque de almacenamiento, T-3, desde donde es bombeado a dos filtros. El nivel en el tanque se controla manipulando el flujo de salida. Este flujo debe repartirse entre los dos filtros en la siguiente relación conocida:

$$R = \frac{\text{Flujo al filtro 1}}{\text{Flujo total}}$$

Los dos transmisores de flujo y las válvulas de control que se muestran en la figura no se pueden mover de sus lugares actuales y no se pueden agregar otros transmisores ni válvulas. Diseñar un sistema de control que regule el nivel del tanque T-3 al tiempo que mantenga la separación deseada del flujo entre los dos filtros.

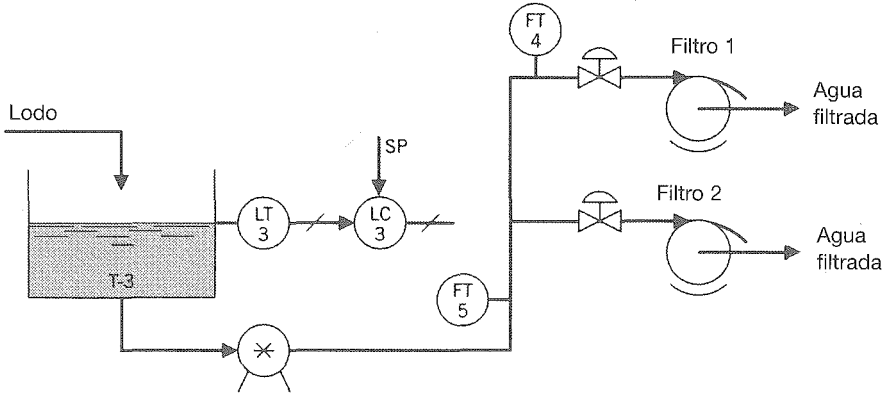


Figura P10-6 Proceso para el problema 10-9.

10-10. Considérese el horno que se muestra en la figura P10-7. Este horno se utiliza para la vaporización parcial de agua. Agua líquida entra al horno y sale una mezcla saturada de líquido y vapor. Después esta mezcla pasa a un tanque donde se le proporciona tiempo de residencia para separar el vapor saturado del líquido saturado. Los ingenieros de procesos comentan la "eficiencia" de este proceso. Definen la eficiencia como la fracción de líquido que se vaporiza; la eficiencia deseada es de 80%. Diseñar un esquema de control que mantenga la eficiencia en este valor deseado.

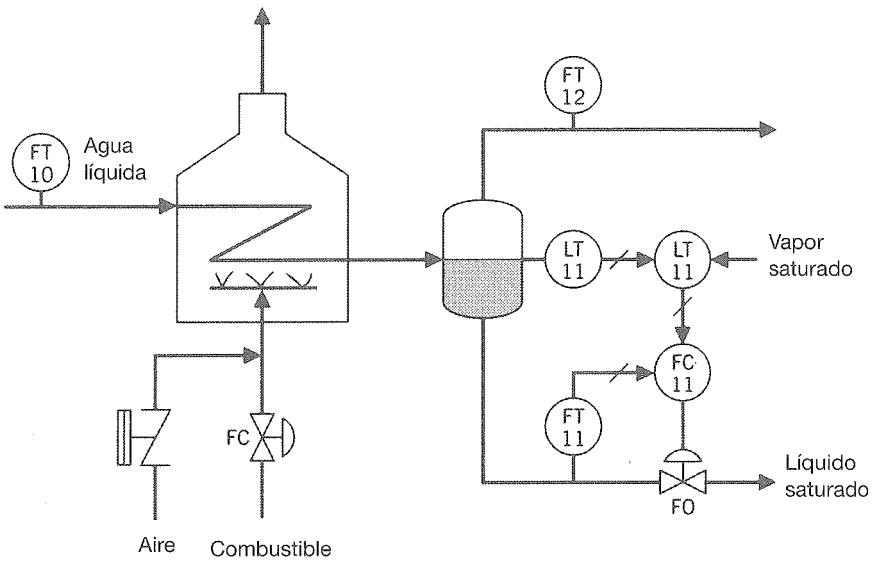


Figura P10-7 Proceso para el problema 10-10.

10-11. Considérese el fondo de la columna de destilación que se muestra en la figura P10-8. Hay dos corrientes que salen de la columna. Una de las corrientes es manipulada por el usuario 1 para satisfacer sus propias necesidades. La otra corriente es manipulada para mantener el nivel de líquido en el fondo de la columna. Bajo ciertas condiciones anómalas, el nivel baja lo suficiente para que el controlador de nivel cierre la válvula; cuando esto ocurre se pierde el control del nivel. Si en algún momento el nivel llegara por abajo de 1.5 ft, sería muy difícil tener suficiente flujo en el rehervidor para proveer burbujeo a la columna; esta condición sería catastrófica para la operación de la columna. El transmisor de nivel está calibrado de 1 a 5 pies. ¿Qué propondría el lector para evitar esta condición? Diseñar el esquema de control para implementar su propuesta.

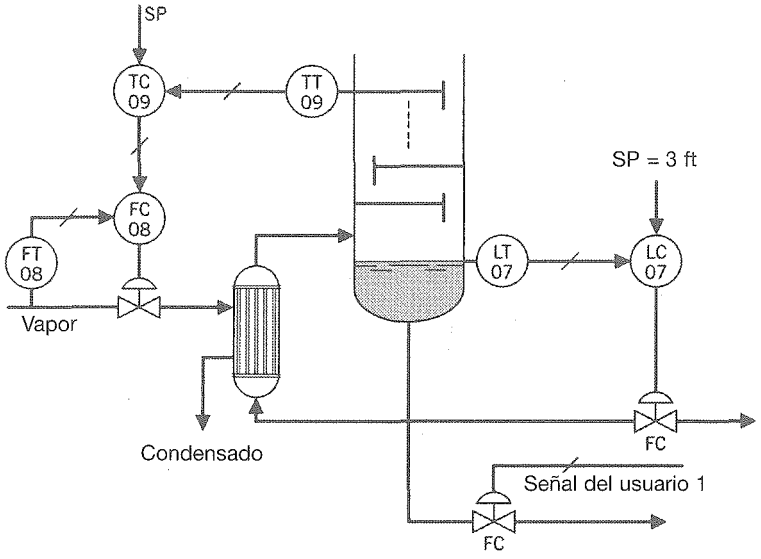


Figura P10-8 Proceso para el problema10-11.

10-12. Considérese el proceso de la figura P10-9. La alimentación del reactor es un gas y la reacción produce un polímero. El flujo de salida del reactor se manipula para controlar la presión en el reactor. A la salida del reactor se tiene polímero con gas atrapado en él. Este flujo de salida pasa a un separador que proporciona suficiente tiempo de residencia para separar el gas del polímero. El polímero producido se manipula para controlar el nivel en el separador; los gases salen del separador libremente. Estos gases contienen los reactivos sin reaccionar y una cantidad de componentes parafinosos que se producen. Los gases se comprimen antes de regresarlos al reactor. Una parte de los gases se enfría y se mezcla con el efluente del reactor para controlar la temperatura en el separador, como se muestra en la figura. Si la temperatura en el separador es muy alta, los componentes parafinosos saldrán con los gases. Esta cera dañará el compresor y por eso es que hay ciclones en la línea de reciclado. Si la temperatura en el separador es muy baja, el polímero no fluirá fuera del separador. Por lo tanto, la temperatura en el separador debe controlarse.

Cuando la temperatura en el separador aumenta, el controlador de temperatura abre la válvula de reciclado para incrementar el flujo de gas frío. Bajo ciertas perturbaciones significativas, como cuando se está produciendo un polímero nuevo, la válvula de reciclado puede abrirse completamente en un esfuerzo por controlar la temperatura. En ese momento, el operador abre manualmente la válvula de agua fría hacia los enfriadores de gas. Esta acción reduce la temperatura del gas y proporciona más capacidad de enfriamiento al separador, de modo que la válvula de reciclado se puede cerrar. Diseñar un esquema de control que haga esta operación automáticamente, es decir, que evite que la válvula de reciclado se abra más de 90%.

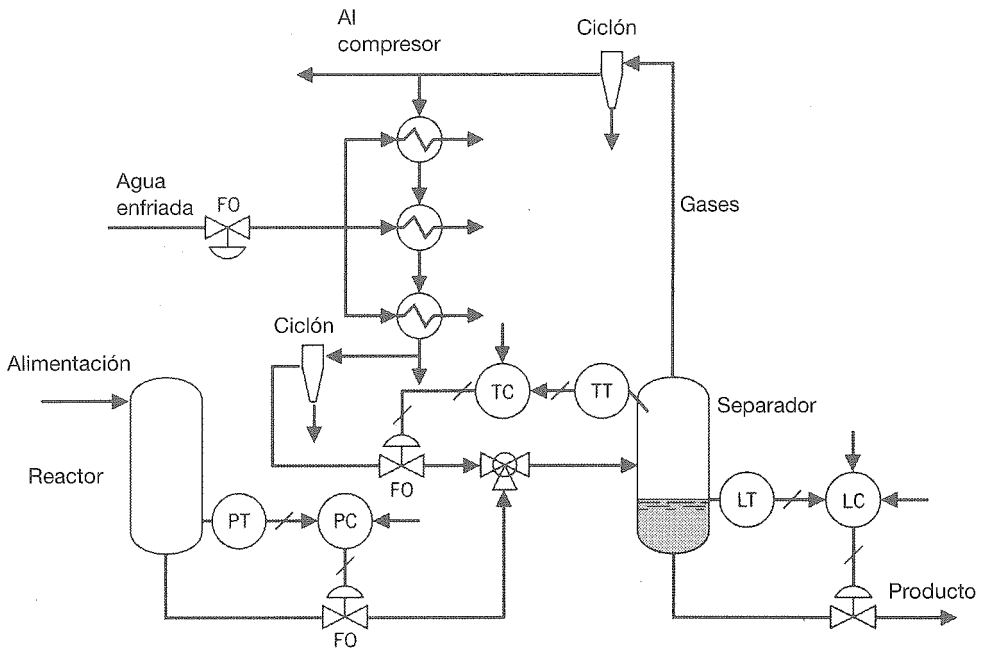


Figura P10-9 Proceso para el problema 10-12.

10-13. En la figura P10-10 se muestra un sistema para filtrar un aceite antes de procesarlo. El aceite entra a un cabezal donde la presión se controla, para una operación segura, manipulando la válvula de entrada. Del cabezal, el aceite se distribuye a cuatro filtros. Los filtros consisten en una carcasa con tubos internos similares a los de los intercambiadores de calor. La pared de tubos es el medio de filtración a través del cual el aceite debe fluir para ser filtrado. El aceite entra a la carcasa y fluye a través del medio contenido en los tubos. A medida que pasa el tiempo, se empieza a formar una costra en el filtro y, en consecuencia, la presión del aceite necesaria para el flujo aumenta. Si la presión aumenta demasiado, las paredes se pueden colapsar. Por tanto, en algún momento el filtro debe ponerse fuera de servicio y limpiarse. En condiciones normales, tres filtros pueden manejar el flujo total de aceite.

a) Diseñar un sistema de control para mantener el flujo total de aceite a través del sistema. No debe usarse el lazo de presión para este propósito, está ahí para mantener el suministro de una presión segura a los filtros.
b) Diseñar un sistema tal que cuando la presión del aceite del lado de la carcasa de cada filtro aumente por encima de algún valor predeterminado, el flujo de aceite a ese filtro comience a disminuir. Una vez que la válvula de alimentación del filtro esté abierta 10%, un sistema de bloqueo apagará el filtro para su limpieza (en la figura no se muestra este sistema). El flujo total de aceite a través del sistema deberá seguirse manteniendo en el valor deseado.

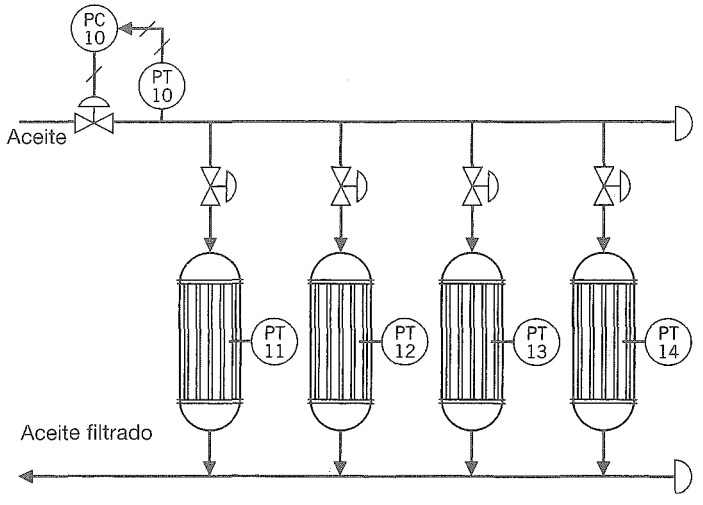


Figura P10-10 Filtros para el problema 10-13.

10-14. Considérese el proceso de la figura P10-11. Este proceso se usa para fabricar el producto E a partir de la reacción entre A y B. La salida del reactor es el producto E y algunos componentes sin reaccionar, principalmente A, a los que se llamará el líquido C. E y C se separan, y el líquido C se recicla en el tanque T-104 para alimentarlo de nuevo al reactor, como se muestra en la figura. La cantidad de B que se alimenta al reactor depende de las cantidades de A y C alimentadas al reactor. Es decir, debe haber cierta cantidad de B para reaccionar con la de A alimentada, dada por la relación R_1 = B/A, y cierta cantidad de B para reaccionar con la de C alimentada, dada por la relación R_2 = B/C. Se puede suponer que todos los medidores de flujo proporcionan una señal relacionada con el flujo másico. Diseñar un esquema de control para regular el flujo total, T en lb/min, dentro del reactor.

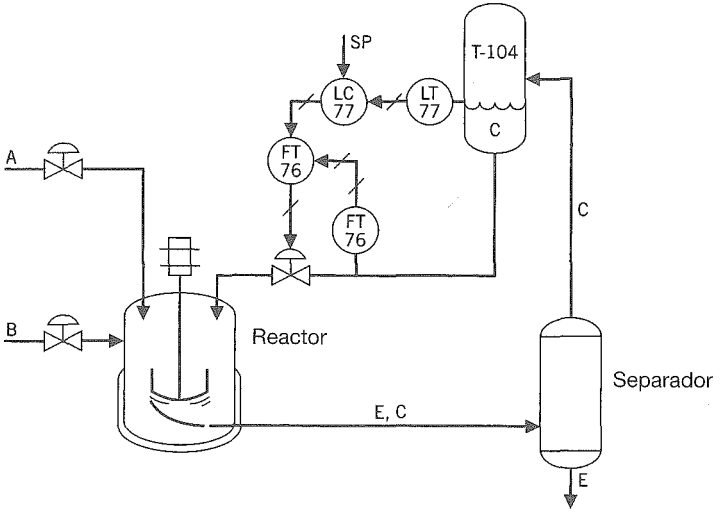


Figura P10-11 Proceso para el problema 10-14.

10-15. Considérese el proceso de la figura P10-12. En este proceso, un producto líquido se separa de un gas y después el gas se comprime. El tambor D-103 provee el tiempo de residencia necesario para la separación. La presión en el tambor se controla en 5 psig, como se muestra en la figura. Otro controlador de presión abre la válvula hacia el quemador si la presión en el tambor llega a 8 psig. Hay siempre una pequeña cantidad de gas de reciclado hacia el tambor. La turbina que mueve el compresor es bastante antigua y, por razones de seguridad, su velocidad no debe exceder 5600 rpm ni bajar de 3100 rpm. Diseñar un esquema de control con estas limitaciones.

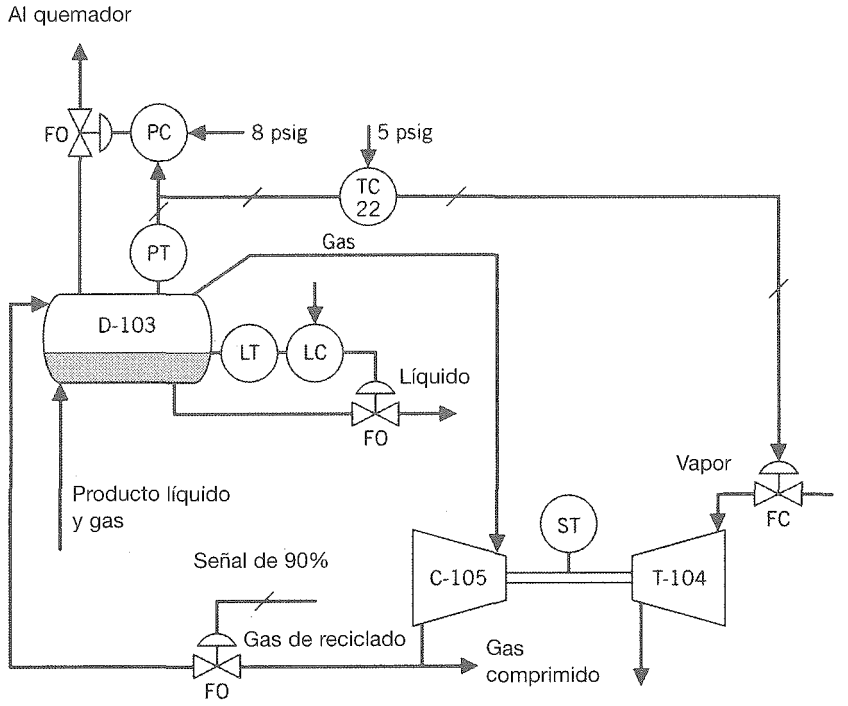


Figura P10-12 Proceso para el problema 10-15.

10-16. En la figura P10-13 se muestra un proceso que es frecuente encontrar en plantas químicas. R-101 es un reactor en el que se genera un gas a alta presión. Es necesario transferir el gas a un tanque de baja presión, V-102, a aproximadamente 50 psig. Como una medida para ahorrar energía, se hace bajar la presión del gas haciéndolo pasar a través de una turbina de recuperación de energía, T-102. El trabajo producido en T-102 se usa para mover un compresor, C-102. Sin embargo, el trabajo producido en T-102 por lo general no es suficiente para hacer funcionar C-102, por lo que una

turbina de vapor, T-103, está conectada en serie con T-102 para proporcionar el trabajo necesario. En dicha figura se muestran los sistemas para controlar la presión en R-101 y la presión del gas que sale del compresor. ST-16 es un transmisor de velocidad conectado al eje de la turbina; SC-16 es un controlador que regula la velocidad de rotación del eje. Saliendo de R-101 hay una línea que rodea T-102 y va directo a V-102. Esta línea se usa en caso de que T-102 esté fuera de operación o en caso de que suceda una emergencia y sea necesario liberar rápidamente la presión en R-101. La referencia de PC-14 es de 500 psig, mientras que la de PC-15 es de 510 psig. Cuando el gas producido en R-101 aumenta de manera significativa, incrementando la presión, ocurre un problema. En este caso, PC-14 abre más la válvula de T-102 para reducir la presión. Cuando esto ocurre, la válvula de vapor de T-103 se cierra para controlar la presión del gas comprimido. Se ha determinado que si la válvula de vapor está abierta menos de 10%, pueden ocurrir daños severos a T-103. Diseñar un esquema de control para evitar esta condición al tiempo que se siga controlando la presión del gas comprimido.

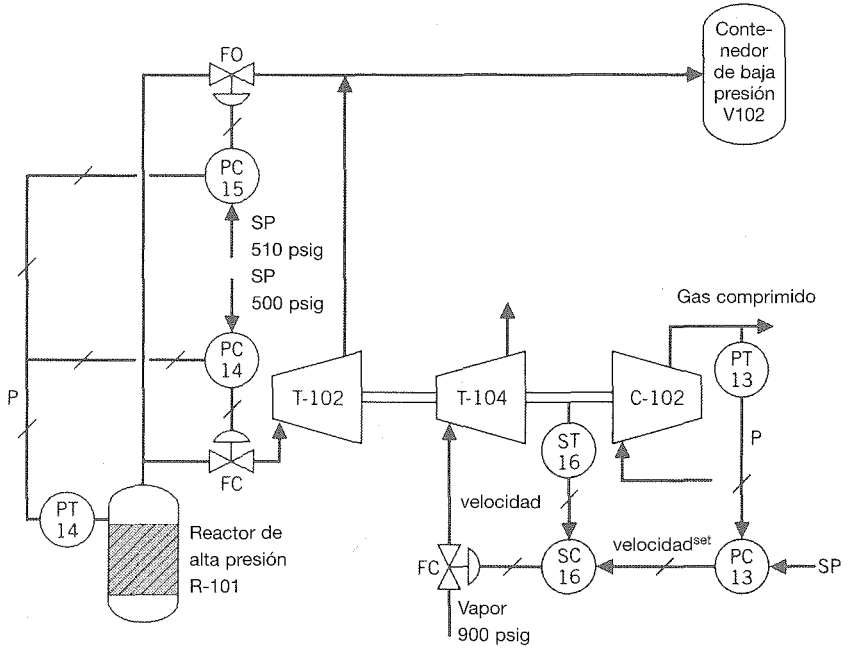


Figura P10-13 Proceso para el problema 10-16.

10-17. En el ejemplo 10-3.2 se presentó y examinó el esquema de control restrictivo que se muestra en la figura 10-3.5. En el análisis del esquema se mencionó que: "si en algún momento el personal de operación pusiera el controlador de flujo FC11 en referencia

local o en modo manual (referencia remota desactivada), la seguridad proporcionada por TC13 y PC14 no estaría presente. Esto podría resultar en una condición de operación insegura e inaceptable". Modificar el esquema de control mostrado de tal modo que aun cuando FC11 no esté en el modo de referencia remota, los controladores TC13 y PC14 sigan proporcionando el control override de seguridad necesario.

10-18. Considérese la columna de destilación de la figura P10-14. En el diagrama se muestran los controles asociados con el tope de la columna. Específicamente, se muestra el control de presión, el control de flujo del reflujo, el control de nivel del acumulador y el control de flujo del agua de enfriamiento.

Considérese el control de presión de la columna con mayor detalle. El controlador de presión manipula la válvula en la salida del condensador a fin de poder mantener la presión de la columna en su referencia. Si la presión en la columna aumenta, el controlador abre la válvula para descargar líquido del condensador, exponiendo un área mayor de transferencia de calor para condensar más vapores y bajar la presión. Así, en esencia, el controlador de presión hace variar el área expuesta de transferencia de calor para controlar la presión en la columna. Para la mayoría de la mezclas, la separación es más fácil a presiones bajas. Sin embargo, hay límites sobre qué tan bajas pueden ser las presiones, como se explica en los incisos siguientes.

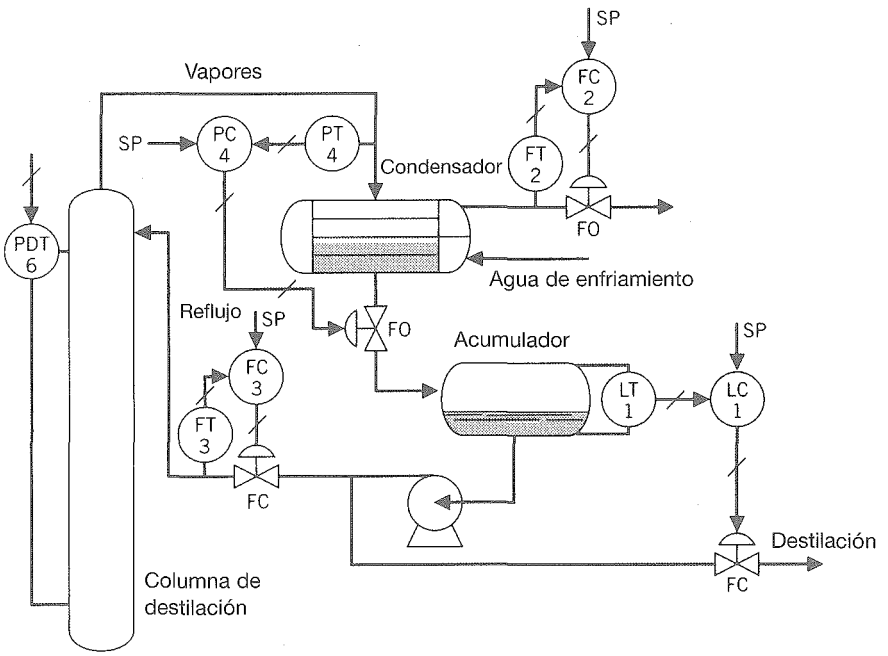


Figura P10-14 Proceso para el problema 10-18.

a) *Inundación de la columna:* para un flujo molar dado, la caída de presión a través de la columna aumenta conforme la presión disminuye. PDT-6 (el transmisor de presión diferencial) indica la caída de presión. Una caída de presión alta indica la inundación de la columna.

b) *Capacidad del condensador:* a presiones menores, la temperatura de condensación es menor y, por lo tanto, la diferencia de temperatura entre los gases que se condensan y el agua de enfriamiento en el condensador es menor. Debido a que esta fuerza impulsora de condensación (la diferencia de temperatura) es menor, la capacidad del condensador también es menor. Para recuperar la capacidad de condensación, la válvula en la salida del condensador debe abrirse para exponer el área de transferencia. Una vez que la válvula está completamente abierta deja de haber control de presión.

c) *Capacidad de la válvula del líquido destilado:* a presiones menores, la caída de presión a través de la válvula del líquido destilado disminuye. Entonces el controlador de nivel en el acumulador debe abrir la válvula a fin de controlar el nivel en el acumulador en su referencia. Una vez que la válvula está completamente abierta deja de haber control de nivel.

Diseñar un sistema de control para operar la columna a la presión más baja posible al tiempo que se eviten las tres condiciones limitantes explicadas.

10-19. Considérese el horno que se muestra en la figura P10-15, el cual consiste en dos secciones con una chimenea común. En cada sección tiene lugar la reacción de craqueo catalítico de hidrocarburos con vapor. Mediante la manipulación del flujo de combustible a una sección en particular se controla la temperatura de los productos en cada

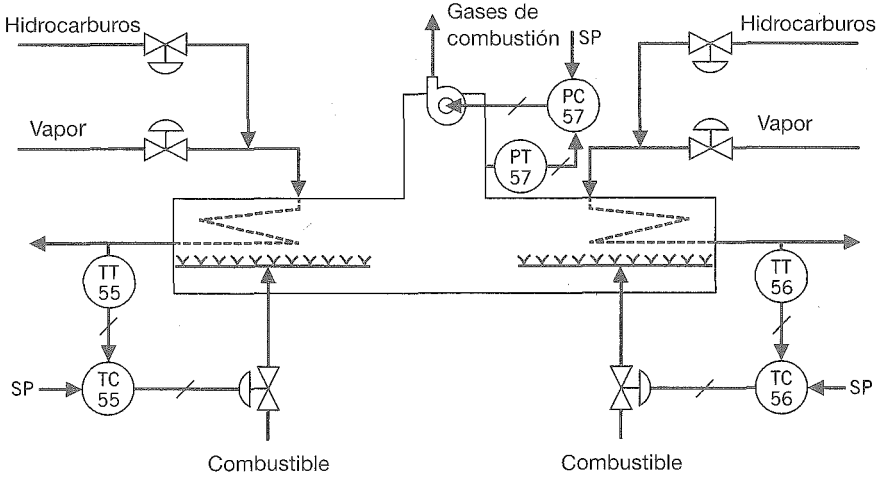


Figura P10-15 Horno para el problema 10-19.

sección. La presión en la chimenea se controla manipulando la velocidad de un ventilador instalado en ella. Este ventilador induce el flujo de los gases de combustión fuera de la chimenea. A medida que la presión en la chimenea aumenta, el controlador de presión acelera el ventilador para reducir la presión.

a) Diseñar un esquema de control de relación entre el flujo de vapor y el flujo de hidrocarburos en cada sección. El personal de operación establece el flujo de hidrocarburos.
b) En las últimas semanas, el personal de producción ha notado que la salida del controlador de presión ha estado alcanzando de manera consistente 100%. Esto indica que el controlador está haciendo lo máximo posible para mantener el control de la presión. Sin embargo, ésta no es una condición deseable, ya que significa que la presión en realidad está fuera de control, lo cual es una condición insegura. Es necesario diseñar una estrategia de control de tal modo que cuando la velocidad del ventilador sea mayor de 90%, el flujo de hidrocarburos comience a disminuir para mantener la velocidad del ventilador en 90%. Cuando el flujo de hidrocarburos disminuya, se necesitará un flujo menor de combustible a fin de mantener la temperatura de salida. Esto a su vez hará bajar la presión en la chimenea y el controlador de presión reducirá la velocidad del ventilador. Siempre y cuando la velocidad del ventilador sea menor de 90%, el flujo de hidrocarburos puede ser cualquier valor que el personal de operación requiera. Se sabe que la sección izquierda del horno es menos eficiente que la derecha. Por lo tanto, la estrategia correcta es reducir primero el flujo de hidrocarburos hacia la sección izquierda, hasta 35% del flujo establecido por el personal de operación. Si se requiere una reducción mayor, entonces se empezará a reducir el flujo de hidrocarburos a la sección derecha, también hasta 35% del flujo seleccionado por el personal de operación. (Si se necesita una reducción todavía mayor, un sistema de bloqueo apaga el horno.) Diseñar la estrategia de control para mantener la salida del controlador de presión por debajo de 90%.

10-20. Considérese el horno de la figura P10-16, en el que dos combustibles diferentes, un gas residual y combustóleo, se manipulan para controlar la temperatura de salida de un fluido de proceso. El gas residual no tiene costo para la operación, por lo que debe usarse a máxima capacidad. Sin embargo, regulaciones ambientales imponen que el flujo máximo de gas residual sea un cuarto del flujo de combustóleo. El valor calorífico del gas residual es HV_{wg}, y el del combustóleo es HV_{oil}. La relación entre el aire y el gas residual es R_{wg}, y entre el aire y el combustóleo es R_{oil}.

a) Diseñar un esquema de control de lazos cruzados para controlar la temperatura del producto del horno.
b) Supóngase ahora que el poder calorífico del gas residual varía de manera significativa cuando su composición cambia. Es difícil medir en línea el poder calorífico de este gas. Sin embargo, análisis de laboratorio muestran que definitivamente existe una correlación entre la densidad del gas y su poder calorífico. Se cuenta con

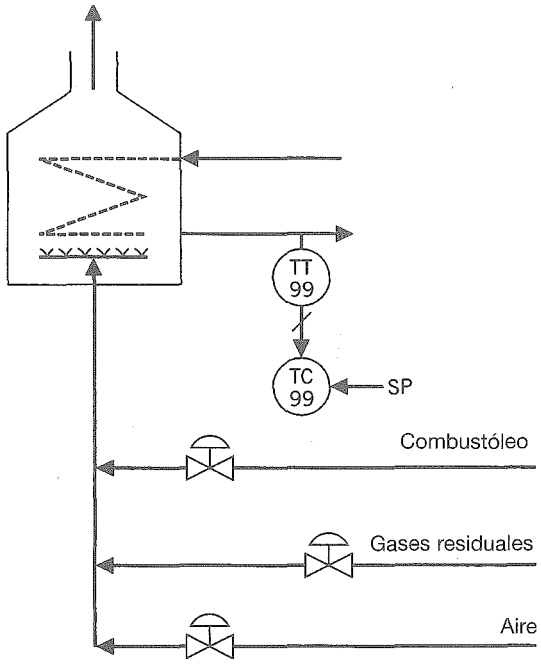


Figura P10-16 Horno para el problema 10-20.

un densímetro para medir la densidad del gas residual, por lo que se conoce su poder calorífico. Ajustar el diseño del esquema de control del inciso a) para tomar en consideración las variaciones en HV_{wg}.

c) Por razones de seguridad, es necesario diseñar un esquema de control tal que, en caso de pérdida de llama en el quemador, los flujos de gas residual y combustóleo cesen; la válvula de aire debe estar abierta completamente. Se cuenta con un sensor de llama para este trabajo cuya salida es de 20 mA siempre que la llama esté presente y cuya salida desciende a 4 mA tan pronto como la llama se apaga. Incorporar este esquema de control dentro del anterior.

10-21. Considérese el proceso de turbina/compresor de la figura P10-17. La fuerza que mueve la turbina T-30 es un gas a alta presión y el compresor C-30 comprime un gas refrigerante. El operador establece la posición de la válvula del gas de alta presión, lo cual a su vez resulta en cierta velocidad del compresor. Se usa una unidad de retraso para evitar cambios bruscos en la posición de la válvula de alta presión. Bajo condiciones normales de operación, la válvula debe responder al valor establecido por el operador. Sin embargo, existen algunas condiciones especiales contra las cuales el sistema de control se tiene que proteger.

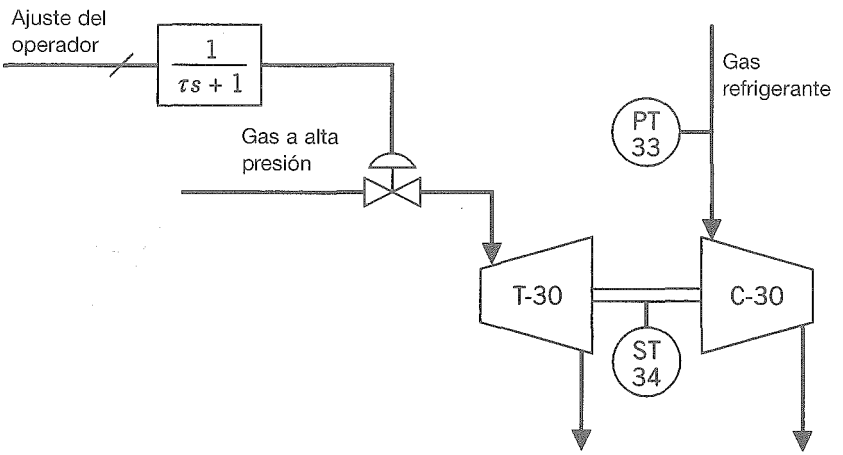


Figura P10-17 Proceso de turbina/compresor para el problema 10-21.

- Bajo condiciones normales, la presión del gas refrigerante es de aproximadamente 15 psig. Sin embargo, durante el arranque o en otras circunstancias, la presión en la línea tiende a caer por debajo de 8 psig, lo que constituye una condición peligrosa para el compresor. En este caso, la velocidad del compresor debe reducirse para succionar menos gas, incrementando así la presión en la línea. La presión segura más baja en la línea de refrigerante es 8 psig.
- Debido a dificultades mecánicas, la velocidad del compresor no debe exceder 95% de su velocidad máxima. Asimismo, no debe caer por debajo de 50% de la máxima velocidad.

Diseñar un esquema de control que evite infringir las restricciones anteriores.

10-22. Considérese el compresor que se muestra en la figura P10-18. Este compresor de dos etapas tiene dos puntos de succión diferentes. En cada línea de succión hay un medidor de flujo volumétrico calibrado a 0°C y 1 atm, un transmisor de presión y un transmisor de temperatura. Una consideración importante en el control del compresor es evitar la condición de sobrecarga. En la figura P10-18 también se muestra una curva que indica el flujo mínimo de entrada requerido, en acfm (ft^3/min reales) y para una presión de entrada dada, a fin de evitar una sobrecarga. Cada etapa puede caer en sobrecarga de manera independiente. Bajo condiciones normales de operación, el operador establece la posición de cada válvula de succión. Sin embargo, por razones de seguridad, el operador no debe cerrar las válvulas por debajo del límite de sobrecarga. Diseñar un esquema de control para evitar el cierre de las válvulas por debajo del límite de sobrecarga. Asimismo, por razones de seguridad, se permite abrir las válvulas muy rápido, pero su cierre debe hacerse muy despacio. Incorporar esta restricción en el diseño anterior.

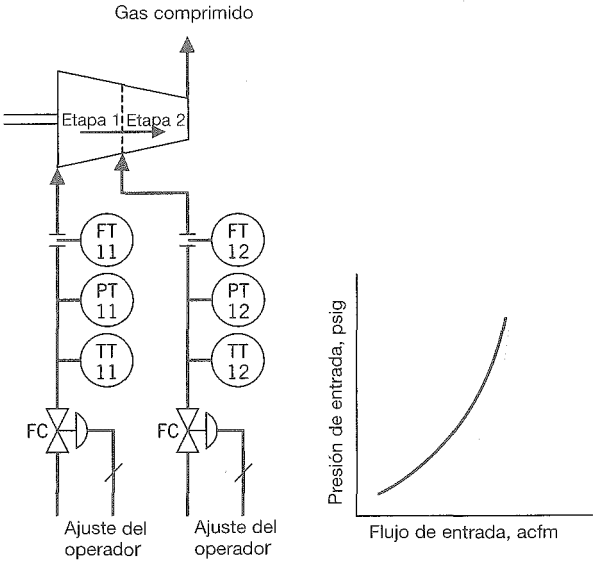


Figura P10-18 Compresor para el problema 10-22.

10-23. Es común el uso de agua a alta presión para hacer subir el petróleo crudo de los pozos petroleros. En la figura P10-19 se muestra el proceso para preparar el agua e inyectarla en los pozos. El agua debe filtrarse, para reducir los sólidos suspendidos, y desoxigenarse antes de entrar en los pozos. En la figura se muestran tres filtros, F-43, F-44 y F-45, en los cuales se eliminan los sólidos suspendidos. Bastan dos filtros para filtrar el agua. Cuando un filtro se tapa, debido a los sólidos separados del agua, la caída de presión requerida para el flujo a través del mismo aumenta. Una vez que la caída de presión alcanza un valor crítico, el filtro debe ponerse fuera de servicio y limpiarse. La limpieza, la cual consiste en un lavado a flujo inverso con un solvente, es una operación relativamente rápida. El agua fluye de los filtros a una torre de absorción, T-46, donde se separa el oxígeno disuelto. La torre de absorción consiste en una sección superior en la cual el agua fluye a contraflujo del gas natural, el cual es el agente separador. La configuración interna de esta sección superior es similar a la de una columna de destilación de platos. De la sección superior, el agua fluye a la sección del fondo, el cual es semejante a un tanque de compensación. Es necesario controlar el nivel del tanque. El O_2 disuelto en el agua a la salida del tanque también debe ser controlado. De la torre de absorción, el agua se inyecta en tres pozos petroleros.

a) Diseñar un esquema de control para regular el nivel del agua en la sección del fondo del tanque.
b) Diseñar un esquema de control override que reduzca el flujo de agua a través de cualquiera de los filtros a fin de evitar que la caída de presión alcance el valor

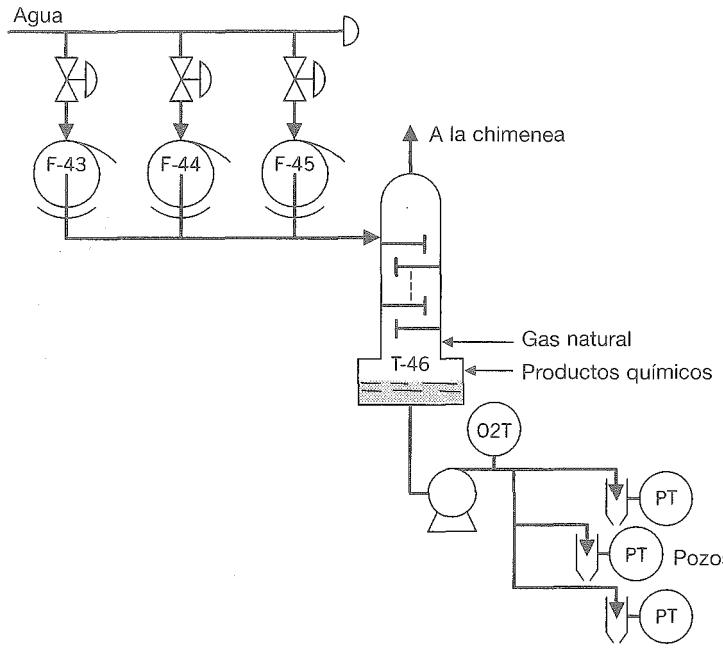


Figura P10-19 Proceso para el problema 10-23.

crítico. Una vez que la válvula de agua en el filtro alcance la abertura mínima prescrita, la lógica secuencial toma el control para detener la operación y empezar el ciclo de limpieza. No se requiere que el lector ilustre esto.

c) Diseñar un esquema de control para regular el O_2 disuelto en el agua que sale de la torre de absorción. La mayor parte de la acción del control puede conseguirse manipulando el flujo de gas natural; sin embargo, en ocasiones el flujo de gas por sí mismo no es suficiente para alcanzar la referencia. En esos casos, se usan productos químicos para reducir el O_2 al valor deseado. El gas natural es más barato que los productos químicos. Se sabe que la perturbación más importante de este control es el flujo de agua que llega a la torre de absorción.

d) Diseñar un esquema de control para regular el flujo de agua en cada pozo. Una consideración importante es la presión del agua en cada pozo. Cuando el pozo no es reciente, u ocurren perturbaciones internas, la presión en el mismo aumenta. Si la presión alcanza cierto valor, puede fracturar el pozo. Por tanto, es necesario tomar en consideración la presión en cada pozo en este esquema de control.

10-24. Considérese el compresor de tres etapas que se muestra en la figura P10-20. En la figura se presentan los esquemas de control asociados con el compresor. PC-25 controla la presión de descarga de la etapa 2 (referencia = 65 barg) y PC-26 controla la

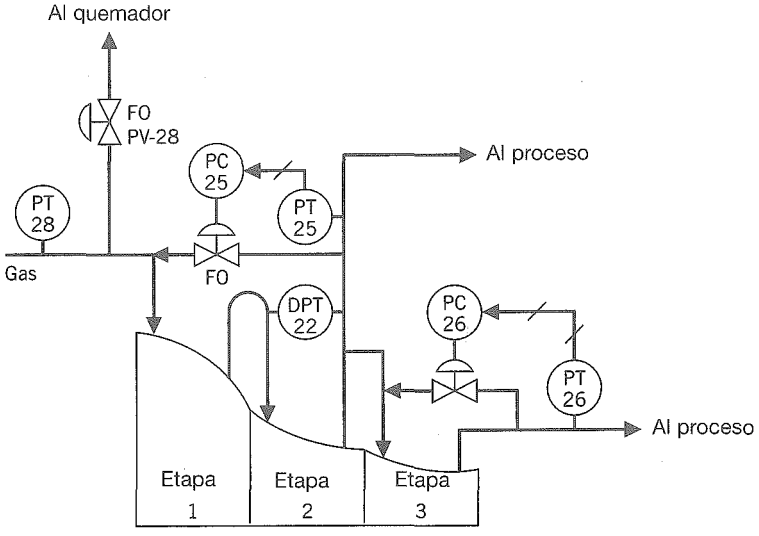


Figura P10-20 Proceso para el problema 10-24.

presión de descarga de la etapa 3 (referencia = 110 barg). PV-28 se abre para descargar el gas al quemador si la presión de succión excede 21 barg.

Hay varios sistemas de bloqueo que ponen fuera de línea el compresor por diferentes causas. Estas causas son: a) baja presión de succión en la etapa 1 (< 14 barg), b) gran aumento de la presión a través de la etapa 2 (> 40 bares), y c) gran aumento de la presión a través de la etapa 3 (> 65 bares). El compresor se pone fuera de línea con frecuencia y cada vez que ello ocurre toma aproximadamente 3 horas antes de volver a la operación normal. Esta cantidad de tiempo representa una pérdida operacional significativa. Obviamente, enviar gas al quemador es otra pérdida.

Diseñar el sistema de control override que minimice estas pérdidas. Especificar las referencias necesarias.

Información de estado estacionario:

P de succión Etapa 1 = 18 barg	P de descarga Etapa 1 = 42 barg
P de descarga Etapa 2 = 65 barg	P de descarga Etapa 3 = 110 barg
Aumento de P a través de la Etapa 2 = 23 bares	Aumento de P a través de la Etapa 3 = 45 bares

Capítulo 11

Control feedforward

En este capítulo se presentan los principios y aplicaciones del control feedforward, con mucha frecuencia una estrategia de control provechosa. (Aunque a esta estrategia de control también se le podría llamar "control por prealimentación", en este libro se emplea la expresión "control feedforward"). El control feedforward no es una estrategia nueva; los primeros reportes datan de los años 1960 (Dobson, 1960; Shinskey, 1963). Sin embargo, el uso de la computadora ha simplificado y expandido enormemente su implementación, lo que ha resultado en un incremento en la aplicación de la técnica. El control feedforward requiere un conocimiento profundo de las características de estado estacionario y dinámico del proceso. Por tanto, es esencial, para su aplicación, un sólido conocimiento de la ingeniería de procesos.

11-1 EL CONCEPTO DE FEEDFORWARD

Como ayuda para entender el concepto de control feedforward, se retoma brevemente el control por retroalimentación; en la figura 11-1.1 se ilustra el concepto de retroalimentación. Cuando diferentes perturbaciones, $d_1(t)$, $d_2(t)$,..., $d_n(t)$, entran al proceso, la variable controlada, $c(t)$, se desvía de su referencia y la retroalimentación compensa la desviación manipulando otra entrada del proceso, la variable manipulada, $m(t)$. La ventaja del control por retroalimentación es su sencillez. Su desventaja es que para poder compensar una perturbación, la variable controlada primero debe desviarse de su referencia. La retroalimentación actúa sobre un error entre la referencia y la variable controlada. Se puede considerar como una estrategia de control *reactiva*: espera hasta que el proceso ha sufrido una perturbación antes de empezar a tomar una acción correctiva.

Por su propia naturaleza, el control por retroalimentación resulta en una desviación temporal de la variable controlada. Muchos procesos pueden permitir cierta desviación. En muchos

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

otros procesos, sin embargo, esta desviación debe minimizarse a tal punto que el control por retroalimentación quizá no proporcione el desempeño requerido. Para estos casos, el control feedforward (FFC, por sus siglas en inglés) puede resultar provechoso.

La idea del control feedforward es compensar las perturbaciones *antes* de que afecten a la variable controlada. Específicamente, el control feedforward implica medir las perturbaciones antes de que entren al proceso y, con base en estas mediciones, calcular la variable manipulada que se requiere para mantener la variable controlada en su referencia. Si el cálculo y la acción se hacen correctamente, la variable controlada debe mantenerse sin perturbaciones. Así, se puede pensar que el control feedforward es una estrategia de control *proactiva*; la figura 11-1.2 muestra este concepto.

Para ampliar la explicación, considérese una perturbación, $d(t)$, como la que se muestra en la figura 11-1.3, que entra al proceso. Tan pronto como el controlador feedforward (FFC) detecta que ha ocurrido un cambio, calcula un nuevo valor de $m_{FF}(t)$ y lo envía al proceso (válvula). Esto se hace de tal modo que la trayectoria G_M anula el efecto de la trayectoria G_D. G_M es la función de transferencia que describe la manera en que la variable manipulada, $m_{FF}(t)$, afecta a la variable controlada, y G_D es la función de transferencia que describe la manera en que la perturbación, $d(t)$, afecta a la variable controlada.

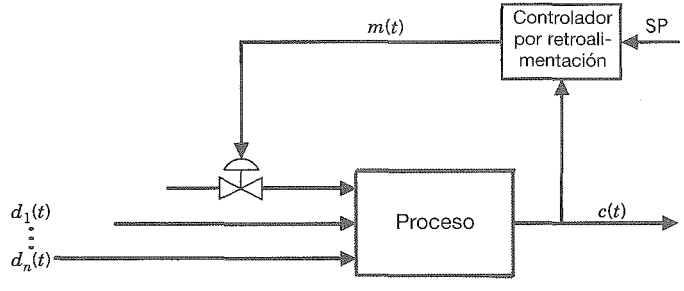


Figura 11-1.1 Control por retroalimentación.

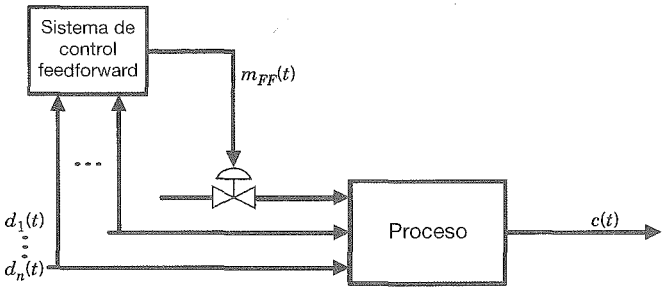


Figura 11-1.2 Control feedforward.

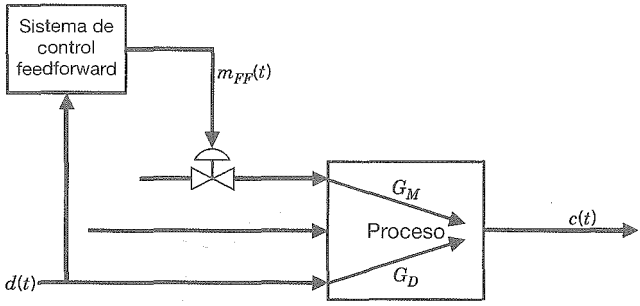


Figura 11-1.3 Control feedforward.

Para lograr una anulación perfecta, el controlador feedforward debe diseñarse considerando las características de estado estacionario del proceso. Es decir, supóngase que un cambio de más una unidad en $d(t)$ afecta a $c(t)$ por más diez unidades y que un cambio de más una unidad en $m_{FF}(t)$ afecta a $c(t)$ en más cinco unidades. Por tanto, si $d(t)$ cambia en más una unidad, afectando a $c(t)$ en más diez unidades, el controlador feedforward debe cambiar $m_{FF}(t)$ en menos dos unidades, afectando a $c(t)$ en menos diez unidades y anulando en consecuencia el efecto de $d(t)$.

En el párrafo precedente se explica la manera en que la estrategia de control feedforward hace la compensación considerando las características de estado estacionario del proceso. Sin embargo, para evitar cualquier cambio en la variable controlada, también deben considerarse las características dinámicas del proceso. Se desea que los efectos de $m_{FF}(t)$ y $d(t)$ afecten a $c(t)$ al mismo tiempo. Es decir, se considera que cuando $d(t)$ cambia, el controlador feedforward cambia $m_{FF}(t)$ casi al mismo tiempo. Si como resultado de la dinámica del proceso el efecto de $m_{FF}(t)$ sobre $c(t)$ es más rápido que el efecto de $d(t)$ sobre $c(t)$, entonces $c(t)$ se desviará de su valor deseado debido a $m_{FF}(t)$, ¡no debido a $d(t)$! En este caso, una compensación perfecta requiere "desacelerar" el controlador feedforward. Es decir, el controlador feedforward no deberá tomar una acción correctiva inmediata, sino que deberá esperar cierto tiempo antes de tomarla para que los efectos anuladores lleguen a $c(t)$ al mismo tiempo que la perturbación. En otros procesos, el efecto de $d(t)$ sobre $c(t)$ puede ser más rápido que el efecto de $m_{FF}(t)$ sobre $c(t)$. En estos casos, la compensación perfecta requiere "acelerar" el controlador feedforward. Por tanto, *el controlador feedforward debe diseñarse para proporcionar la compensación requerida tanto de estado estacionario como dinámica.*

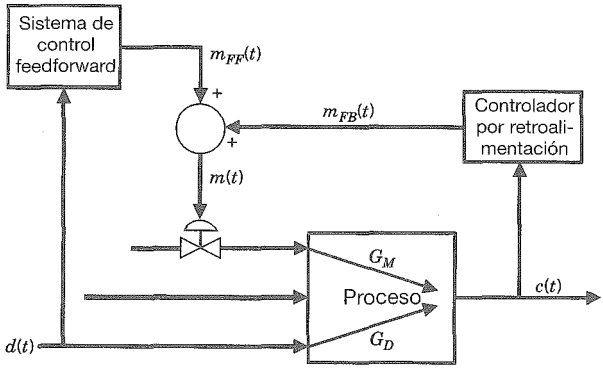


Figura 11-1.4 Control por retroalimentación/feedforward.

En la figura 11-1.2 se muestra la compensación feedforward de todas las perturbaciones que entran al proceso. Sin embargo, en muchas ocasiones resulta muy difícil, si no imposible, medir algunas perturbaciones. Además, algunas de las perturbaciones medibles pueden ser tan esporádicas que la necesidad de compensación feedforward es cuestionable. Por consiguiente, el control feedforward se usa para compensar las perturbaciones más importantes que pueden medirse. Le corresponde al personal de operación definir las perturbaciones "más importantes" (las que ocurren con frecuencia y/o causan desviaciones significativas en la variable controlada). Después se usa el control por retroalimentación para compensar las perturbaciones que no se compensan por feedforward. En la figura 11-1.4 se muestra una posible implementación de este control feedforward/por retroalimentación.

En los párrafos anteriores se ha explicado el objetivo y algunas consideraciones de diseño del control feedforward. Lo que es necesario tener presente es que el controlador feedforward debe contener, la mayoría de las veces, compensaciones de estado estacionario y dinámicas, y que la compensación por retroalimentación siempre debe estar presente.

11-2 DISEÑO DE CONTROLADORES FEEDFORWARD LINEALES USANDO DIAGRAMAS DE BLOQUES

En esta sección y en las tres siguientes se examina el diseño de controladores feedforward. El sistema de mezclado de la figura 11-2.1 se usa para ilustrar este diseño; en la tabla 11-2.1 se pre-

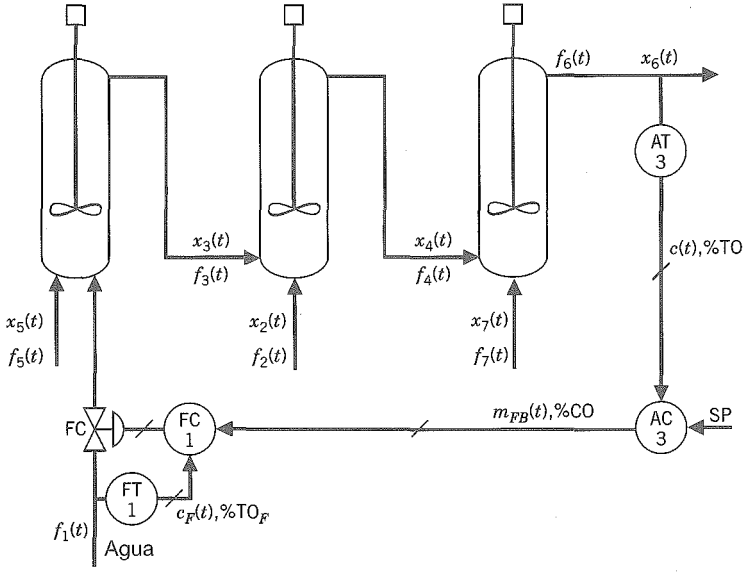


Figura 11-2.1 Proceso de mezclado.

sentan las condiciones de estado estacionario y otra información del proceso. En este proceso, tres corrientes diferentes se mezclan y se diluyen con agua hasta obtener la composición final deseada del componente A, $x_6(t)$. Las consideraciones del proceso indican que la mezcla debe hacerse en tres tanques de volumen constante, como se muestra en la figura. Las tres corrientes de entrada representan posibles perturbaciones del proceso; es decir, el flujo y la composición de las corrientes 5, 2 y 7 pueden variar. Sin embargo, las mayores perturbaciones suelen provenir de la corriente 2. En general, el flujo de la corriente, $f_2(t)$, puede duplicarse en tanto que la fracción másica, $x_2(t)$, puede bajar hasta 20% de su valor de estado estacionario. En la figura 11-2.2 se muestra el control, proporcionado por control por retroalimentación, cuando $f_2(t)$ cambia de 1000 a 2000 gpm. La composición cambia de su valor en fracción másica (mf, por sus siglas en inglés) de estado estacionario de 0.472 mf a aproximadamente 0.525 mf, un cambio de 11.23% de su referencia. Sin embargo, las especificaciones del proceso indican que la desviación máxima permitida para este proceso es de ±1.5% de la referencia. Es decir, el valor máximo permitido de la composición es 0.479 mf y el valor mínimo permitido es 0.465 mf. Por tanto, no parece que la retroalimentación simple pueda proporcionar el desempeño requerido; quizá se justifique el control feedforward.

Tabla 11-2.1 Información del proceso y valores de estado estacionario para el proceso de mezclado

Información
Rango del transmisor de concentración: 0.3-0.7 fracción másica. Su dinámica se puede describir por una constante de tiempo de 0.1 min.
La caída de presión a través de la válvula se puede considerar constante, y el flujo máximo proporcionado por la válvula es de 3800 gpm. La dinámica de la válvula se puede describir por una constante de tiempo de 0.1 min.
La densidad de todas las corrientes también se considera similar y constante.

Valores de estado estacionario

Corriente	Flujo, gpm	Fracción másica
1	1900	0.000
2	1000	0.990
3	2400	0.167
4	3400	0.049
5	500	0.800
6	3900	0.472
7	500	0.900

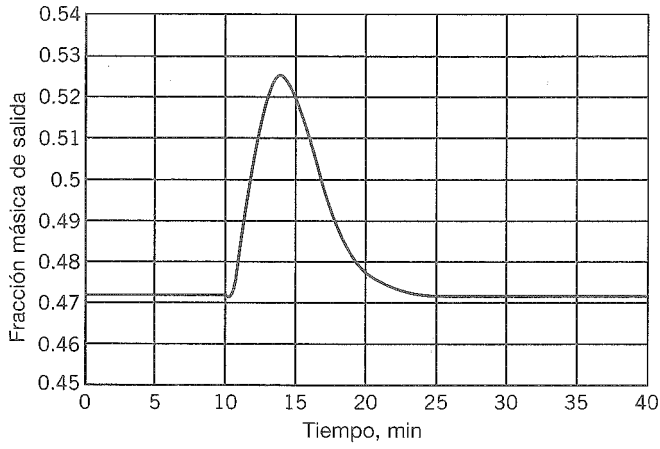


Figura 11-2.2 Control por retroalimentación cuando $f_2(t)$ cambia de 1000 a 2000 gpm.

Un índice utilizado con frecuencia para evaluar el desempeño de un sistema de control es la integral del valor absoluto del error (IAE), que es el área total bajo la curva, o error total. El valor de IAE para la respuesta que se muestra en la figura 11-2.2 es 73.06 mf-min.

Suponiendo por el momento que $f_2(t)$ es la perturbación principal, la aplicación del control feedforward a este proceso requiere medir este flujo y, cuando ocurra un cambio, tomar la acción correctiva pertinente. A continuación se examina el diseño de este controlador feedforward.

En la figura 11-2.3*a* se muestra el diagrama de bloques para el proceso. El diagrama muestra que $f_2(t)$ es la perturbación de interés. Enseguida se presenta el significado de cada función de transferencia.

G = función de transferencia del controlador de composición.
G_{cF} = función de transferencia del controlador de flujo.
G_v = función de transferencia de la válvula. Describe cómo resulta afectado el flujo de agua por la salida del controlador de flujo.
G_{T_1} = función de transferencia del proceso de mezclado. Describe cómo resulta afectada $x_6(t)$ por el flujo de agua.
G_{T_2} = función de transferencia del proceso de mezclado. Describe cómo resulta afectada $x_6(t)$ por $f_2(t)$.
H_F = función de transferencia del sensor y transmisor de flujo.
H = función de transferencia del sensor y transmisor de concentración.

Debido a que, una vez sintonizado, el lazo de flujo es rápido y estable, la figura 11-2.3*a* se puede simplificar como se muestra en la figura 11-2.3*b*. La nueva función de transferencia es

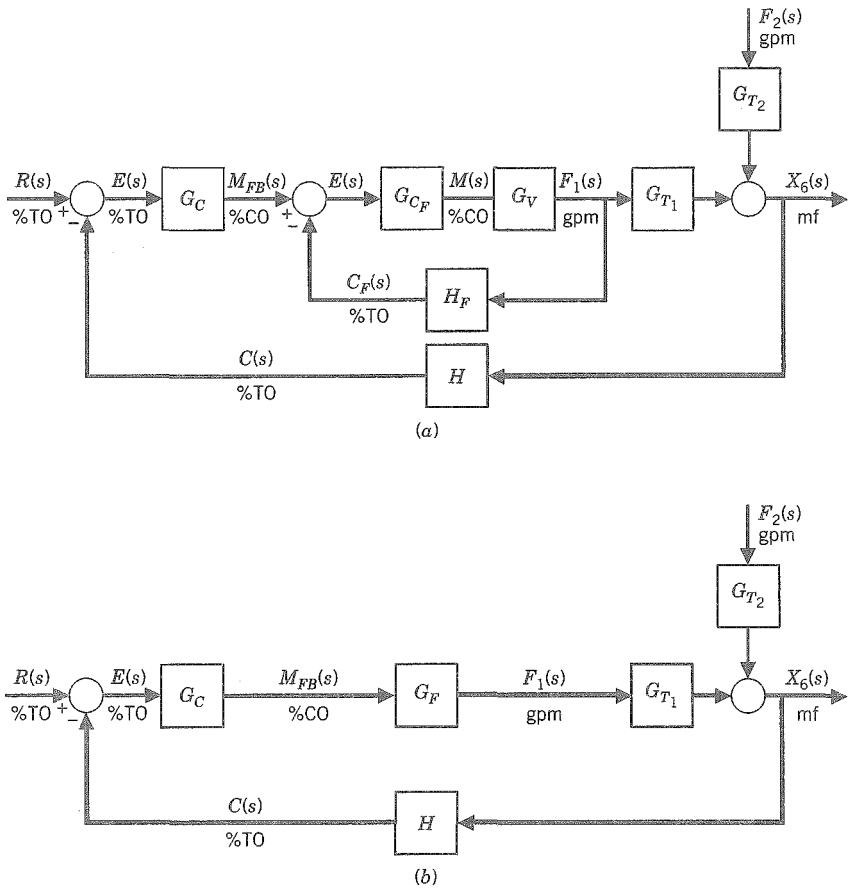


Figura 11-2.3 Diagramas de bloques para el proceso de mezclado.

G_F = función de transferencia que describe cómo resulta afectado el flujo de agua por el controlador de composición, $G_F = G_{cF}G_v/1 + G_{cF}G_vH_F$.

Es posible trazar un diagrama de bloques más condensado, el cual se muestra en la figu 11-2.4, y compararlo con el de la figura 11-2.3*b*. El significado de cada una de las funciones (transferencia se detalla a continuación.

G_M = función de transferencia que describe cómo afecta la variable manipulada, $M(s)$, a la variable controlada, $C(s)$. En este caso, $G_M = G_F G_{T_1} H$.

G_D = función de transferencia que describe cómo afecta la perturbación, $F_2(s)$, a la variable controlada. En este caso, $G_D = G_{T_2} H$.

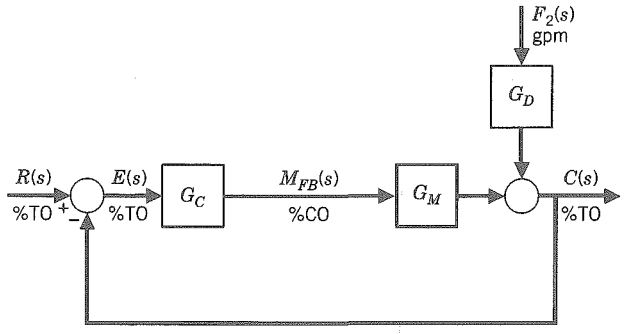


Figura 11-2.4 Diagrama de bloques condensados.

A modo de repaso, el objetivo del control feedforward es medir la(s) entrada(s) y, si se detecta una perturbación, ajustar la variable manipulada a fin de mantener la variable controlada en su referencia. Esta operación de control se muestra en la figura 11-2.5. El significado de cada función de transferencia nueva se detalla a continuación.

H_D = función de transferencia que describe al sensor y transmisor que mide la perturbación.
FFC = función de transferencia del controlador feedforward.

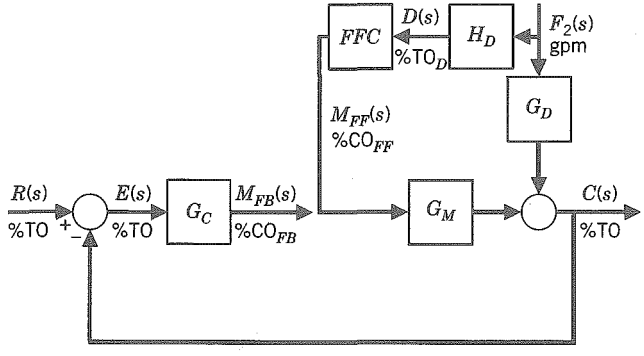


Figura 11-2.5 Diagrama de bloques en el sistema de control feedforward.

Nótese que en la figura 11-2.5 el controlador por retroalimentación se ha "desconectado". Este controlador será "conectado" de nuevo más adelante.

La figura 11-2.5 muestra que la manera en que la perturbación, $F_2(s)$, afecta a la variable controlada, $C(s)$, está dada por

$$C(s) = G_D F_2(s) + H_D(\text{FFC}) G_M F_2(s)$$

El objetivo es diseñar FFC de tal modo que un cambio en $F_2(s)$ no afecte a $C(s)$, es decir, tal que $C(s) = 0$. Por tanto,

$$0 = G_D F_2(s) + H_D(\text{FFC}) G_M F_2(s)$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre $F_2(s)$ y despejando FFC, se obtiene

$$\text{FFC} = -\frac{G_D}{H_D G_M} \tag{11-2.1}$$

La ecuación 11-2.1 es la fórmula de diseño para el controlador feedforward.

Como se aprendió en capítulos anteriores, las funciones de transferencia de primer orden más tiempo muerto son de uso común como una aproximación para describir procesos; en el capítulo 7 se mostró cómo evaluar esta función de transferencia a partir de entradas escalón. Usando este tipo de aproximación para este proceso

$$G_D = \frac{K_D e^{-t_{0D}s}}{\tau_D s + 1}, \frac{\%\text{TO}}{\text{gpm}} \tag{11-2.2}$$

$$G_M = \frac{K_M e^{-t_{0M}s}}{\tau_M s + 1}, \frac{\%\text{TO}}{\%\text{CO}} \tag{11-2.3}$$

y suponiendo que H_D es sólo una ganancia

$$H_D = K_{T_D}, \frac{\%\text{TO}_D}{\text{gpm}} \tag{11-2.4}$$

Sustituyendo las ecuaciones 11-2.2, 11-2.3 y 11-2.4 en la ecuación 11-2.1, se obtiene

$$\text{FFC} = \frac{M_{FF}(s)}{TO_D(s)} = -\frac{K_D}{K_{T_D} K_M}\left(\frac{\tau_M s + 1}{\tau_D s + 1}\right) e^{-(t_{0D} - t_{0M})s} \tag{11-2.5}$$

La ecuación 11-2.5 contiene varios elementos que se explican en detalle a continuación; la implementación de esta ecuación se muestra en la figura 11-2.6.

El primer elemento del controlador feedforward, $-K_D/K_{T_D} K_M$, sólo contiene términos de ganancia. Este elemento es la parte del controlador feedforward que compensa las diferencias

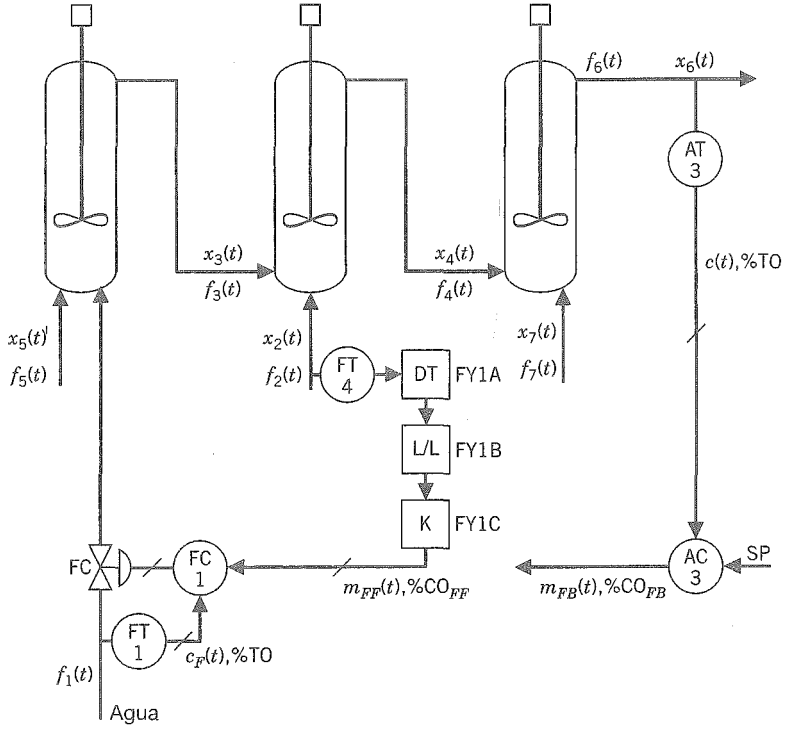


Figura 11-2.6 Control feedforward.

de estado estacionario entre "las trayectorias de G_M y G_D". Las unidades de este elemento ayudan a entender su significado:

$$\frac{K_D}{K_{T_D} K_M} \Rightarrow \frac{\dfrac{\%\text{TO}}{\text{gpm}}}{\dfrac{\%\text{TO}_D}{\text{gpm}} \dfrac{\%\text{TO}}{\%\text{CO}_{FF}}} = \frac{\%\text{CO}_{FF}}{\%\text{TO}_D}$$

Por tanto, las unidades muestran que el término indica cuánto cambia la salida del controlador feedforward, $m_{FF}(t)$, por cada unidad de cambio en la salida del transmisor, $\%\text{TO}_D$.

Nótese el signo negativo que precede al término de ganancia en la ecuación 11-2.5. Este signo ayuda a decidir la "acción" del controlador. En el proceso bajo estudio, K_D es positiva; cuando $f_2(t)$ aumenta, la concentración de salida, $x_6(t)$, también aumenta ya que la corriente 2 está más concentrada que la corriente de salida. K_M es negativa; cuando la señal del controlador de flujo de agua aumenta, la válvula se abre y la concentración de salida disminuye. Finalmente,

K_{T_D} es positiva; cuando $f_2(t)$ aumenta, la señal del transmisor de flujo también aumenta. Por tanto, el signo del elemento de ganancia es negativo:

$$\frac{K_D}{K_{T_D} K_M} \Rightarrow \frac{+}{+-} = -$$

Un signo negativo significa que cuando la señal del transmisor de flujo aumenta, indicando un incremento en $f_2(t)$, la salida del controlador feedforward, $m_{FF}(t)$, debe disminuir, cerrando la válvula y reduciendo el flujo de agua. Esta acción no tiene sentido. A medida que $f_2(t)$ aumenta, tendiendo a aumentar la concentración del caudal de salida, el flujo de agua debe aumentar también para diluir la concentración de salida y anular así el efecto de $f_2(t)$. Por lo tanto, el signo del elemento de ganancia debería ser positivo. Nótese que cuando el signo negativo que antecede al elemento de ganancia se multiplica por el signo de este elemento se obtiene la acción feedforward correcta.

El segundo elemento del controlador feedforward incluye sólo las constantes de tiempo de las "trayectorias de G_D y G_M". Este elemento, llamado adelanto-retardo (L/L, por sus siglas en inglés), compensa las diferencias en las constantes de tiempo entre las dos trayectorias. En la sección 11-3 se examina este elemento en detalle.

El último elemento del controlador feedforward contiene sólo los términos de tiempo muerto de las "trayectorias de G_D y G_M". Este elemento, llamado *compensador de tiempo muerto,* compensa las diferencias en el tiempo muerto entre las dos trayectorias. En ocasiones el término $(t_{0_D} - t_{0_M})$ puede ser negativo, produciendo un exponente positivo. Como se señaló en el capítulo 2, la representación del tiempo muerto en el dominio de Laplace incluye un signo negativo en el exponente. Cuando el signo es positivo, no hay tiempo muerto en absoluto y no es posible implementarlo. Un signo negativo en el exponente se interpreta como "retrasar" una entrada; un signo positivo puede indicar un "pronóstico". Es decir, el controlador requiere tomar una acción antes de que ocurra la perturbación. ¡Esto no es posible! Cuando esto ocurre, en muchas ocasiones existe una explicación física, como se ilustra en el presente ejemplo.

Por tanto, el primer elemento del controlador feedforward es un compensador de estado estacionario, mientras que los dos últimos elementos son compensadores dinámicos. Todos estos elementos se implementan con facilidad usando software de control por computadora. Sin embargo, hace algunos años, cuando sólo se usaba instrumentación análoga, el compensador de tiempo muerto era en extremo difícil o imposible de implementar. En ese entonces, lo más avanzado que había era implementar sólo los compensadores de estado estacionario y de adelanto-retardo. En la figura 11-2.6 se muestra un componente para cada cálculo que requiere el controlador feedforward, es decir, un componente para el tiempo muerto, uno para el adelanto-retardo y uno para la ganancia. Sin embargo, muchas veces los adelantos/retardos tienen ganancias ajustables, en cuyo caso es posible combinar los componentes FY4B y FY4C en un solo componente. Esto es más eficiente ya que se utilizan menos componentes. En adelante se mostrará un solo componente, el adelanto-retardo, y la ganancia estará incluida en él.

Volviendo al sistema de mezclado, bajo condiciones de lazo abierto, un cambio escalón de 5% en la señal del controlador por retroalimentación proporciona una respuesta del proceso a partir de la cual se obtiene la siguiente aproximación de primer orden más tiempo muerto:

$$G_M = \frac{-1.095e^{-0.93s}}{3.82s+1}, \qquad \frac{\%\text{TO}}{\%\text{CO}} \tag{11-2.6}$$

Asimismo, bajo condiciones de lazo abierto, se permitió un cambio de 10 gpm en $f_2(t)$ en forma de escalón, y a partir de la respuesta del proceso se obtiene la siguiente aproximación:

$$G_D = \frac{0.0325\, e^{-0.75s}}{2.75s+1}, \qquad \frac{\%\text{TO}}{\text{gpm}} \tag{11-2.7}$$

Por último, suponiendo que el transmisor de flujo en la corriente 2 está calibrado de 0 a 3000 gpm, su función de transferencia está dada por

$$H_D = K_{T_D} = \frac{100\ \%\text{TO}_D}{3000\ \text{gpm}} = 0.0333\frac{\%\text{TO}_D}{\text{gpm}}$$

Sustituyendo las tres funciones de transferencia anteriores en la ecuación 11-2.1, se obtiene

$$\text{FFC} = \frac{M_{FF}(s)}{D(s)} = 0.891\left(\frac{3.82s+1}{2.75s+1}\right)e^{-(0.75-0.93)s} \tag{11-2.8}$$

El tiempo muerto indicado, 0.75 – 0.93, es negativo, por lo que no es posible implementar el compensador de tiempo muerto. Por tanto, el controlador feedforward que se puede implementar, o es factible, es

$$\text{FFC} = \frac{M_{FF}(s)}{\text{TO}_D(s)} = 0.891\left(\frac{3.82s+1}{2.75s+1}\right) \tag{11-2.9}$$

En la figura 11-2.7 se muestra la implementación de este controlador. En la figura se muestra que también se ha implementado la compensación por retroalimentación. Esta implementación se ha logrado sumando las salidas del controlador por retroalimentación y del controlador feedforward en el bloque FY3. En la sección 11-4 se examina cómo implementar esta suma. En la figura 11-2.8 se muestra el diagrama de bloques para este esquema de control combinado.

En la figura 11-2.9 se muestra la respuesta de la composición cuando $f_2(t)$ se duplica de 1000 a 2000 gpm. En la figura se compara el control por retroalimentación (FBC), el control feedforward con compensación solamente de estado estacionario (FFCSS) y el control feedforward con compensación dinámica (FFCDYN). En el control feedforward con compensación de estado estacionario no se implementa ninguna compensación dinámica; es decir, en este caso FFC = 0.891. El control feedforward con compensación dinámica incluye el controlador completo, ecuación 11-2.9. Bajo control feedforward con compensación de estado estacionario, la fracción másica aumentó hasta 0.477 mf, o un cambio de 1.05% respecto de la referencia. Bajo control feedforward con compensación dinámica, la fracción másica aumentó hasta 0.473 mf, o un cambio de 0.21%. La mejoría que proporciona el control feedforward es bastante impresionante. En la figura 11-2.9 también se muestra que la respuesta del proceso en un principio tiende a bajar y luego a aumentar; más adelante se examina esta respuesta.

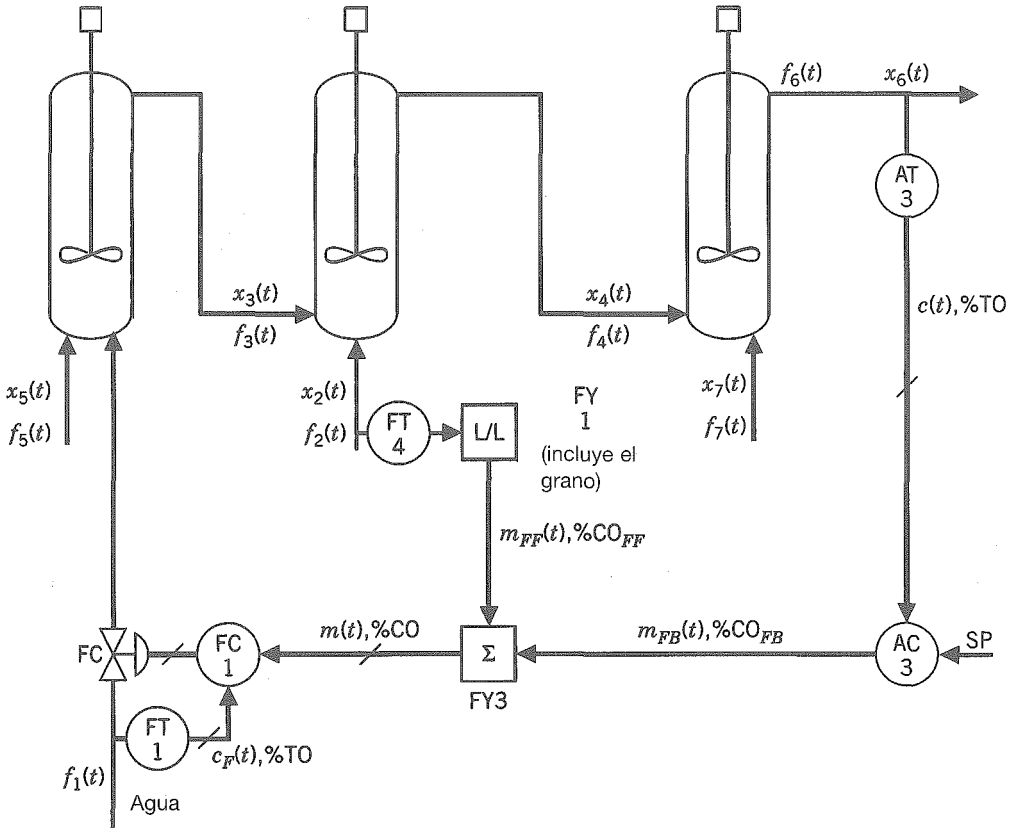


Figura 11-2.7 Implementación del controlador por retroalimentación/feedforward.

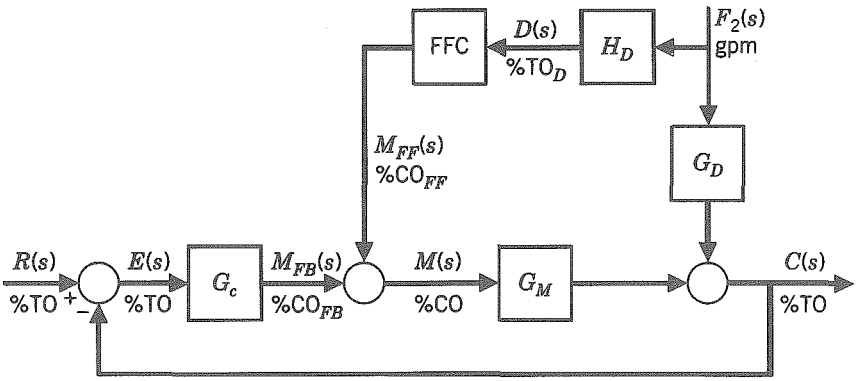


Figura 11-2.8 Diagrama de bloques del controlador por retroalimentación/feedforward.

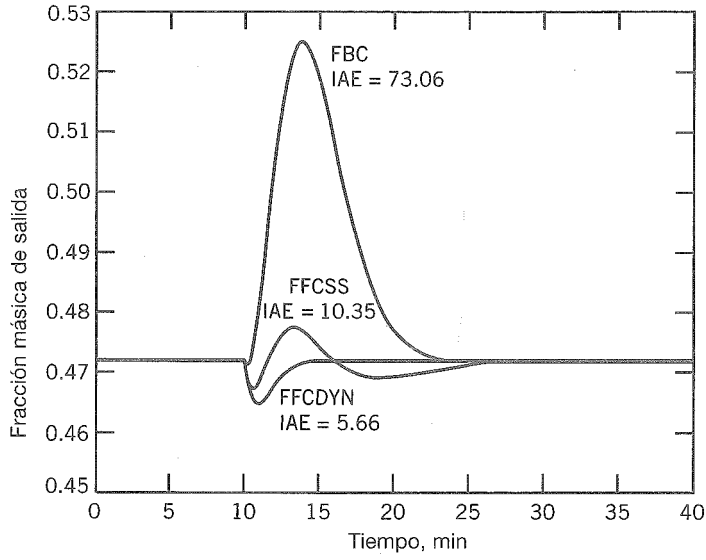


Figura 11-2.9 Respuestas del control feedforward y por retroalimentación cuando $f_2(t)$ cambia de 1000 a 2000 gpm.

En los párrafos y las figuras anteriores se ha mostrado el desarrollo de un controlador feedforward lineal y las respuestas obtenidas. En este punto, como no se ha dado una explicación del elemento de adelanto-atraso, el lector debe estar pensando en ello. Por tanto, se explicará este elemento antes de examinar con mayor detalle el control feedforward.

11-3 EL ELEMENTO DE ADELANTO-ATRASO

Como se indicó en las ecuaciones 11-2.5 y 11-2.9, el elemento de adelanto-atraso se compone de la relación de dos términos ($\tau s + 1$). Más específicamente, su función de transferencia es

$$\frac{O(s)}{I(s)} = \frac{\tau_{ld}s + 1}{\tau_{lg}s + 1} \tag{11-3.1}$$

donde:

$O(s)$ = transformada de Laplace de la variable de salida
$I(s)$ = transformada de Laplace de la variable de entrada
τ_{ld} = constante de tiempo de adelanto
τ_{lg} = constante de tiempo de atraso.

Este elemento de adelanto-atraso se examinó previamente en el capítulo 2; sin embargo, se justifica aquí un breve repaso. Supóngase que la entrada cambia en forma de escalón en A unidades de amplitud; es decir,

$$I(s) = \frac{A}{s}$$

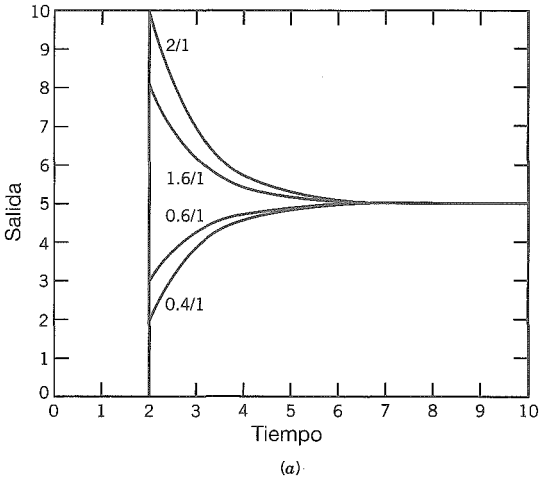
Sustituyendo esta expresión para $I(s)$ en la ecuación 11-3.1 y haciendo la inversión de la ecuación al dominio del tiempo, se obtiene

$$O(t) = A\left[1 + \frac{\tau_{ld} - \tau_{lg}}{\tau_{lg}} e^{-t/\tau_{lg}}\right] \qquad \textbf{(11-3.2)}$$

En la figura 11-3.1*a* se muestra la respuesta para diferentes valores de la relación τ_{ld}/τ_{lg} manteniendo $\tau_{lg} = 1$. En la figura se muestra que cuando esta relación aumenta, la respuesta inicial también aumenta; cuando el tiempo aumenta, la respuesta tiende exponencialmente al valor final de A. Para valores de $\tau_{ld}/\tau_{lg} > 1$, la respuesta inicial es mayor que su valor final; mientras que para valores de $\tau_{ld}/\tau_{lg} < 1$, la respuesta inicial es menor que su valor final. Por lo tanto, la respuesta inicial depende de la relación entre la constante de tiempo de adelanto y la constante de tiempo de retardo, τ_{ld}/τ_{lg}. La aproximación al valor final depende tan sólo de la constante de tiempo de retardo. Por tanto, al sintonizar un adelanto-atraso, es necesario proporcionar valores de ambos, τ_{ld} y τ_{lg}.

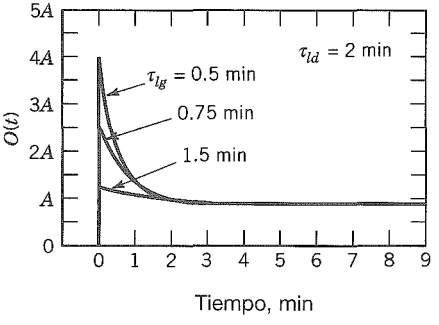
Las figuras 11-3.1*b* a 11-3.1*d* ayudan a entender mejor los efectos de τ_{ld} y τ_{lg} sobre la respuesta de adelanto-atraso a un cambio escalón de A unidades de magnitud. En la figura 11-3.1*b* se muestra cómo afecta τ_{lg} a la respuesta cuando τ_{ld} se mantiene constante. La figura muestra que cuando τ_{lg} disminuye, la relación τ_{ld}/τ_{lg} aumenta, la magnitud de la respuesta de salida inicial aumenta y la rapidez a la que la respuesta se aproxima a su valor final aumenta. En la figura 11-3.1*c* se muestra cómo τ_{ld} afecta a la respuesta cuando τ_{lg} se mantiene constante. La figura muestra que cuando τ_{ld} aumenta, la relación τ_{ld}/τ_{lg} también aumenta, y la magnitud de la respuesta de salida inicial aumenta. La figura también muestra que todas las curvas alcanzan el valor final al mismo tiempo, ya que τ_{lg} es el mismo en todos los casos. Por último, la figura 11-3.1*d* muestra dos curvas de respuesta con valores idénticos de τ_{ld}/τ_{lg} pero con valores individuales diferentes de τ_{ld} y τ_{lg}. La figura muestra que la magnitud de la respuesta inicial de la salida es la misma, ya que el valor de la relación es el mismo, pero la respuesta con el τ_{lg} mayor toma más tiempo en alcanzar el valor final.

La ecuación 11-2.5 refleja el uso del elemento de adelanto-atraso en el controlador por feedforward. La ecuación indica que a τ_{ld} se le debe asignar un valor igual a τ_M y que a τ_{lg} se le debe asignar un valor igual a τ_D.

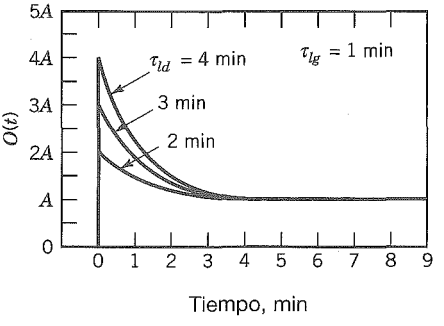


(a)

Figura 11-3.1*a* Respuesta del adelanto-atraso a un cambio en la entrada de 5 unidades.

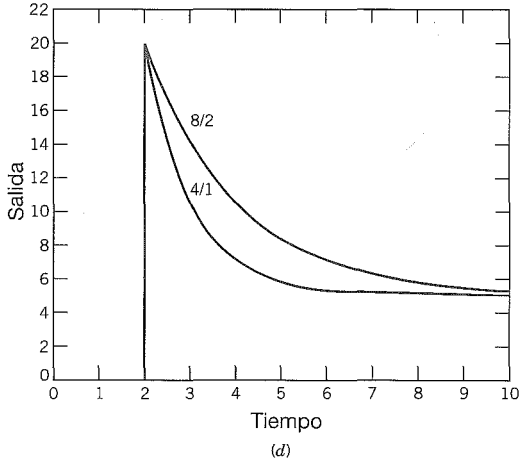


(b)



(c)

Figura 11-3.1*b*, *c* Respuesta del adelanto-atraso a una entrada de A unidades de magnitud.



(d)

Figura 11-3.1*d* Respuesta del adelanto-atraso a un cambio en la entrada de 5 unidades.

11-4 REGRESANDO AL EJEMPLO ANTERIOR

Con la comprensión del elemento de adelanto-atraso, ahora se puede regresar al ejemplo de la sección 11-2 y, específicamente, al análisis de la compensación dinámica en el controlador feedforward.

Comparando las funciones de transferencia dadas por las ecuaciones 11-2.6 y 11-2.7, es fácil darse cuenta de que la variable controlada, $c(t)$, responde más lentamente a un cambio en la variable manipulada, $m(t)$, que a un cambio en la perturbación, $f_2(t)$. Recuérdese que una consideración de diseño para el controlador feedforward es compensar las diferencias dinámicas entre las trayectorias de la variable manipulada y la perturbación, es decir, las trayectorias de G_D y G_M. El controlador feedforward para este proceso debe diseñarse de tal modo que "acelere" la respuesta de la variable controlada a un cambio en la variable manipulada. Es decir, el controlador feedforward debe "acelerar" la trayectoria de G_M; esto es exactamente lo que hace el controlador resultante, ecuación 11-2.9. Primero, obsérvese que el término de adelanto-atraso resultante tiene una relación τ_{ld}/τ_{lg} mayor que 1, $\tau_{ld}/\tau_{lg} = 3.82/2.75 = 1.39$. Esto significa que en el momento en que la señal del transmisor de flujo cambia en 1%, indicando un cambio en $f_2(t)$, la salida de adelanto-atraso cambia en 1.39%, dando como resultado un cambio inicial en la salida del controlador por feedforward de (0.891)(1.39) = 1.238%. En algún momento, la salida de adelanto-atraso se aproxima a 1% y la salida del controlador por feedforward se aproxima a 0.891%. Este tipo de acción resulta en un incremento inicial en $f_1(t)$ mayor que el realmente necesario para el incremento específico en $f_2(t)$. Este incremento inicial mayor proporciona un "empuje" a la trayectoria de G_M para que se mueva más rápido, lo cual resulta en un control más riguroso si se compara con el control que proporciona el controlador feedforward de estado estacionario; esto se ilustra en la figura 11-2.9. Segundo, nótese que la ecuación del controlador feedforward no incluye un elemento de tiempo muerto. No hay necesidad de retrasar la acción feedforward. Por el contrario, el proceso en estudio requiere que se "acelere" la acción feedforward. Por lo tanto, la ausencia del término de tiempo muerto tiene sentido [¡sería grandioso si se pudiera "pronosticar" un cambio en $f_2(t)$!].

Es importante darse cuenta de que este controlador feedforward, ecuación 11-2.9, sólo compensa los cambios en $f_2(t)$. Cualquier otra perturbación no será compensada por el controlador y, en ausencia de un controlador por retroalimentación, produciría una desviación en la variable controlada. La implementación del control feedforward requiere la presencia de control por retroalimentación. El control feedforward compensa las principales perturbaciones medibles, mientras que el control por retroalimentación se hace cargo de las demás perturbaciones. Además, el controlador por retroalimentación compensa cualquier inexactitud en el controlador feedforward. Por lo tanto, *¡el control feedforward debe implementarse con compensación por retroalimentación!* La retroalimentación de la variable controlada debe estar presente.

En la figura 11-2.7 se muestra un sumador donde se combinan las señales del controlador feedforward, $m_{FF}(t)$, y del controlador por retroalimentación, $m_{FB}(t)$. Una manera de entender el significado de las señales que entran al sumador consiste en observar que la señal del cálculo feedforward, $m_{FF}(t)$, está relacionada con el flujo, $f_1(t)$, requerido para compensar las principales perturbaciones. La señal del controlador por retroalimentación, $m_{FB}(t)$, es $\Delta f_1(t)$. Es decir, esta señal de retroalimentación sesga el cálculo feedforward para corregir las perturbaciones que

no se pueden medir o los errores en el cálculo feedforward. El sumador resuelve la siguiente ecuación

$$\text{OUT} = \text{señal de retroalimentación} + \text{señal de feedforward} + \text{constante}$$

Para ser más específicos, considérese el uso del sumador que se muestra en la tabla 10-1.1:

$$\text{OUT} = K_x X + K_y Y + K_z Z + B_o$$

Sea la señal de retroalimentación la entrada X, la señal de feedforward la entrada Y y la entrada Z no se usa en este caso. Por lo tanto,

$$OUT = K_x[m_{FB}(x)] + K_y[m_{FF}(t)] + B_o$$

Como se analizó previamente, el signo de la parte de estado estacionario del controlador feedforward, $-K_D/K_{TD}\,K_m$, es positivo para este proceso, por lo que a K_y se le asigna el valor +1 (si el signo hubiera sido negativo, entonces a K_y se le hubiera asignado el valor −1). A K_x también se le asigna el valor +1. Nótese que la asignación de un valor de 0 o 1 a K_y proporciona una forma fácil de "apagar" o "encender" el controlador feedforward.

Supóngase que el proceso está en estado estacionario sólo bajo control por retroalimentación ($K_y = 0$, $B_o = 0$) y que se desea "encender" el controlador feedforward. Además, debido a que el proceso se encuentra en estado estacionario, se desea encender el controlador feedforward sin perturbar la señal que llega a la válvula. Es decir, se desea "una transferencia sin sobresaltos" del control por retroalimentación simple al control feedforward/retroalimentación. Para lograr esta transferencia, primero el sumador se ajusta en "manual", con lo que su salida se congela; a K_y se le asigna el valor +1; la salida del controlador feedforward, $m_{FF}(t)$, se lee de FY1; el término constante, B_o, se hace igual al negativo del valor leído en FY1, y por último, el sumador se vuelve a ajustar en automático. Este procedimiento hace que el término constante cancele la salida del controlador feedforward. Para ser un poco más específicos, supóngase que el proceso está corriendo tan sólo bajo control por retroalimentación, con la señal a la válvula igual a $m_{FB}(t)$. Después se desea "encender" el controlador feedforward, y en ese instante el proceso se encuentra en estado estacionario con $f_2(t) = 1500$ gpm. Bajo esta condición, la salida del transmisor de flujo está en 50% y $m_{FF}(t)$ está en (50%)(0.891) o 44.55%. Entonces se sigue el procedimiento recién explicado para obtener

$$\text{OUT} = (1)m_{FB}(t) + (1)(44.5) - 44.55 = m_{FB}(t)$$

Ahora supóngase que $f_2(t)$ cambia de 1500 gpm a 1800 gpm, haciendo la salida del transmisor de flujo igual a 60%. Una vez que los estados transitorios a través del adelanto-atraso se han extinguido, la salida del controlador feedforward es igual a (60%)(0.891) = 53.46%. Así, el controlador feedforward solicita 8.91% más señal a la válvula para compensar la perturbación. En ese instante la señal de salida del sumador es

$$\text{OUT} = (1)m_{FB}(t) + (1)(53.46) - 44.55 = m_{FB}(t) + 8.91\,\%$$

lo que cambia la señal que llega a la válvula en la cantidad requerida.

El procedimiento que se acaba de describir para implementar el sumador es fácil; sin embargo, requiere la intervención manual del personal de operación. En la mayoría de los sistemas de control la configuración para llevar a cabo este procedimiento automáticamente es sencilla. Por ejemplo, considérese el uso de un interruptor encendido-apagado (on-off) y dos términos constantes, B_{FB} y B_{FF}. El interruptor debe indicar control por retroalimentación (el interruptor está en la posición OFF) o control feedforward (el interruptor está en la posición ON). B_{FB} se usa cuando sólo se utiliza el control por retroalimentación ($K_y = 0$), y B_{FF} se usa cuando sólo se utiliza el control feedforward ($K_y = 1$). Así, el sumador es

$$m(t) = K_x m_{FB}(t) + K_y m_{FF}(t) + (B_{FB} \text{ si el interruptor está en OFF o } B_{FF} \text{ si el interruptor está en ON})$$

Originalmente, $B_{FB} = B_{FF} = 0$. Cuando sólo se está usando la retroalimentación, se calcula lo siguiente:

$$B_{FF} = -m_{FF}(t) + B_{FB}$$

Tan pronto como el interruptor se pone en ON, este cálculo se detiene, K_y se hace igual a 1 y B_{FF} se mantiene constante en el último valor calculado. Cuando sólo se está usando la acción feedforward, se calcula lo siguiente:

$$B_{FB} = m_{FF}(t) + B_{FF}$$

Tan pronto como el interruptor se pone en OFF, este cálculo se detiene, K_y se hace igual a 0 y B_{FB} se mantiene constante en el último valor calculado. Con este procedimiento se garantiza una transferencia automática sin sobresaltos. Se sugiere al lector que ponga a prueba este algoritmo.

Hasta ahora, en el ejemplo considerado, el control feedforward se ha implementado para compensar sólo $f_2(t)$. Pero ¿qué sucede si es necesario compensar otra perturbación tal como $x_2(t)$? La técnica para el diseño de este nuevo controlador feedforward es la misma que antes; en la figura 11-4.1 se muestra un diagrama de bloques que incluye la nueva perturbación con el nuevo controlador feedforward FFC_2. Siguiendo el desarrollo algebraico anterior, la ecuación para el nuevo controlador es

$$\text{FFC}_2 = -\frac{G_{D2}}{H_{D_2} G_M} \tag{11-4.1}$$

La prueba escalón produce la siguiente función de transferencia:

$$G_{D_2} = \frac{64.1e^{-0.85s}}{3.15s + 1}, \quad \frac{\%\text{TO}}{\text{mf}} \tag{11-4.2}$$

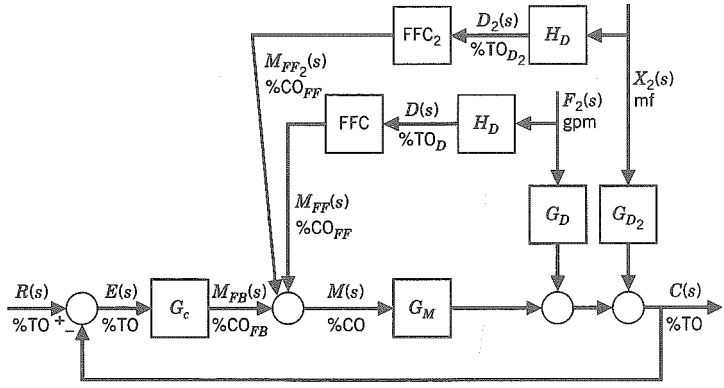


Figura 11-4.1 Diagrama de bloques del control feedforward para dos perturbaciones.

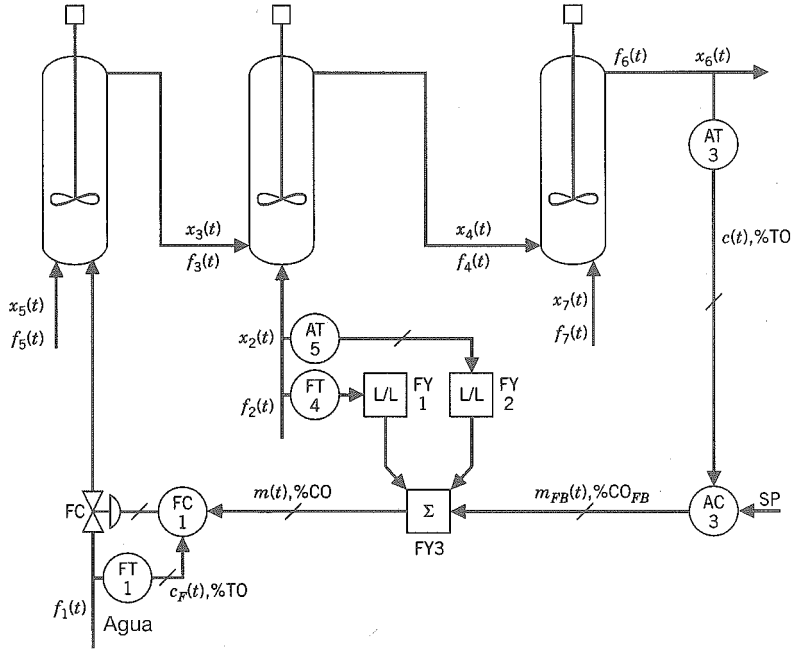


Figura 11-4.2 Implementación del control feedforward/por retroalimentación para dos perturbaciones.

Suponiendo que el transmisor de concentración en la corriente 2 tiene un retardo despreciable y que se ha calibrado de 0.5 a 1.0 mf, su función de transferencia está dada por

$$H_{D_2} = \frac{100\ \%\mathrm{TO}_{D_2}}{0.5\mathrm{mf}} = 200\frac{\%\mathrm{TO}_{D_2}}{\mathrm{mf}} \qquad \textbf{(11-4.3)}$$

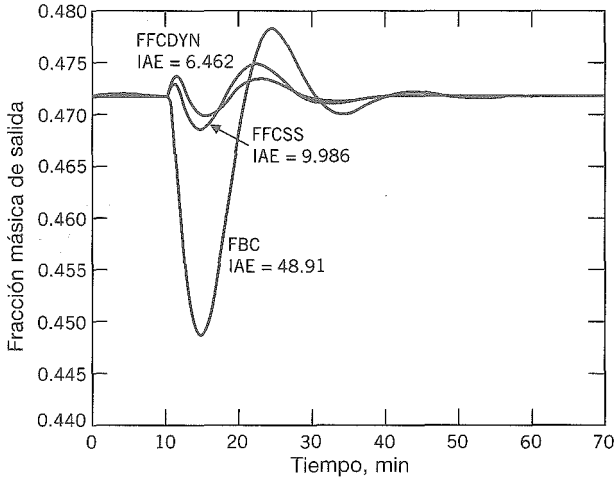


Figura 11-4.3 Desempeño del control de $x_6(t)$ para un cambio de –0.2 mf en $x_2(t)$.

Por último, sustituyendo las ecuaciones 11-2.6, 11-4.2 y 11-4.3 en la ecuación 11-4.1, se obtiene

$$\text{FFC}_2 = 0.293\left(\frac{3.82s+1}{3.15s+1}\right)e^{-(0.85-0.95)s} \tag{11-4.4}$$

Debido a que el tiempo muerto vuelve a ser negativo,

$$\text{FFC}_2 = 0.293\left(\frac{3.82s+1}{3.15s+1}\right) \tag{11-4.5}$$

En la figura 11-4.2 se muestra la implementación de este nuevo controlador feedforward agregado al anterior y al controlador por retroalimentación. En la figura 11-4.3 se muestra la respuesta de $x_6(t)$ a un cambio de fracción másica de –0.2 en $x_2(t)$ bajo control por retroalimentación, con feedforward con compensación de estado estacionario y feedforward con compensación dinámica. La mejora proporcionada por el control feedforward es ciertamente significativa. La mayor parte de la mejora en este caso la proporciona el elemento de estado estacionario; la adición del adelanto-atraso proporciona una mejora discutible. En este caso es una cuestión de criterio si se implementa o no el adelanto-atraso. Nótese que la relación de la constante de tiempo de adelanto y la constante de tiempo de atraso es 1.25, un valor próximo a 1.0. Con base en el estudio sobre el elemento de adelanto-atraso, mientras más próxima a 1.0 esté esta relación menor es la necesidad de la compensación de adelanto-atraso. Se presenta a continuación una regla empírica que se puede usar para decidir si se utiliza o no el adelanto-atraso: si $0.65 < \tau_{ld}/\tau_{lg} < 1.3$, no utilizar el adelanto-atraso. Fuera de estos límites, el uso del adelanto-atraso puede mejorar de manera significativa el desempeño del control.

11-5 DISEÑO DE CONTROLADORES FEEDFORWARD NO LINEALES A PARTIR DE PRINCIPIOS BÁSICOS DE PROCESOS

Los controladores feedforward desarrollados hasta este punto, ecuaciones 11-2.9 y 11-4.5, son lineales. Se desarrollaron a partir de modelos lineales del proceso que sólo son válidos para desviaciones pequeñas alrededor del punto de operación donde se realizaron las pruebas escalón. Después estos controladores se usan con los mismos parámetros constantes sin tomar en consideración las condiciones de operación. Como se señaló en los capítulos 3 y 4, la mayoría de las veces los procesos tienen características no lineales, y, por consiguiente, cuando las condiciones de operación cambian, el desempeño del control proporcionado por los controladores lineales se deteriora.

Como se estableció en la sección 11-2, los controladores feedforward se componen de compensadores de estado estacionario y dinámico. La mayoría de las veces, los compensadores de estado estacionario, representados por el elemento $-K_D/K_{T_D}K_M$, se pueden obtener por otros medios que producen un compensador no lineal. Este compensador no lineal proporciona un desempeño de control mejorado en un amplio margen de condiciones de operación.

Un método para obtener un compensador de estado estacionario no lineal consiste en comenzar por los principios básicos, usualmente balances de masa o energía. Usando principios básicos, se desea desarrollar una ecuación que exprese la variable manipulada como una función de las perturbaciones y de la referencia de la variable controlada. Es decir,

$$m(t) = f[d_1, d_2(t), \ldots, d_n(t), \text{referencia}]$$

Para el proceso en estudio,

$$f_1(t) = f[f_5(t), x_5(t), f_2(t), x_2(t), f_7(t), x_7(t), x_6^{\text{set}}(t)]$$

donde $x_6^{\text{set}}(t)$ es el valor deseado de $x_6(t)$.

En la sección anterior se decidió que para este proceso las perturbaciones principales son $f_2(t)$ y $x_2(t)$ y que los otros flujos y concentraciones de entrada son perturbaciones menores. Por lo tanto, es necesario desarrollar una ecuación, el controlador feedforward de estado estacionario, que relacione la variable manipulada $f_1(t)$ en términos de las perturbaciones $f_2(t)$ y $x_2(t)$. En esta ecuación se considera que todos los demás flujos y concentraciones de entrada están en sus valores de estado estacionario. Es decir,

$$f_1(t) = f[\bar{f}_5, \bar{x}_5, f_2(t), x_2(t), \bar{f}_7, \bar{x}_7, x_6^{\text{set}}(t)]$$

donde la barra superior indica los valores de estado estacionario de las variables.

Debido a que se trabaja con composiciones y flujos, los balances de masa son apropiados en este caso. Hay dos componentes, A y agua, por lo que pueden escribirse dos balances de masa independientes. Se empieza con un balance de masa total alrededor de los tres tanques

$$\rho\bar{f}_5 + \rho f_1(t) + \rho f_2(t) + \rho\bar{f}_7, -\rho f_6(t) = 0 \qquad \textbf{(11-5.1)}$$

1 ec., 2 incóg. $[f_1(t), f_6(t)]$

Nótese que $f_2(t)$ no se considera como incógnita ya que será medida y, en consecuencia, su valor será conocido. Un balance de masa del componente A proporciona la otra ecuación

$$\rho\bar{f}_5\bar{x}_5 + \rho f_2(t)x_2(t) + \rho\bar{f}_7\bar{x}_7 - \rho f_6(t)x_6^{\text{set}}(t) = 0 \qquad \textbf{(11-5.2)}$$

2 ec., 2 incóg.

Debido a que $x_2(t)$ también se medirá, no se considera como incógnita. Despejando $f_6(t)$ en la ecuación 11-5.1, sustituyendo en la ecuación 11-5.2 y reordenando términos, se obtiene

$$f_1(t) = \frac{1}{x_6^{\text{set}}(t)}[\bar{f}_5\bar{x}_5 + \bar{f}_7\bar{x}_7] - \bar{f}_5 - \bar{f}_7 + \frac{1}{x_6^{\text{set}}(t)}[x_2(t) - x_6^{\text{set}}(t)]f_2(t) \qquad \textbf{(11-5.3)}$$

Sustituyendo los valores de estado estacionario en la ecuación 11-5.3 se obtiene

$$f_1(t) = \frac{1}{x_6^{\text{set}}(t)}[850 + f_2(t)x_2(t)] - f_2(t) - 1000 \qquad \textbf{(11-5.4)}$$

La ecuación 11-5.4 es el controlador feedforward de estado estacionario deseado.

La implementación de la ecuación 11-5.4 depende de cómo se implemente la corrección por retroalimentación, es decir, la salida del controlador por retroalimentación. Esta implementación depende del significado físico que se le da a la señal de retroalimentación; hay varias maneras de decidir esto. Una de ellas es decidir que el significado de la señal de retroalimentación es $\Delta f_1(t)$ y utilizar un sumador similar al de la figura 11-4.2. En este caso, primero se debe sustituir $x_6^{\text{set}}(t) = 0.472$ en la ecuación 11-5.4 para obtener

$$f_1(t) = 800.85 + f_2(t)\left[\frac{x_2(t)}{0.472} - 1\right] \qquad \textbf{(11-5.5)}$$

Esta ecuación está escrita en unidades de ingeniería; en la figura 11-5.1 se muestra la implementación de este controlador –sólo se necesita un multiplicador sin compensación dinámica–. La segunda manera de implementar la compensación por retroalimentación es decidiendo que el significado de la señal de retroalimentación es $1/x_6^{\text{set}}(t)$. Después esta señal se introduce en la ecuación 11-5.4 para calcular $f_1(t)$. Por lo tanto, en este caso la señal de retroalimentación se utiliza directamente en el cálculo de la acción feedforward y no para sumarla al mismo; en la figura 11-5.2 se muestra la implementación de este controlador. Para simplificar, se muestra un solo bloque, denominado CALC. La implementación de la ecuación 11-5.4, ya sea utilizando bloques o software de cálculo, está incluida en este bloque. En la figura 11-5.3 se muestra la respuesta del proceso bajo control por retroalimentación, control feedforward de estado estacionario lineal y con los dos controladores feedforward de estado estacionario no lineal, a perturbaciones de un incremento de 1000 gpm en $f_2(t)$ y un cambio de –0.2 mf en $x_2(t)$. La mejoría en el desempeño del control obtenida con los dos controladores no lineales es evidente. El desempeño obtenido

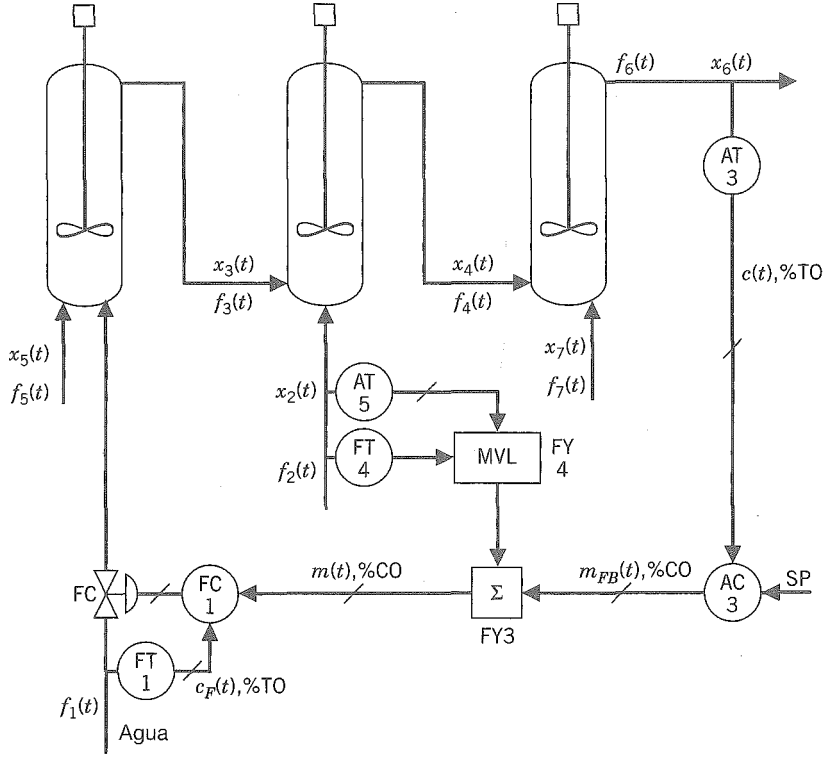


Figura 11-5.1 Control feedforward no lineal.

con el segundo controlador no lineal es muy impresionante. Este controlador mantiene las características de no linealidad del proceso y puede proporcionar un mejor control.

En vez de llamar $1/x_6^{\text{set}}(t)$ a la salida del controlador por retroalimentación se le puede llamar $x_6^{\text{set}}(t)$; el desempeño del control sería el mismo. Pero ¿qué sucede con la acción del controlador de retroalimentación en ambos casos? Se le pide al lector que piense al respecto.

En los párrafos anteriores se presentaron dos maneras diferentes de implementar el controlador feedforward no lineal de estado estacionario dependiendo del significado dado a la señal de retroalimentación, $\Delta f_1(t)$ o $1/x_6^{\text{set}}(t)$. El diseñador tiene libertad plena de tomar esta decisión. En el primer caso, el controlador por retroalimentación se sumó al cálculo de feedforward. Ésta es una elección simple y válida, y la que se usa generalmente cuando la parte de estado estacionario del controlador se obtiene como en la sección 11-2. La segunda elección, $1/x_6^{\text{set}}(t)$ o $x_6^{\text{set}}(t)$, también es una elección simple que ayuda a mantener la no linealidad del controlador. Favor de notar que el valor de $x_6(t)$ que en realidad se desea es la referencia del controlador por retroalimentación. El controlador cambia el término $1/x_6^{\text{set}}(t)$, o $x_6^{\text{set}}(t)$, en la ecuación de feedforward para mantener su propia referencia. Esta forma de proporcionar la compensación por retroalimentación suele resultar en un mejor desempeño.

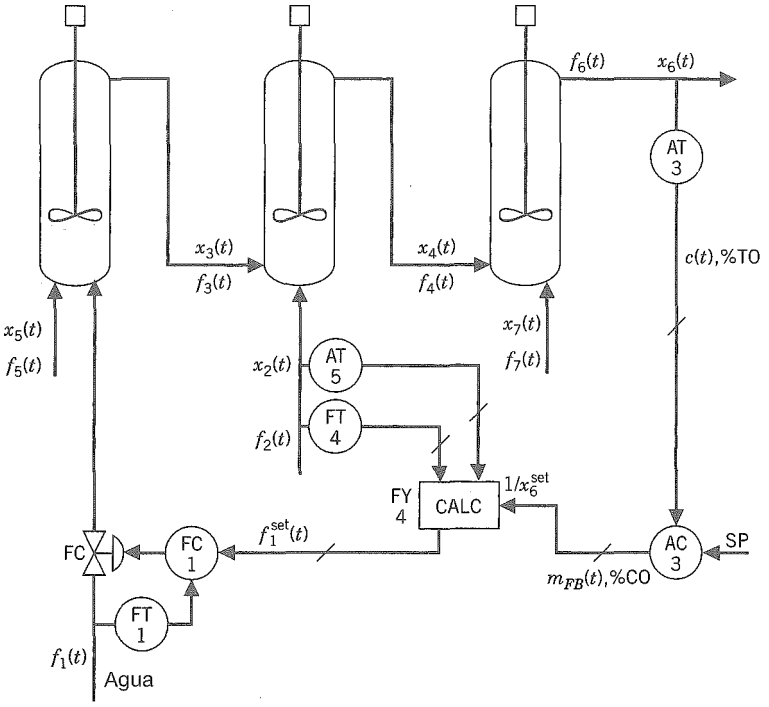


Figura 11-5.2 Control feedforward no lineal

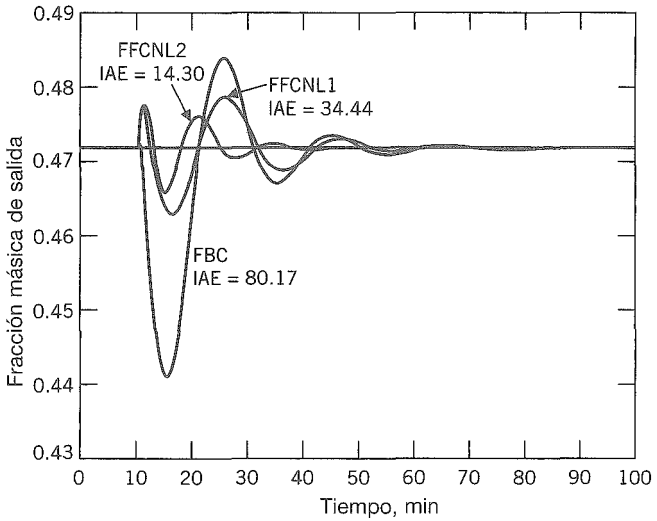


Figura 11-5.3 Desempeño de control de $x_6(t)$ para una disminución de 500 gpm en $f_2(t)$ y una disminución de 0.2 en $x_2(t)$.

En ocasiones, el desarrollo de un compensador de estado estacionario no lineal a partir de principios básicos puede ser difícil. Afortunadamente, las herramientas de la ingeniería de procesos ofrecen otra manera de desarrollar el controlador. Los procesos por lo general se diseñan por medio de simuladores de diagrama de flujo de estado estacionario o de cualquier otra simulación de estado estacionario. Estos simuladores, junto con las herramientas del análisis de regresión, proporcionan otros medios para diseñar el compensador de estado estacionario. La simulación se puede correr bajo diferentes condiciones –es decir, con diferentes valores de $f_2(t)$, $x_2(t)$ y $x_6^{set}(t)$– y la variable manipulada requerida, $f_1(t)$, se puede calcular para mantener la variable controlada en su referencia. Después esta información se puede alimentar en un programa de regresión múltiple a fin de desarrollar una ecuación que relacione la variable manipulada con las perturbaciones y la referencia.

11-6 ALGUNOS COMENTARIOS FINALES Y RESUMEN DEL DISEÑO DE LOS CONTROLADORES FEEDFORWARD

Antes de proceder con más ejemplos, queremos hacer los siguientes comentarios acerca del proceso y del ejemplo presentados en este capítulo y acerca del control feedforward en general.

El primer comentario se refiere al proceso en sí mismo. En la figura 11-2.9 se muestra la respuesta del sistema de control cuando $f_2(t)$ cambia de 1000 a 2000 gpm. La composición de esta corriente es muy alta (0.99 mf), por lo que este cambio tiende a incrementar la composición de la corriente de salida 6. Sin embargo, la respuesta mostrada en la figura 11-2.9 indica que la composición $x_6(t)$ inicialmente tiende a disminuir y después aumenta. Este comportamiento es una respuesta inversa del tipo presentado en la sección 4-4 y, por supuesto, hay una razón para este comportamiento. Debido a que los tanques son de volumen constante, un incremento en $f_2(t)$ resulta en un incremento inmediato de $f_4(t)$. La composición de la corriente 4, la cual entra al tercer tanque, es menor que la corriente 6 que sale del tercer tanque. Por lo tanto, este incremento en $f_4(t)$ tiende a diluir –disminuir– inicialmente la composición $x_6(t)$. Al final, el incremento en $f_2(t)$ resulta en un incremento en la composición que entra al tercer tanque, con el incremento correspondiente en $x_6(t)$. La función de transferencia que relaciona $f_2(t)$ con $x_6(t)$ debe presentar un cero negativo (véase el problema 4-3). En la figura 11-2.9 se muestra que la respuesta bajo control feedforward tiene una respuesta inversa más pronunciada. Lo que sucede es que cuando $f_2(t)$ aumenta, el controlador feedforward también incrementa $f_1(t)$. Por lo tanto, el flujo total que llega al tercer tanque aumenta aún más, y el efecto de dilución en ese tanque es más pronunciado. ¿Puede el lector explicar por qué la respuesta inversa es más pronunciada bajo control feedforward con compensación dinámica que bajo control feedforward con compensación sólo de estado estacionario?

El segundo comentario se refiere al elemento de adelanto-atraso. El elemento de adelanto-atraso es una unidad simple que se usa para implementar la compensación dinámica en los controladores feedforward lineales y no lineales. Se indicó cómo sintonizar el adelanto-atraso, cómo obtener τ_{ld} y τ_{lg}, con base en una prueba escalón del proceso. Este método produce una sintonización inicial para la unidad. Pero ¿qué sucede si no se puede hacer la prueba escalón? ¿Cómo se haría la sintonización de la unidad? Obviamente, una buena simulación dinámica puede pro-

porcionar la sintonización necesaria. Sin embargo, cuando la simulación no está disponible, lo que se aprendió en la sección 11-3 y en la sección 2-4.5 sugiere que es posible dar algunas pautas para responder estas preguntas. En la figura 2-4.6 se muestra la respuesta de una unidad de adelanto-atraso a una entrada en forma de rampa. Nótese en la figura 2-4.6 que la cantidad de tiempo que la salida está atrasada de la entrada depende del *retardo neto*, definido como $\tau_{lg} - \tau_{ld}$. La cantidad de tiempo que la salida está adelantada de la entrada depende del *adelanto neto*, definido como $\tau_{ld} - \tau_{lg}$. La respuesta de la unidad de adelanto-atraso a una entrada en forma de rampa es importante debido a que la mayoría de las veces las perturbaciones se comportan más como rampas que como escalones. A continuación se presentan algunas pautas para la sintonización de unidades de adelanto-atraso.

- Si se necesita retrasar la señal de entrada, se ajusta τ_{ld} igual a cero y se selecciona τ_{lg}. El adelanto no hará mucha diferencia; lo que importa es el retardo neto.
- Si se necesita adelantar la señal de entrada, uno se concentra en el término de adelanto neto; sin embargo, también se debe seleccionar τ_{lg}.
- A partir de la respuesta de la unidad de adelanto-atraso a un cambio escalón en la entrada, es claro que si $\tau_{ld} > \tau_{lg}$, la señal de entrada se amplifica. Para señales con ruido, tales como un flujo, no deberán usarse relaciones mayores que 2.
- Debido a que el tiempo muerto se suma al retardo, un tiempo muerto negativo de hecho disminuirá el retardo neto si se pudiera implementar. Por tanto, podría disminuirse τ_{lg} en el elemento de adelanto-atraso por el tiempo muerto positivo; es decir,

$$\tau_{lg} \text{ que debe usarse} = \tau_{lg}\text{calculado} + (t_{0_D} - t_{0_M})$$

  De manera alternativa, se podría incrementar el adelanto en el elemento de adelanto-atraso por el tiempo muerto negativo; es decir,

$$\tau_{ld} \text{ que debe usarse} = \tau_{ld}\text{calculado} - (t_{0_D} - t_{0_M})$$

- Si se necesita un tiempo muerto significativo, entonces se usa τ_{lg}, sin τ_{ld}, y tiempo muerto. No tendría sentido retrasar la señal para luego adelantarla, incluso si las funciones de transferencia así lo requirieran.

El tercer comentario también se refiere al elemento de adelanto-atraso, específicamente a la ubicación de la unidad cuando varias perturbaciones se miden y se usan en el controlador feedforward. Si se implementan compensadores lineales, lo único que se necesita es una sola unidad de adelanto-atraso con ganancia ajustable para cada entrada. Después las salidas de las unidades se agregan en el sumador, como se muestra en la figura 11-4.2. Cuando se requiere compensación dinámica con compensadores de estado estacionario no lineales, los elementos individuales de adelanto-atraso deben instalarse justo después de cada transmisor –es decir, en las entradas del compensador de estado estacionario–. Esto permite que se implemente la compensación diná-

mica para cada perturbación de forma individual. Sería imposible proporcionar diferentes compensaciones dinámicas después que las mediciones se combinen en el compensador de estado estacionario.

El cuarto comentario se refiere a la parte de estado estacionario del controlador feedforward. En este capítulo se ha presentado el desarrollo de un compensador lineal y de uno no lineal. El compensador no lineal ha demostrado mejor desempeño. A menudo es fácil desarrollar este compensador no lineal a partir de principios básicos, o de una simulación de estado estacionario. Si el desarrollo de un compensador no lineal es posible, éste es el método preferido. Sin embargo, si este desarrollo no es posible, se puede implementar un compensador lineal con un elemento de adelanto-atraso de ganancia ajustable para cada entrada y un sumador. El método que se utiliza depende del proceso.

El quinto comentario se refiere a la comparación entre el control feedforward y el control en cascada y el de relación; en las tres técnicas se toma una acción correctiva antes de que la variable controlada se desvíe de la referencia. El control feedforward toma acción correctiva *antes o al mismo tiempo* en que la perturbación entra al proceso. El control en cascada toma acción antes de que la variable controlada primaria sea afectada, pero después de que la perturbación ha entrado al proceso. Los diagramas de bloques de las figuras 11-2.8 y 9-2.2 muestran gráficamente estas diferencias. En la figura 11-2.6 se presenta la implementación del control sólo por feedforward, es decir, sin compensación por retroalimentación. Curiosamente, este esquema es similar al esquema de control de relación mostrado en la figura 10-2.2*a*. El esquema de control de relación no contiene compensación dinámica, pero la estación de relación de la figura 10-2.2*a* proporciona la misma función que el elemento de ganancia de la figura 11-2.6. Por lo tanto, se puede decir que el control de relación es la forma más simple de control feedforward.

Por último, podría ser de utilidad una guía sobre los diferentes pasos a seguir al diseñar una estrategia de control feedforward. Los ocho pasos que se describen a continuación pueden servir como procedimiento de diseño (Corripio, 1990).

Paso 1. Establecer el objetivo de control, es decir, definir la variable que debe ser controlada y cuál es su referencia. El operador debe ajustar la referencia, no debe ser un valor constante.

Paso 2. Enumerar las posibles perturbaciones que se pueden medir. ¿Qué perturbaciones se pueden medir fácilmente? ¿Cuánto y con qué rapidez se espera que varíe cada una de ellas? Tener una idea del costo y el mantenimiento de cada sensor. Saber las respuestas a estas preguntas deberá ayudar a los diseñadores a decidir las perturbaciones que se considerarán las principales y que compensará el controlador feedforward.

Paso 3. Establecer qué variable va a ser manipulada por el controlador feedforward. En un arreglo en cascada, en el que un controlador feedforward está conectado en cascada con un controlador esclavo, la variable manipulada es la referencia del controlador esclavo. Esto tiene sentido, ya que el controlador feedforward manipula la referencia del controlador esclavo. Tal fue el caso presentado en este capítulo.

Paso 4. Ahora todo está listo para diseñar el controlador feedforward. El controlador feedforward consta de dos partes: compensadores de estado estacionario y compensadores dinámicos. Desarrollar primero el compensador de estado estacionario y, específicamente, un compensador no lineal usando principios básicos o una simulación de estado estacionario disponible. El compensador debe ser una ecuación tal que la variable manipulada, identificada en el paso 3, pueda calcularse a partir de las perturbaciones medidas, identificadas en el paso 2, y del objetivo de control (referencia), identificado en el paso 1. Mantener la ecuación tan simple como sea posible. Si no es posible desarrollar el compensador de estado estacionario no lineal con ninguno de los métodos descritos, usar entonces el procedimiento de prueba escalón desarrollado en la sección 11-2.

Paso 5. En este punto es posible reevaluar la lista de perturbaciones. Si se ha desarrollado un compensador no lineal, éste puede ayudar en la reevaluación. El efecto de una perturbación sobre la variable controlada se puede calcular con la ecuación. En la ecuación quizá aparezca una perturbación que no estaba en la lista inicial y que puede ser importante. La decisión final acerca de cuál perturbación se va a compensar utilizando control feedforward depende de su efecto sobre la variable controlada, de la frecuencia y la magnitud de la variación, y del costo de capital y mantenimiento del sensor. Las perturbaciones no medidas se pueden tratar como constantes en su valor de estado estacionario o en su valor esperado.

Paso 6. Introducir la compensación por retroalimentación. La manera en que se introduce la retroalimentación depende del significado físico asignado a la señal de retroalimentación.

Paso 7. Decidir si se requiere compensación dinámica, adelanto-atraso y/o tiempo muerto, y decidir cómo se va a introducir en el diseño.

Paso 8. Trazar el diagrama de instrumentación para la estrategia de control feedforward. El nivel de detalle del diagrama depende en gran medida del sistema de control que se utilice. Un buen diseño debe ser capaz de continuar operando con seguridad cuando alguna de sus mediciones de entrada falla. Esta característica del diseño se conoce como una "degradación elegante".

11-7 OTROS TRES EJEMPLOS

Ejemplo 11-7.1 En este ejemplo se presenta el control del proceso mostrado en la figura 11-7.1. El proceso es similar al que se examinó en la sección 11-2; sin embargo, se presentan las suficientes diferencias para requerir un controlador feedforward distinto, sobre todo en su compensación dinámica. En la tabla 11-7.1 se presentan los datos de estado estacionario y otra información. Se desea mantener la composición de salida $x_6(t)$ del componente A con una fracción másica de 0.472. Cualquier flujo o composición que entre al proceso es una posible perturbación. Sin embargo, la experiencia operacional indica que el flujo de la corriente 2, $f_2(t)$, es la principal perturbación; la corriente puede duplicar su flujo de 1000 a 2000 gpm casi instantáneamente. Esta perturbación ocurre cuando otra corriente de proceso aguas arriba se pone en línea. El flujo de agua, $f_1(t)$, es la variable manipulada.

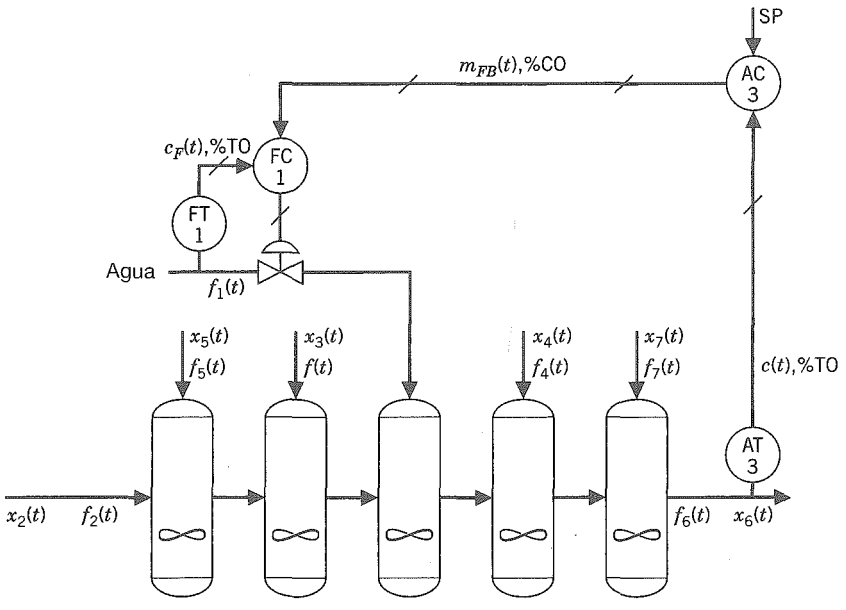


Figura 11-7.1 Proceso de mezclado para el ejemplo 11-7.1.

En la figura 11-7.2 se muestra la respuesta del proceso a la perturbación antes mencionada cuando se utiliza el control por retroalimentación. Esta respuesta muestra que $x_6(t)$ se desvía de su referencia de 0.472 mf a 0.487 mf, un cambio de 3.18%; sin embargo, este proceso requiere un control de calidad más riguroso. Puede usarse el control feedforward para minimizar el efecto de la perturbación.

Se han completado ya los tres primeros pasos del procedimiento de diseño descrito en la sección anterior. Es decir, se ha establecido el objetivo de control (paso 1), se han enumerado las perturbaciones y se ha elegido la principal (paso 2), y se ha establecido la variable manipulada (paso 3). Se procede ahora al diseño del controlador feedforward (paso 4).

El diagrama de bloques para este proceso es idéntico al que se ilustra en la figura 11-2.8. Como se vio en las secciones anteriores, es necesario determinar las funciones de transferencia G_D y G_M para diseñar el controlador feedforward. G_D se determina haciendo un cambio escalón en $f_2(t)$ y registrando $x_6(t)$. Usando este procedimiento se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$G_D = \frac{0.014e^{-2.2s}}{3.6s+1}, \qquad \frac{\%\text{TO}}{\text{gpm}} \tag{11-7.1}$$

G_M se determina haciendo un cambio escalón en la salida del controlador y registrando $x_6(t)$. Se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$G_M = \frac{-1.065e^{-1.2s}}{3.15s+1}, \qquad \frac{\%\text{TO}}{\%\text{CO}} \tag{11-7.2}$$

Tabla 11-7.1 Información del proceso y valores de estado estacionario para el ejemplo 11-7.1

Información
Rango del transmisor de concentración: 0.3-0.7 fracción másica. Su dinámica se puede describir por una constante de tiempo de 0.1 min.
La caída de presión a través de la válvula se puede considerar constante y el flujo máximo que proporciona la válvula es de 8000 gpm. La dinámica de la válvula se puede describir por una constante de tiempo de 0.1 min.
La densidad de todos los caudales también se considera similar y constante.

Valores de estado estacionario

Caudal	Flujo, gpm	Fracción másica
1	3983	0.000
2	1000	0.990
3	1100	0.850
4	1500	0.875
5	500	0.800
6	8483	0.472
7	500	0.900

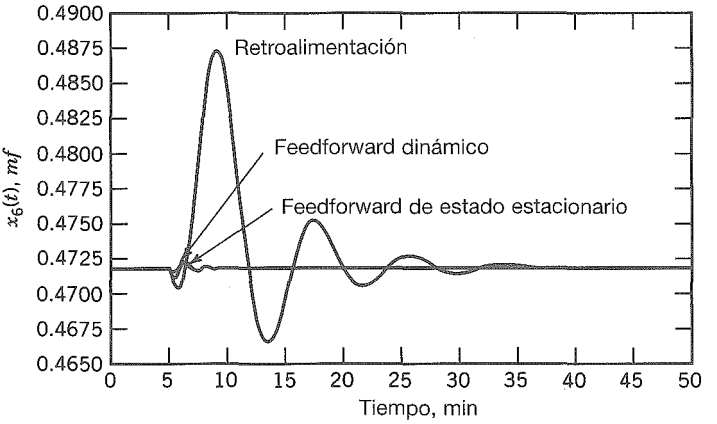


Figura 11-7.2 Respuesta del proceso bajo control por retroalimentación, control feedforward no lineal de estado estacionario y control feedforward dinámico (sólo tiempo muerto) —$f_2(t)$ cambió de 1000 a 2000 gpm.

Debido a que el transmisor de flujo para $f_2(t)$ tiene un rango de 0 a 3000 gpm y tiene una dinámica despreciable, su función de transferencia está dada por

$$H_D = 0.0333\frac{\%\text{TO}_D}{\text{gpm}} \tag{11-7.3}$$

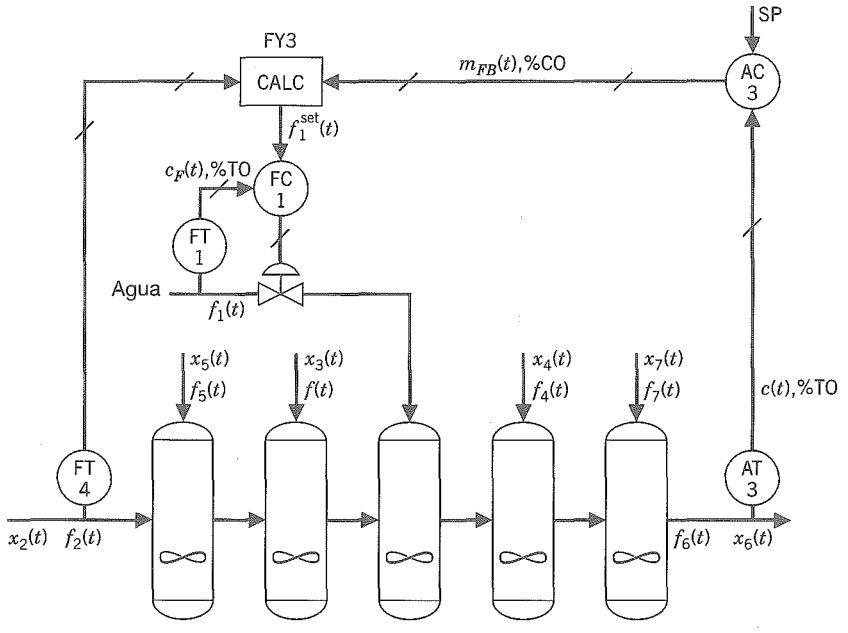


Figura 11-7.3 Implementación del control feedforward.

Usando las ecuaciones 11-7.1, 11-7.2 y 11-7.3, se diseña el siguiente controlador feedforward

$$\text{FFC} = 0.395\left(\frac{3.15s+1}{3.60s+1}\right)e^{-1.0s} \tag{11-7.4}$$

Aun cuando se cuenta con el compensador de estado estacionario (0.395) obtenido en la prueba del proceso, a continuación se desarrolla un compensador de estado estacionario no lineal a partir de principios básicos. Este compensador, en unidades de ingeniería, es

$$f_1(t) = \frac{1}{x_6^{\text{set}}(t)}[3012.5 + 0.99 f_2(t)] - 3500 - f_2(t) \tag{11-7.5}$$

Se empleará compensación por retroalimentación para ajustar el término $1/x_6^{\text{set}}(t)$ en la ecuación 11-7.5. Escoger cómo se va a introducir la retroalimentación constituye el paso 6 del procedimiento.

El paso 7 requiere decidir la compensación dinámica. En este controlador, los elementos de la compensación dinámica, –el adelanto-atraso y el tiempo muerto– indican que la acción de la variable manipulada debe retrasarse. La relación entre las constantes de tiempo de adelanto y atraso es menor que 1, y el tiempo muerto es positivo. Sin embargo, el término de adelanto-atraso en la ecuación 11-1.24 indica que $\tau_{ld}/\tau_{lg} = 3.15/3.6 = 0.875$. La relación está relativamente cerca de 1 y, aplicando la regla empírica presentada al final de la sección 11-4, puede ignorarse. Además,

el propio tiempo muerto parece no ser muy grande si se compara con las constantes de tiempo. Esto puede dar una indicación de que también puede ignorarse. Como ejercicio, se dejará en el controlador para probar su contribución. En la figura 11-7.3 se muestra la implementación de este controlador feedforward (paso 8). El bloque denominado CALC implementa la ecuación 11-7.5.

En la figura 11-7.2 se compara el desempeño del control proporcionado por retroalimentación, por feedforward con compensación de estado estacionario no lineal y por feedforward con compensación dinámica (de estado estacionario no lineal y con tiempo muerto). Obviamente, la adición del tiempo muerto al controlador feedforward no mejora el desempeño de control en este caso, por lo que puede ignorarse.

Ejemplo 11-7.2 Un proceso que plantea un interesante reto es el control del nivel de líquido en el tambor de una caldera. En la figura 11-7.4 se muestra un esquema del tambor de una caldera. El control del nivel en el tambor es muy importante. Un nivel alto puede resultar en el arrastre de agua líquida, y tal vez impurezas, al sistema de vapor; un nivel bajo puede resultar en una falla de los tubos debido a sobrecalentamiento por falta de agua líquida en las superficies de ebullición.

En la figura 11-7.4 se muestran burbujas de vapor que fluyen hacia arriba a través de los tubos elevadores en el agua; éste es un fenómeno importante. El volumen específico (volumen/masa) de las burbujas es muy grande, por lo que estas burbujas desplazan el agua líquida. Esto resulta en un nivel aparente más alto que el nivel debido únicamente al agua líquida. La presencia de estas burbujas también presenta un problema bajo condiciones transitorias. Considérese la situación en la que la presión en el cabezal de vapor disminuye debido a una demanda mayor de vapor por parte de los usuarios. Esta caída de presión hace que cierta cantidad de agua se convierta en burbujas de vapor. Estas nuevas burbujas tienden a aumentar el nivel aparente en el tambor. La caída de presión también hace que el volumen de las burbujas existentes se expanda, aumentando aún más el nivel aparente. Esta sobrecarga del nivel que resulta de la caída de presión se llama *expansión*. Un aumento en la presión del cabezal de vapor, ocasionado por una disminución en la demanda de vapor por parte de los usuarios, tiene el efecto contrario en el nivel aparente y se llama *contracción*.

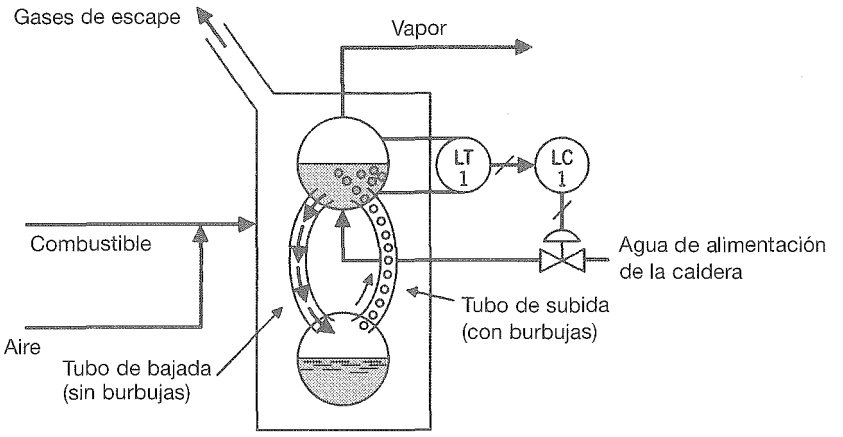


Figura 11-7.4 Control "de un solo elemento" en el tambor de una caldera.

Los fenómenos de expansión/contracción, junto con la importancia de mantener un nivel adecuado, como se explicó anteriormente, hacen que el control del nivel sea aún más crítico. En los párrafos siguientes se desarrollan algunos de los esquemas de control del nivel que se utilizan en la industria.

El control del nivel en el tambor se consigue manipulando el flujo del agua de alimentación. En la figura 11-7.4 se muestra el tipo de control del nivel más sencillo, llamado *control de un solo elemento.* Por lo general se utiliza un sensor-transmisor diferencial de presión estándar. Debido a que este esquema de control se basa únicamente en la medición del nivel en el tambor, esta medición debe ser confiable. Bajo condiciones transitorias frecuentes, el fenómeno de expansión/contracción no produce una medición confiable, por lo que se requiere un esquema de control que compense este fenómeno. El control de un solo elemento es adecuado para calderas que operan con carga constante.

El *control de dos elementos* que se muestra en la figura 11-7.5 es, en esencia, un sistema de control feedforward/retroalimentación. La idea detrás de este esquema es que la razón principal de los cambios de nivel son los cambios en la demanda de vapor y que por cada libra de vapor producido debe entrar al tambor una libra de agua de alimentación; es decir, debe haber un balance de masa. La señal de salida de FT5 proporciona la parte de feedforward del esquema, mientras que LC1 proporciona la compensación por retroalimentación para cualquier flujo no medido, como una purga. El controlador por retroalimentación también ayuda a compensar errores en los medidores de flujo.

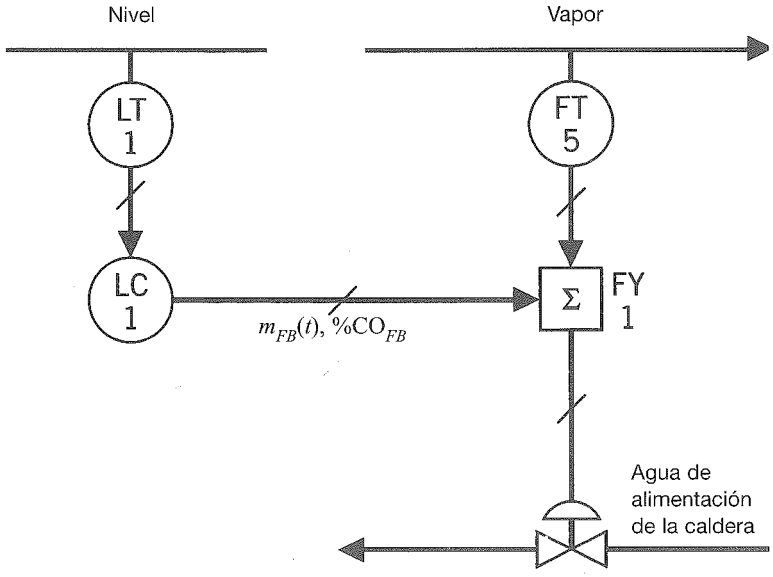


Figura 11-7.5 Control "de dos elementos".

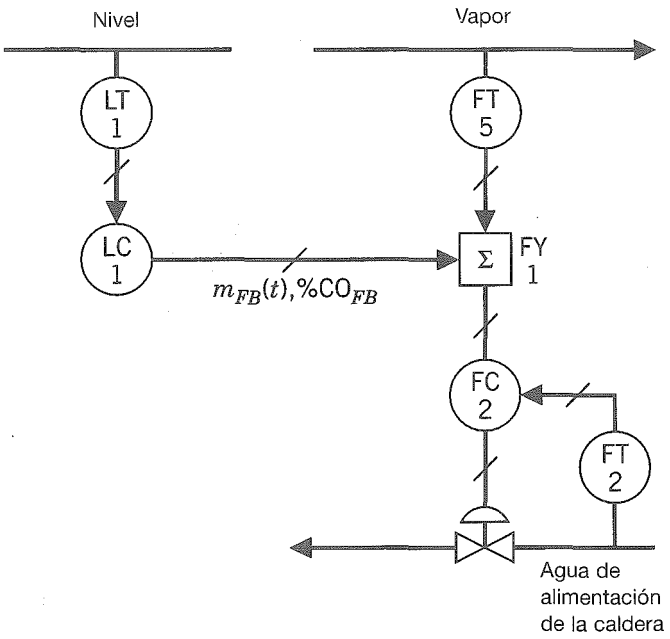


Figura 11-7.6 Control "de tres elementos".

El esquema de control de dos elementos funciona bastante bien en muchos tambores de calderas industriales. Sin embargo, existen algunos sistemas que presentan una caída de presión variable a través de la válvula de alimentación. El esquema de control de dos elementos no compensa directamente esta perturbación y, por consiguiente, altera el nivel en el tambor al modificar de manera transitoria el balance de masa. El esquema de *control de tres elementos*, mostrado en la figura 11-7.6, provee la compensación requerida. Este esquema proporciona un control de balance de masa riguroso durante los estados transientes. Es interesante notar que lo único que se ha agregado al esquema de control de dos elementos es un sistema de control en cascada.

El nivel en el tambor de caldera proporciona un ejemplo realista en el que se usan los esquemas del control en cascada y feedforward para mejorar el desempeño del control por retroalimentación. En este ejemplo en particular, el uso de estos esquemas es casi obligatorio a fin de evitar fallas mecánicas y del proceso. Cada paso tomado para mejorar el control está justificado. En otras circunstancias, no hay necesidad de complicar las cosas.

Ejemplo 11-7.3 Se presenta ahora otro ejemplo industrial que ha probado ser una aplicación exitosa de control feedforward. El ejemplo tiene que ver con el control de temperatura en la sección de rectificación de una columna de destilación. En la figura 11-7.7 se muestra el fondo de la columna y el esquema de control propuesto e implementado originalmente. Esta columna utiliza dos rehervidores. Uno de ellos, R-10B, usa una corriente de proceso condensante como medio de calentamiento, y el otro, R-10A, usa vapor condensante. Para una operación con un uso eficiente de energía, el procedimiento de operación requiere usar la mayor cantidad posible de la corriente de proceso. Esta corriente de todos modos debe condensarse, por lo que sirve de fuente de energía "gratuita". El flujo de vapor se usa para controlar la temperatura en la columna.

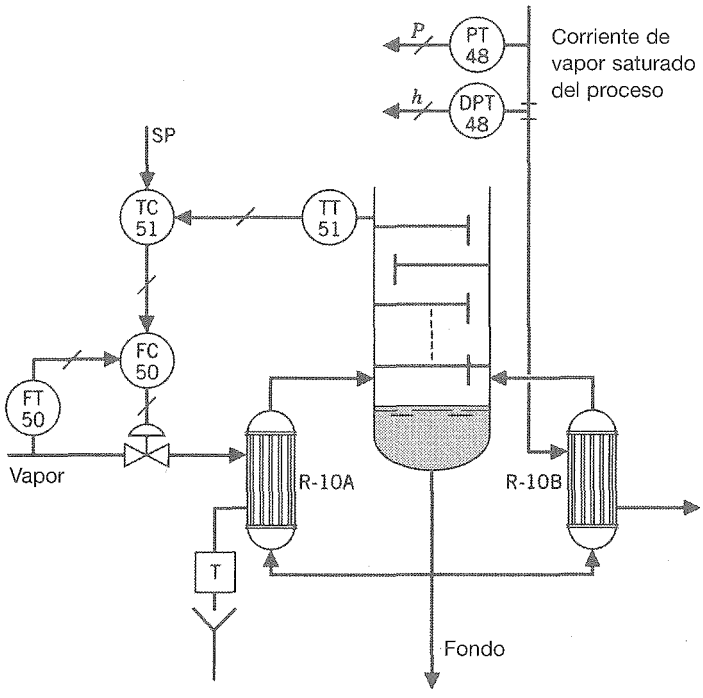


Figura 11-7.7 Control de temperatura en una columna de destilación.

Después del arranque de esta columna, se notó que la corriente de proceso que sirve de medio de calentamiento experimentaba cambios de flujo y presión. Estos cambios actuaban como perturbaciones en la columna y, por consiguiente, el controlador de temperatura tenía que compensarlas de manera continua. Las constantes de tiempo y el tiempo muerto en la columna y los rehervidores complicaban el control de la temperatura. Después de estudiar el problema, se decidió utilizar el control feedforward. Se habían instalado un transmisor de presión y un transmisor de presión diferencial en la corriente de proceso, y a partir de ellos se podía calcular la cantidad de energía emitida por la corriente condensante. Usando esta información también podría calcularse la cantidad de vapor requerida para mantener la temperatura en su referencia y, en consecuencia, se podría tomar una acción correctiva antes de que la temperatura se desviara de la referencia. Se trata de una aplicación perfecta del control por feedforward.

Específicamente, el procedimiento implementado fue el siguiente. Puesto que la corriente del proceso es pura y saturada, la densidad, ρ, sólo es función de la presión. Por lo tanto, la densidad de la corriente se puede obtener usando una correlación termodinámica:

$$\rho = f_1(P) \tag{11-7.6}$$

Usando esta densidad y la presión diferencial, h, obtenida del transmisor DPT48, el flujo másico de la corriente se puede calcular usando la ecuación del orificio

$$\dot{m} = K_o \sqrt{h\rho}, \quad \text{lbm/hr} \tag{11-7.7}$$

donde K_o es el coeficiente del orificio.

Asimismo, conociendo la presión de la corriente y usando otra relación termodinámica, se puede obtener el calor de condensación latente, λ,

$$\lambda = f_2(P) \tag{11-7.8}$$

Por último, multiplicando el flujo másico por el calor latente, se obtiene la energía, q_1, emitida por la corriente de proceso al condensarse:

$$q_1 = \dot{m}\lambda \tag{11-7.9}$$

En la figura 11-7.8 se muestra la implementación de las ecuaciones 11-7.6 a 11-7.9 y el resto del esquema feedforward. El bloque PY48A lleva a cabo la ecuación 11-7.6; el bloque PY48B, la ecuación 11-7.7; el bloque PY48C, la ecuación 11-7.8, y el bloque PY48D, la ecuación 11-7.9. Por lo tanto, la salida del relevador PY48D es q_1, la energía emitida por la corriente de proceso al condensarse.

Para completar el esquema de control, se considera que la salida del controlador de temperatura es la energía total requerida, q_t, para mantener la temperatura en su referencia. Restando q_1 de q_t se obtiene la energía requerida del vapor, q_s,

$$q_s = q_t - q_1 \tag{11-7.10}$$

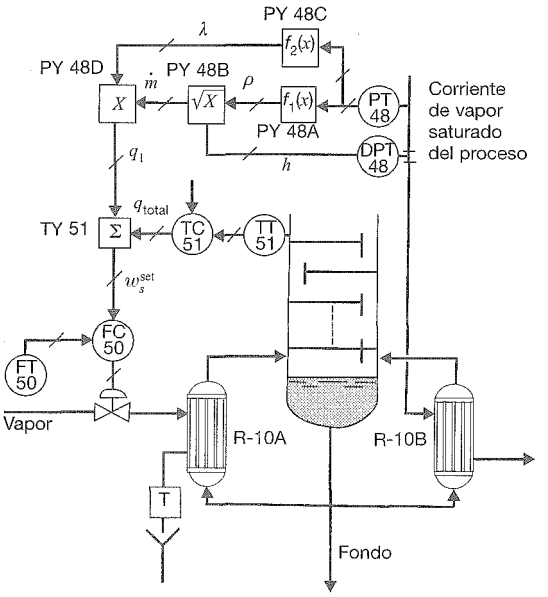


Figura 11-7.8 Implementación de control feedforward.

Finalmente, dividiendo q_s entre el calor latente de condensación del vapor, h_{fg}, se obtiene el flujo de vapor requerido, w_s,

$$w_s = \frac{q_s}{h_{fg}}, \quad \text{lbm/hr} \tag{11-7.11}$$

El bloque TY51 lleva a cabo las ecuaciones 11-7.10 y 11-7.11, y su salida es la referencia del controlador de flujo FC50. En la ecuación 11-7.11 se supone que hfg es constante.

Se deben notar varias cosas en este esquema feedforward. Primero, el modelo del proceso no es una ecuación, sino varias ecuaciones. Este modelo se obtuvo usando varios principios de ingeniería de procesos. Esto hace al control de procesos un área interesante y desafiante. Segundo, la compensación por retroalimentación es una parte integral de la estrategia de control. Esta compensación es q_t o la energía total requerida para mantener la referencia en TC51. Por último, el esquema de control mostrado en la figura 11-7.8 no presenta compensación dinámica. Esta compensación puede instalarse más tarde de ser necesario.

11-8 RESUMEN

En este capítulo se ha presentado a detalle el concepto, diseño e implementación del control feedforward. Se ha demostrado que esta técnica ofrece una mejora considerable sobre el desempeño obtenido con el control por retroalimentación. Sin embargo, sin duda el lector habrá notado que el diseño, la implementación y operación del control feedforward requiere una cantidad significativa de ingeniería, instrumentación extra y capacitación del personal de operación para entender la técnica. Lo anterior significa que el control feedforward es más costoso que el control por retroalimentación y, en consecuencia, su uso debe justificarse. El lector también debe entender que el control feedforward no es la solución a todos los problemas de control. Es otra "herramienta" útil para ayudar en el control por retroalimentación en algunos casos.

Se mostró que el control feedforward se compone, en general, de: a) compensación de estado estacionario, y b) compensación dinámica. No en todos los casos se necesitan ambas compensaciones. La cantidad requerida de cada una depende de cada proceso en particular.

Existen tres métodos para diseñar el compensador de estado estacionario. La mejor manera se basa en principios de ingeniería de procesos, por lo general balances de materia y energía. Las simulaciones de estado estacionario –simuladores de diagramas de flujo– proporcionan otra forma realista de hacerlo. Estos dos métodos se examinaron en la sección 11-5. El método de prueba escalón de procesos presentado en la sección 11-2 ofrece una manera de diseñar un compensador lineal de estado estacionario cuando no se puede utilizar ninguno de los otros dos métodos. El diseño del compensador dinámico, de adelanto-atraso y/o tiempo muerto, requiere información dinámica, la cual se obtiene generalmente mediante pruebas del proceso.

Por último, el lector debe recordar que el control feedforward debe diseñarse con cierta cantidad de compensación por retroalimentación.

REFERENCIAS

1. Dobson, J. G., "Optimization of Distillation Columns Using Feed-Forward Computer Control". Ponencia presentada en Interkama 1960, Duesseldorf, Alemania.
2. Shinskey, F. G., "Feedforward Control Applied", *ISA Journal.*
3. Corripio, A. B., *Tuning of Industrial Control Systems,* Instrument Society of America, Carolina del Norte.

PROBLEMAS

11-1. Considérese el proceso del problema 10-1. Pocas semanas después de que el sistema de control de relación se puso en operación, el personal operativo notó que la concentración de la solución de salida variaba un poco de vez en cuando; se sospecha que la concentración de la solución al 50% es la culpable. Debido a que es importante controlar la concentración de la solución de salida al 30%, es necesario contar con un control más riguroso. Diseñar un controlador feedforward basado en principios de ingeniería de procesos para compensar el flujo y la composición de la solución de NaOH al 50%. Hay un analizador disponible con un rango de 55% a 60% que podría usarse en esa corriente.

11-2. Considérese el secador de horno que se muestra en la figura P11-1. Se alimenta una lechada en el secador y se pone en contacto directo con los gases de la combustión de combustible y aire. El contacto del sólido con los gases calientes evapora el agua, y esos gases calientes proporcionan la vaporización. Se desea manipular el flujo del combustible que entra al secador a fin de mantener el contenido de humedad de salida del sólido en su referencia. Las principales perturbaciones son el flujo de alimentación de lechada, $w_i(t)$, su contenido de humedad, $x_i(t)$ y el valor calorífico del gas combustible. De ellas, sólo se puede medir el flujo de alimentación y su contenido de humedad, como se muestra en la figura. El contenido de humedad de salida del sólido, $x_o(t)$, también se puede medir. Las condiciones de diseño y los parámetros del proceso son

Flujo de alimentación de lechada:	100 lb/h
Composición de alimentación de la lechada:	0.60 fracción másica de agua
Contenido de humedad de salida deseado:	0.05 fracción másica de agua
Flujo de diseño del gas combustible:	80 scfh

Las señales de los transmisores de flujo son lineales con respecto al flujo y se compensan para temperatura y presión. Diseñar un controlador feedforward con ajuste de retroalimentación para el secador; usar el software de la tabla 10-1.2 para la implementación. Especificar qué perturbaciones se miden, cuál es el objetivo de control y cuál es la variable manipulada. Deducir la siguiente ecuación combinando el balance total y el balance de materia del agua en el secador

$$w_i(t)x_i(t) = [w_i(t) - k_v f_g(t)]x_o(t) + k_v f_g(t)$$

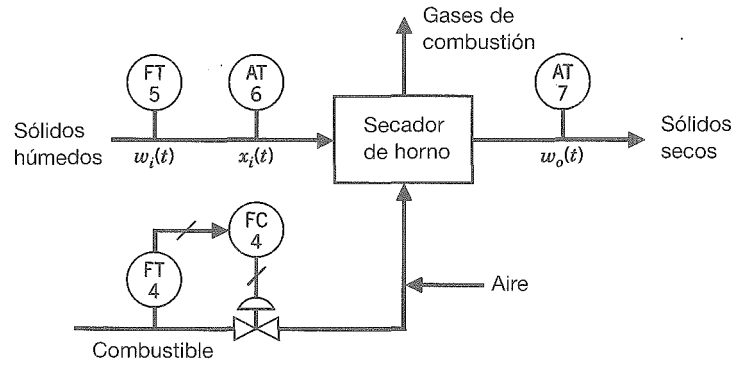


Figura P11-1 Secador de horno para el problema 11-2.

donde $f_g(t)$ es el flujo de gas combustible en scfh y k_v representa las libras de agua que vaporiza scf de gas combustible. Especificar cómo se planea introducir la compensación dinámica y el ajuste por retroalimentación en caso de ser necesarios.

11-3. Se desea diseñar un controlador feedforward sencillo lineal para compensar el efecto de los cambios en la tasa de alimentación de una columna de destilación sobre la composición del producto de tope. Es necesario manipular el reflujo a fin de controlar la composición del producto de tope. Se aplican dos pruebas escalón a la columna, una para la tasa de alimentación y una para la referencia del reflujo; en cada caso, la respuesta de la composición del producto de tope se registra y se analiza. Los resultados de las pruebas se resumen en la siguiente tabla:

Prueba escalón en:	Ganancia del proceso, % TO (klb/h)	Constante de tiempo, min	Tiempo muerto, min
Tasa de alimentación, klb/h	0.8	18.0	8.0
Reflujo, klb/h	1.2	4.0	1.0

El transmisor del flujo de alimentación se ha calibrado en un rango de 0 a 50 klb/h y el transmisor de reflujo tiene un rango de 0 a 100 klb/h. Ambos transmisores generan señales que son lineales con respecto al flujo.

Trazar un diagrama de bloques que muestre el efecto de la tasa de alimentación y el reflujo sobre la composición del producto de tope. Aproximar las funciones de transferencia con modelos de primer orden más tiempo muerto y mostrar los valores numéricos de todos los parámetros. Usando el diagrama de bloques, diseñar un controlador feedforward lineal para compensar la perturbación en la alimentación en el objetivo de control. Trazar un diagrama de instrumentación para el controlador feedforward diseñado usando: a) el bloque de la tabla 10-1.1, y b) el software de la tabla 10-1.2. Incluir el ajuste por retroalimentación, suponiendo que un analizador en línea está instalado en la corriente del producto de tope.

11-4. Diseñar un controlador feedforward para compensar el flujo de alimentación y la temperatura del tanque calentador con agitación continua del ejemplo 6-1.1. Suponer que el transmisor de flujo de alimentación tiene un rango de 0 a 25 ft^3/min y una constante de tiempo despreciable, y que el transmisor de temperatura de entrada tiene un rango de 60° a 120°F y una constante de tiempo de 0.6 min. Identificar el objetivo de control, las perturbaciones y la variable manipulada. Determinar las correcciones necesarias en el flujo de vapor para los cambios esperados en las perturbaciones: un cambio de 10 ft^3/min en el flujo de alimentación y de 20°F en la temperatura de alimentación. Analizar la necesidad de un ajuste por retroalimentación y cómo incorporarlo en el diseño. Analizar asimismo la necesidad y la forma de una compensación dinámica. Trazar el diagrama de instrumentación del diseño elaborado.

11-5. Considérese el esquema de control para el sistema de secado de sólidos mostrado en la figura P11-2. La principal perturbación en este proceso es el contenido de humedad de los sólidos de entrada. La respuesta del sistema de control a esta perturbación es muy lenta. Se desea implementar un sistema feedforward para mejorar este control. Después de cierta cantidad de trabajo preliminar, se obtienen los datos que se enlistan al inicio de la página siguiente.

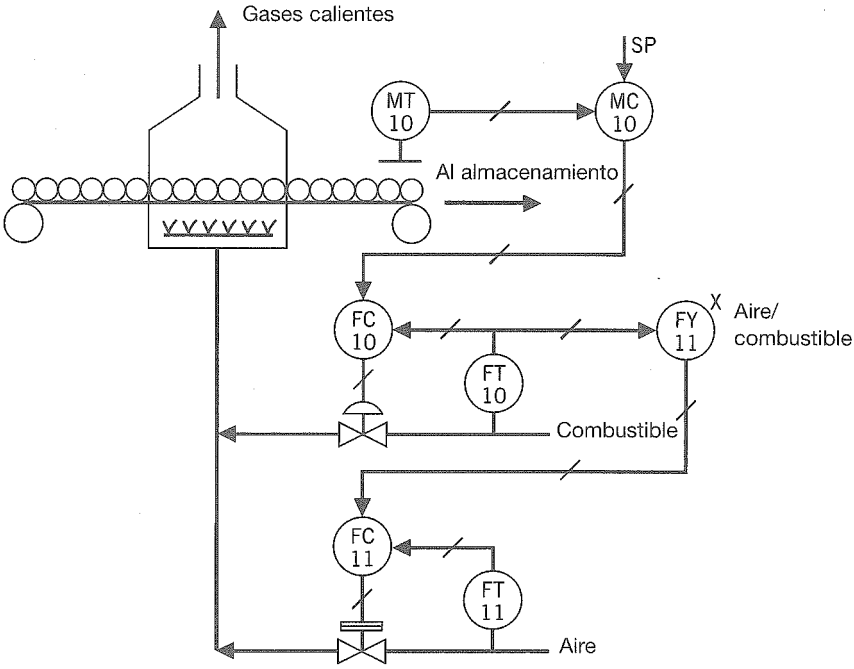


Figura P11-2 Secador para el problema 11-5.

Cambio escalón en la humedad de entrada = +2%

Tiempo, min	Humedad de salida, %	Tiempo, min	Humedad de salida, %
0	5.0		
0.5	5.0	5.0	6.6
1.0	5.1	5.5	6.7
1.5	5.2	6.0	6.8
2.0	5.4	6.5	6.9
2.5	5.7	7.0	7.0
3.0	5.9	7.5	7.0
3.5	6.1	8.0	6.9
4.0	6.3	8.5	7.0

Cambio escalón en la señal de salida del controlador de humedad, MC-10 = +25 %CO

Tiempo, min	Humedad de salida, %	Tiempo, min	Humedad de salida, %
0	5.0	5.0	3.81
0.5	5.0	5.5	3.70
1.0	4.95	6.0	3.55
1.5	4.93	6.5	3.45
2.0	4.85	7.0	3.35
2.5	4.70	7.5	3.25
3.0	4.60	8.5	3.10
3.5	4.40	9.5	3.03
4.0	4.20	11.5	3.00

El analizador de humedad en la retroalimentación tiene un rango de 1% a 7% de humedad. Hay otro analizador con un rango de 10% a 15% del contenido de humedad que puede utilizarse para medir la humedad de entrada. Estos analizadores se han usado antes en este proceso particular y han demostrado ser confiables. Identificar el objetivo de control, las perturbaciones y la variable manipulada.

a) Con base en principios de ingeniería de procesos (balances de materia, balances de energía, etc.), desarrollar un esquema de control feedforward. En el enunciado del problema no se ha proporcionado toda la información necesaria. Suponer que es posible obtener esta información de los archivos de la planta. Mostrar la imple-

mentación de este esquema usando el bloque de la tabla 10-1.1 y el software de la tabla 10-1.2.

b) Trazar un diagrama de bloques completo para este proceso que muestre el efecto de la humedad de entrada sobre la variable controlada. Incluir todas las funciones de transferencia conocidas.

c) Desarrollar un esquema de control feedforward usando el enfoque de diagramas de bloques. Mostrar la implementación de este esquema, incluyendo el ajuste por retroalimentación, usando el bloque de la tabla 10-1.1 y el software de la tabla 10-1.2.

11-6. Considérese el filtro de vacío presentado en el problema 7-15. Usando la información dada en ese problema, diseñar un esquema de control feedforward/retroalimentación para compensar los cambios en la humedad de entrada. Se puede suponer que hay un transmisor de humedad con un rango de 60% a 95% de humedad disponible. Mostrar la implementación completa utilizando los bloques de cálculo de la tabla 10-1.1. Identificar los ocho pasos descritos en la sección 11-6.

11-7. Considérese el sistema evaporador del problema 7-20. Diseñar un esquema de control feedforward/retroalimentación para compensar los cambios en la composición de la solución que entra al primer efecto. El sensor para medir la composición de entrada tiene un rango de 0% a 20% de azúcar. Los datos proporcionados en el problema son suficientes para diseñar un controlador feedforward lineal. También se sabe que la evaporación total en ambos efectos es aproximadamente de 1.8 lb de agua evaporada por lb de vapor. Empleando esta información, diseñar también un controlador feedforward no lineal. Usar los bloques de cálculo de la tabla 10-1.1 para implementar el esquema. Identificar los ocho pasos descritos en la sección 11-6.

11-8. Considérese el proceso mostrado en el problema 7-22 para el secado de roca fosfórica. Como se mencionó en el problema, una perturbación importante para el proceso es la humedad de entrada de las rocas. Utilizando la información dada, diseñar un esquema de control feedforward/retroalimentación para compensar esta perturbación. Hay un transmisor de humedad disponible para medir la humedad de entrada. Este transmisor tiene un rango de 12% a 16% de humedad. Usar los bloques de cálculo de la tabla 10-1.1. Identificar los ocho pasos descritos en la sección 11-6.

11-9. Diseñar un controlador feedforward para regular la temperatura de salida del horno ilustrado en la figura P11-3. El controlador debe compensar las variaciones en la tasa de alimentación y la temperatura de alimentación. Usar el software de la tabla 10-1.2. Se conoce la siguiente información: calor específico del gas, C_p = 0.26 Btu/lbm-°F; poder calorífico del combustible = 980 Btu/scf; temperatura del gas de entrada: T_i = 90°F; temperatura del gas de salida: T_0 = 850°F; eficiencia del horno = 0.75; rango de FT42: 0 a 20 000 lb/h; rango de TT42: 50° a 120°F.

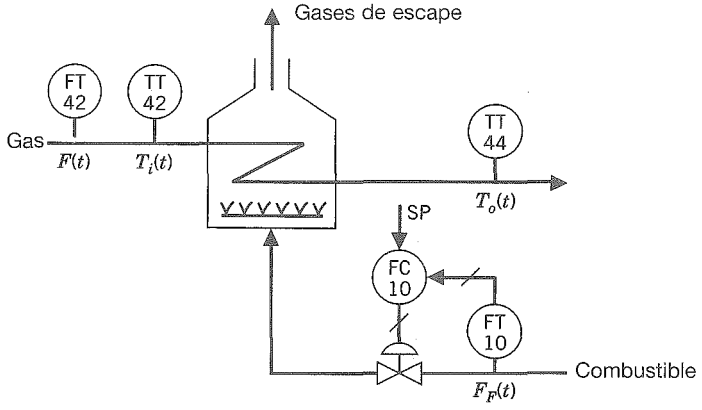


Figura P11-3 Horno para el problema 11-9.

11-10. Supóngase que en el problema 11-9 no se conocen algunos de los datos del proceso del horno, como el calor de combustión o el calor específico del gas. Por lo tanto, es necesario diseñar un controlador feedforward usando el enfoque de diagramas de bloques. Se obtienen los siguientes datos a partir de pruebas escalón en el horno:

Variable	Cambio escalón	Cambio en T_0, °F	Constante de tiempo, min	Tiempo muerto, min
F	750 lbm/h	38	0.30	0.10
T_i	10°F	7.5	0.10	0.40
F_F^{set}	5% del rango	20	0.95	0.15

a) Trazar el diagrama de bloques completo, incluyendo todas las funciones de transferencia.
b) Diseñar el controlador feedforward para compensar las variaciones en la tasa de alimentación y en la temperatura de alimentación. Incluir el compensador dinámico.
c) Si se decide compensar sólo una de las perturbaciones, ¿cuál sería y por qué?, ¿cómo se modificaría el diseño elaborado?

11-11. Para la sección de agotamiento de la columna de destilación mostrada en la figura P11-4, el objetivo es mantener la pureza del fondo en un valor deseado. Este objetivo se suele conseguir controlando la temperatura de uno de los platos (se supone que la presión en la columna es constante) mediante el uso del flujo de vapor al rehervidor como la variable manipulada. Una perturbación "importante" común es el flujo de alimentación a la columna.

a) Trazar un esquema de control feedforward/retroalimentación para compensar esta perturbación; describirlo brevemente.
b) Describir brevemente las pruebas dinámicas que se realizarían en la columna para sintonizar el controlador por retroalimentación y el controlador feedforward. ¿Se esperaría que la compensación dinámica en el controlador feedforward sea un adelanto neto o un atraso neto?

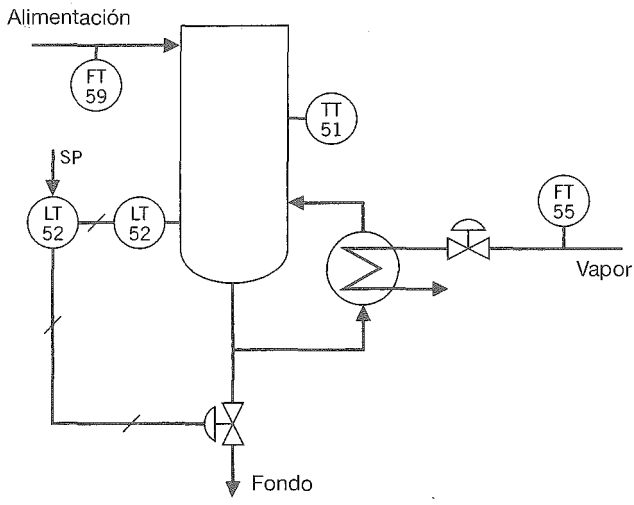


Figura P11-4 Columna de destilación para el problema 11-11.

11-12. Considérese el proceso de secado que se muestra en la figura P11-5. En este proceso, el papel mojado se seca para generar el producto final. El secado se hace usando aire caliente; este aire se calienta en un calentador donde se quema combustible para proporcionar la energía. La variable controlada es la humedad del papel que sale del secador. En la figura P11-5 se muestra el esquema de control propuesto e instalado originalmente.

a) Pocas semanas después de la puesta en operación, el ingeniero de procesos notó que aun cuando el controlador de humedad estaba manteniendo la humedad dentro de ciertos límites alrededor de la referencia, las oscilaciones eran mayores que las deseadas. Luego de buscar las posibles causas y asegurarse de que el controlador de humedad estaba bien sintonizado, se encontró que la temperatura del aire que salía del calentador variaba más de lo que se había supuesto durante la etapa de diseño. Estas variaciones se atribuyeron a los cambios diarios en la temperatura ambiente y a posibles perturbaciones en la cámara de combustión del calentador. Diseñar un esquema de control para mantener la temperatura del aire caliente en el valor deseado para ayudar a mantener la humedad en su referencia.

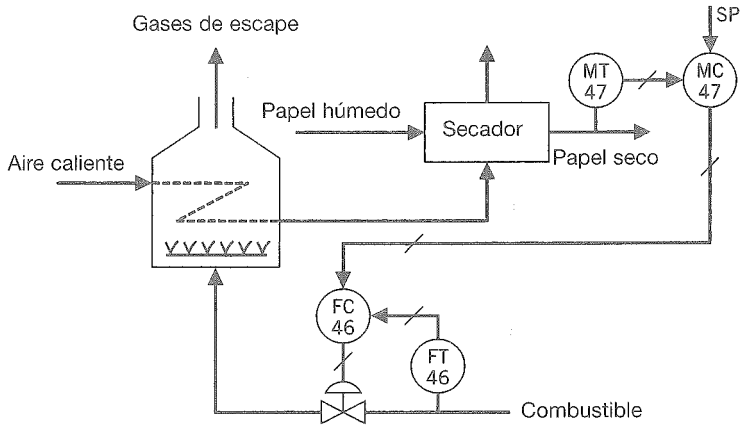


Figura P11-5 Secador de papel húmedo para el problema 11-12.

b) El esquema de control recién descrito mejoró de manera significativa el control de humedad. Semanas más tarde, sin embargo, los operadores se quejaron de que de vez en cuando la humedad se apartaba considerablemente de la referencia, aunque en última instancia el esquema de control la llevaba de nuevo a la referencia. Esta perturbación requería el reprocesamiento del papel producido durante este periodo, por lo que representaba una pérdida de producción. Después de revisar los registros de producción, los ingenieros de proceso descubrieron que los cambios en la humedad de entrada eran la causa de esta perturbación. Diseñar un esquema de control feedforward que compense estas perturbaciones. Hay un transmisor de humedad disponible con un rango de 5% a 20% de humedad para medir la humedad de entrada.

11-13. El proceso que se muestra en la figura P11-6 se usa para vaporizar cierto líquido A. Dos vaporizadores, V-101 y V-102, se utilizan para este propósito. El fluido de calentamiento en V-101 es un gas residual, el cual se puede medir pero no controlar; en V-102 se usa vapor como fluido de calentamiento. Es necesario controlar la presión en el cabezal de vapor. También es necesario mantener el nivel del líquido A por encima de la superficie de calentamiento en cada vaporizador.

a) Diseñar un sistema para controlar la presión en el cabezal del vapor y el nivel en los vaporizadores.
b) La experiencia operacional ha demostrado que el flujo de gas residual, y algunas veces su temperatura, varía lo suficiente para hacer fluctuar de manera significativa la presión en el cabezal. El ingeniero de producción se pregunta si se puede hacer algo para minimizar las fluctuaciones de la presión. Proponer un sistema de control para lograr este control.

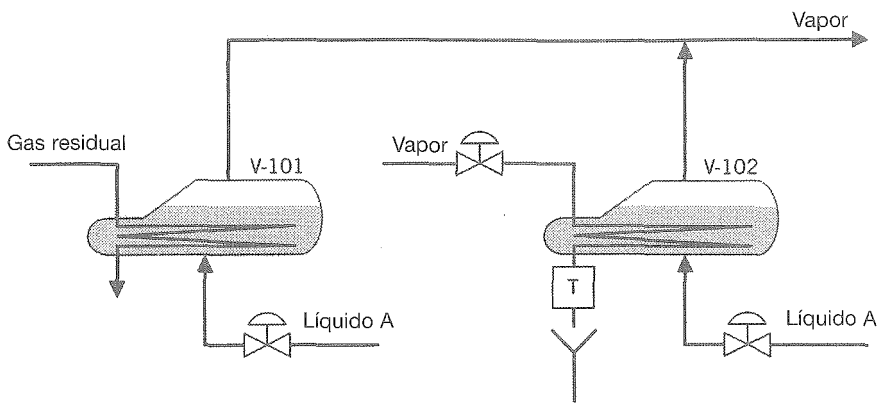


Figura P11-6 Vaporizadores para el problema 11-13.

11-14. La "conocida" reacción A + B → C ocurre en el reactor que se muestra en la figura P11-7. Esta reacción no libera ni requiere energía. Dos corrientes se mezclan y entran al reactor. La corriente 1 es A pura y la corriente 2 es principalmente B con cantidades variables de A. El esquema de control original requiere controlar la tasa de reacción manipulando el flujo de la corriente 2. El análisis del producto, la concentración de C en la corriente del producto, manipula el flujo de la corriente 1; la figura muestra este esquema de control. Después de la puesta en marcha de esta unidad, se notó que la concentración de producto se desviaba de manera significativa de su referencia una o dos veces por tanda. Un analizador, AT-03, del componente A en la corriente 2 indicó que, unos segundos antes que ocurriera esta desviación en la concentración del producto, también había ocurrido un cambio en la concentración de la corriente 2. Además, el

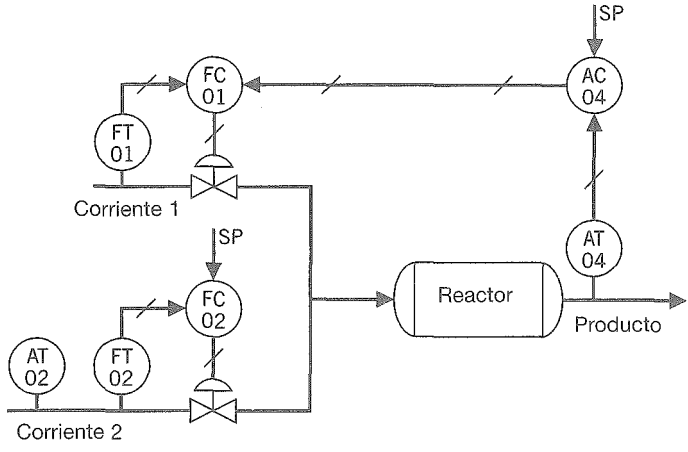


Figura P11-7 Reactor para el problema 11-14.

departamento de investigación indicó que si está presente mucho reactivo A durante la reacción, éste puede comenzar a reaccionar con el producto C, reduciendo la cantidad de C en la corriente del producto. En consecuencia, el departamento de producción ha contactado al lector, el "conocido" ingeniero de control, para posibles ideas de cómo mantener un control más riguroso de la concentración del producto. Los rangos de los transmisores son:

FT-01:0 – 800 lb/hr; FT-02:0 – 300 lb/hr;
AT-03:0 – 0.3 fracción másica

Diseñar un esquema de control que proporcione el desempeño de control solicitado por el departamento de producción.

11-15. El problema 10-9 describe un horno con dos secciones y una sola chimenea. Con referencia a ese proceso, si el flujo de hidrocarburos cambia, la temperatura de salida se desviará de su referencia y el controlador por retroalimentación tendrá que reaccionar para llevar la temperatura de nuevo a su referencia. Esto parece algo natural para el control feedforward. Diseñar esta estrategia para cada sección.

11-16. Comentar cómo afecta la adición de feedforward lineal a la estabilidad de un sistema de control.

Capítulo 12

Control de procesos multivariable

Hasta este punto en el estudio del control automático de procesos se han considerado solamente procesos con un solo objetivo de control o variable controlada. Sin embargo, a menudo se encuentran procesos en los que es necesario controlar más de una variable, es decir, con objetivos de control múltiples. En tales procesos, aún se puede considerar cada objetivo de control separado de los otros, siempre y cuando no interactúen entre sí. En este capítulo se estudiarán y diseñarán sistemas de control para procesos en los cuales varios objetivos de control interactúan entre sí. Se hará referencia a estos sistemas como *sistemas de control multivariable* o *sistemas de control de entrada múltiple, salida múltiple* (*MIMO*, por sus siglas en inglés). El problema que se enfrentará será el de la *interacción del lazo.* Se encontrará que la respuesta y la estabilidad del sistema multivariable pueden ser muy diferentes de las de los lazos constituyentes tomados por separado. Se aprenderá cómo parear las variables controladas y las manipuladas para minimizar el efecto de interacción, y cómo diseñar desacopladores que reducen o eliminan el efecto de interacción.

12-1 INTERACCIÓN DEL LAZO

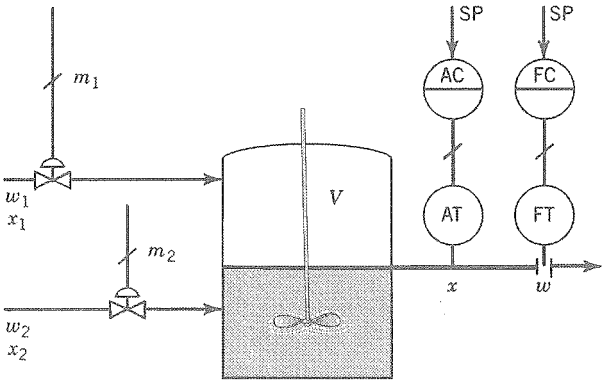
En la figura 12-1.1 se muestran varios ejemplos de sistemas de control multivariable. Para el tanque de mezclado de la figura 12-1.1*a* es necesario controlar tanto el flujo como la composición en la corriente de salida. Para cumplir este objetivo se manipula el flujo de cada una de las corrientes de entrada. En la figura 12-1.1*b* se muestra un reactor químico para el que es necesario controlar la temperatura y la composición de salida. Las variables manipuladas en este proceso son el flujo del agua de enfriamiento y el flujo de proceso. En el evaporador de la figura

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

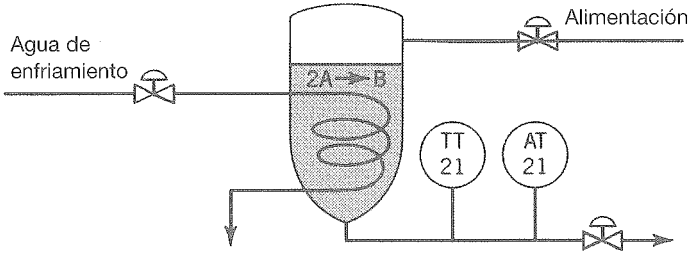
12-1.1*c* el nivel, el flujo de proceso y la composición de salida se controlan mediante la manipulación del flujo de vapor, de entrada y de salida. En la figura 12-1.1*d* se muestra una máquina de secado de papel en la cual las variables controladas son la humedad y el peso en base seca (fibras por unidad de área) del producto final. Las dos variables manipuladas son el flujo de suministro a la máquina y el flujo de vapor hacia el último grupo de tambores calentados. Por último, en la figura 12-1.1*e* se describe una columna de destilación típica con las variables controladas necesarias: presión de la columna, composición de los productos y los niveles en el acumulador y en la base de la columna. Las cinco variables manipuladas son el flujo de refrigerante que llega al condensador, el flujo de destilados, el flujo de reflujo, el flujo del fondo y el flujo de vapor que llega al recalentador.

Todos los anteriores son ejemplos de procesos con objetivos de control múltiples que interactúan entre sí, el control de los cuales puede resultar bastante complejo y desafiante para el ingeniero de procesos. Por lo general hay tres preguntas que el ingeniero debe hacerse cuando se enfrenta con un problema de control de este tipo:

1. ¿Cuál es el efecto de la interacción sobre la respuesta de los lazos de retroalimentación?
2. ¿Qué tanta interacción existe entre los lazos y cuál es la mejor forma de parear las variables controladas y las manipuladas para reducir el efecto de interacción?



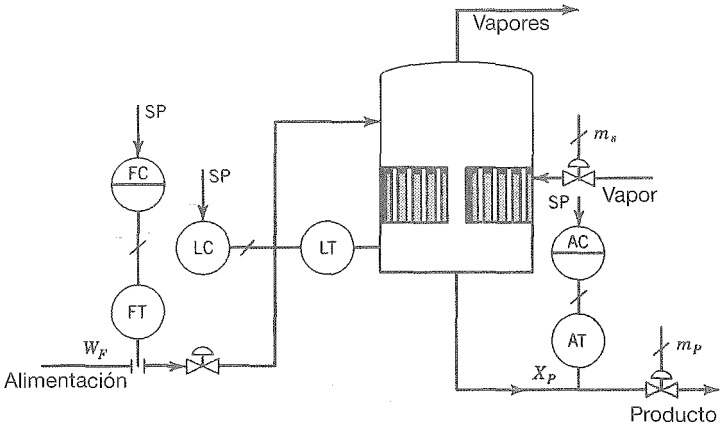
(*a*)



(*b*)

Figura 12-1.1 Ejemplos de sistemas de control multivariable.
(*a*) Tanque de mezclado.

Figura 12-1.1 (***Continuación***)
(*b*) Reactor químico.



(c)

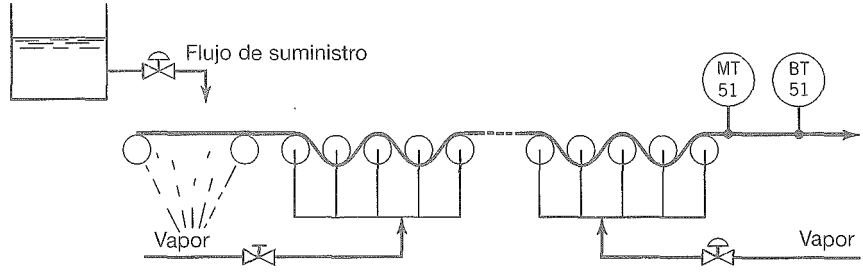
Figura 12-1.1 (*Continuación*) (*c*) Evaporador.

3. ¿Es posible reducir o eliminar la interacción entre los lazos mediante el diseño de un sistema de control apropiado?

Se aborda a continuación la primera de estas preguntas. Las otras dos preguntas se abordan en otras secciones de este capítulo.

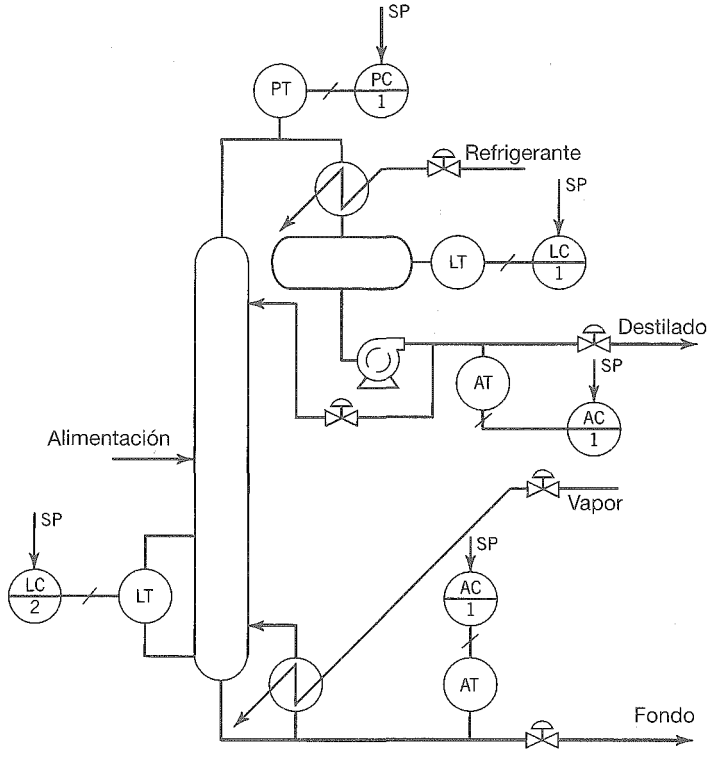
Para entender el efecto de interacción, se considera el tanque de mezclado de la figura 12-1.1*a*. Digamos que, en condiciones de diseño, en el tanque se disuelve una solución que contiene 10% en peso de sal con una solución concentrada que contiene 35% en peso de sal para producir 100 lb/h de una solución que contiene 20% en peso de sal. Los balances de estado estacionario de la masa total y de la masa de sal en el tanque resultan en las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 \\ wx &= w_1 x_1 + w_2 x_2 \end{aligned} \tag{12-1.1}$$



(*d*)

Figura 12-1.1 (*Continuación*) (*d*) Máquina para secar papel.



(e)

Figura 12-1.1 (*Continuación*) (*e*) Columna de destilación.

donde w es el flujo de la corriente en lb/h, x es la fracción másica de sal en cada corriente, y los subíndices denotan las dos corrientes de entrada. En condiciones de diseño, $\overline{w} = 100$ lb/h, $\overline{x} = 0.20$, $\overline{x}_1 = 0.1$ y $\overline{x}_2 = 0.35$, al resolver la ecuación 12-1.1 se obtienen los flujos requeridos de entrada $\overline{w}_1 = 60.0$ lb/h y $\overline{w}_2 = 40.0$ lb/h.

Para mostrar cómo la interacción entre los lazos afecta los parámetros de respuesta de cada lazo, específicamente la ganancia, se considera tan sólo el lazo de control de composición y se supone que su variable manipulada es la corriente concentrada, por ejemplo la corriente 2. Para obtener la ganancia del lazo para este arreglo, se aplica un cambio pequeño en la variable manipulada, por ejemplo, un incremento de 2.0 lb/h en w_2 a 42.0 lb/h. Por la ecuación 12-1.1 se encuentra que la composición del producto se incrementa a 20.3% en peso de sal, resultando en la siguiente ganancia de estado estacionario:

$$K_{x2} = \frac{20.3 - 20.0}{42.0 - 40.0} = 0.15 \frac{\%\ \text{sal}}{\text{lb/h}}$$

donde K_{x2} es la ganancia del flujo de la corriente 2 en % en peso de sal en la corriente del producto. Al mismo tiempo, el flujo total se incrementa a 60.0 + 42.0 = 102.0 lb/h.

Considérese ahora el sistema de control de la figura 12-1.2 donde el flujo del producto se controla manipulando el flujo de la corriente de entrada diluida, w_1. Con este esquema, cuando el flujo de la corriente 2 se incrementa de 40.0 a 42.0 lb/h, el controlador de flujo del producto disminuye el flujo de la corriente diluido a 58.0 lb/h, para mantener el flujo de producto en 100.0 lb/h. Resolviendo la ecuación 12-1.1 para estas condiciones, se encuentra que la composición del producto se incrementa ahora a 20.5% en peso de sal. La ganancia del lazo de composición del producto es:

$$K'_{x2} = \frac{20.5 - 20.0}{42.0 - 40.0} = 0.25 \frac{\%\ \text{sal}}{\text{lb/h}}$$

Esto representa un incremento de 67% en la ganancia del lazo de composición del producto, de 0.15% a 0.25% en peso de sal/(lb/h), causado por la interacción con el controlador de flujo. Para distinguir las dos ganancias, a K'_{x2} se le llama la *ganancia de lazo cerrado*, debido a que ésta es la ganancia del lazo de composición cuando el lazo de flujo se encuentra cerrado, mientras que K_{x2} es la *ganancia de lazo abierto*, es decir, la ganancia del lazo de composición cuando el lazo de flujo se encuentra abierto.

La interacción ocurre porque cuando el controlador de composición cambia el flujo de la corriente concentrada y esto provoca un cambio en el flujo del producto; esto a su vez hace que el controlador de flujo cambie el flujo de la corriente diluida, lo que produce un cambio en la composición del producto. Este cambio adicional en la composición del producto no se produciría si el flujo de producto no estuviera controlado. Es fácil mostrar que la instalación del controlador de composición produce un cambio similar en la ganancia del controlador de flujo.

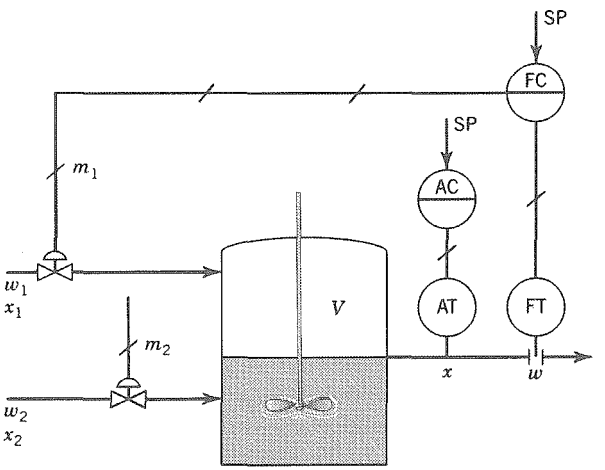


Figura 12-1.2 Control de un tanque de mezclado con el controlador de flujo del producto manipulando la corriente 1.

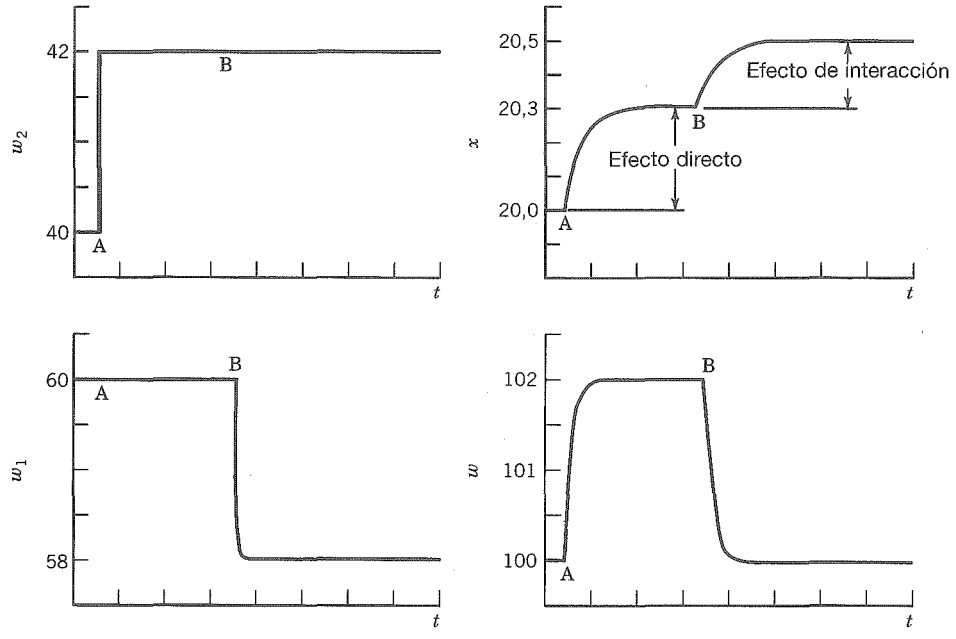


Figura 12-1.3 Respuesta del mezclador a un cambio escalón en el flujo de vapor concentrado con el controlador de flujo manipulando el flujo de vapor diluido.

En la figura 12-1.3 se muestra la respuesta de las variables controlada y manipulada para el cambio en el flujo de la corriente concentrada. El cambio en el flujo tiene lugar en el punto A con el controlador de flujo ajustado en *manual*. En el punto B el controlador de flujo se cambia a *automático* y lleva el flujo de producto de nuevo a su referencia. El incremento adicional en la composición del producto es resultado de la interacción.

Interacción positiva e interacción negativa

En el ejemplo del tanque de mezclado, la interacción es tal que los dos lazos se ayudan entre sí, es decir, cuando se cierra el lazo de flujo se produce un cambio en la composición del producto que está en la misma dirección del cambio original. Este caso, conocido como *interacción positiva*, resulta en un incremento en la ganancia del lazo cuando el otro lazo se encuentra cerrado. Cuando los dos lazos compiten entre sí, se dice que la interacción es *negativa* y la ganancia de un lazo disminuye o cambia de signo cuando el otro lazo está cerrado. Esto se debe a que la interacción causa un cambio en la variable controlada que está en la dirección opuesta al cambio original. El cambio de signo de la ganancia ocurre cuando el cambio de la interacción es mayor que el cambio original. Debido a este posible cambio de signo de la ganancia, la interacción negativa puede ser un problema más severo que la interacción positiva.

La presentación precedente de la interacción se ha limitado a su efecto sobre las ganancias de estado estacionario. Un análisis más completo basado en diagramas de bloques se presenta

en una sección posterior de este capítulo. A continuación se considera una medición cuantitativa de la interacción y su aplicación para el pareamiento apropiado de las variables controlada y manipulada en los sistemas de control multivariable.

12-2 APAREAMIENTO DE LAS VARIABLES CONTROLADA Y MANIPULADA

La segunda pregunta planteada anteriormente acerca de la interacción se refería a su medición cuantitativa y a la manera de parear las variables controlada y manipulada. Muchas veces es sencillo decidir sobre el apareamiento, pero otras veces, como en los sistemas de la figura 12-1.1, es más difícil. En esta sección se aprenderá a calcular una medición cuantitativa de la interacción entre lazos de control. Después se usará esta medición de la interacción para seleccionar las parejas de variables controlada y manipulada que minimicen los efectos de la interacción.

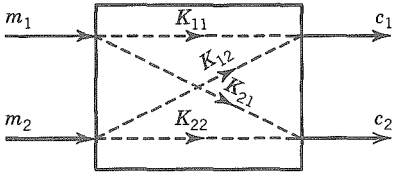


Figura 12-2.1 Esquema de un proceso 2 × 2 general.

Para organizar las ideas, considérese el sistema de la figura 12-2.1 con dos variables controladas, c_1 y c_2, y dos variables manipuladas, m_1 y m_2. A este sistema se le llamará 2 × 2. Tiene sentido parear cada variable controlada con la variable manipulada que ejerce la mayor "influencia" sobre ella. En este contexto, "influencia" y "ganancia" significan lo mismo; por consiguiente, para tomar una decisión se deben encontrar las ganancias de cada variable manipulada sobre cada variable controlada.

Ganancias de lazo abierto

Las cuatro ganancias de lazo abierto en estado estacionario para el sistema 2 × 2 son

$$K_{11} = \left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_1}\right|_{m_2} \quad K_{12} = \left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_2}\right|_{m_1}$$
$$K_{21} = \left.\frac{\Delta c_2}{\Delta m_1}\right|_{m_2} \quad K_{22} = \left.\frac{\Delta c_2}{\Delta m_2}\right|_{m_1} \qquad \textbf{(12-2.1)}$$

donde K_{ij} es la ganancia que relaciona la i-ésima variable controlada con la j-ésima variable manipulada. Las barras verticales indican que las ganancias están determinadas por los lazos abiertos, es decir, se hace un cambio en cada variable manipulada manteniendo las otras variables manipuladas constantes.

Podría parecer que el apareamiento de las variables controlada y manipulada se puede hacer simplemente comparando las ganancias de lazo abierto. Por ejemplo, si K_{12} es más grande en magnitud que K_{11}, entonces se elige m_2 para controlar c_1. Sin embargo, esto no es del todo correcto debido a que las ganancias por lo general tienen unidades diferentes y no se pueden comparar entre sí. Incluso si las ganancias están expresadas en %TO/%CO, factores tales como el rango de los transmisores y el tamaño de las válvulas, los cuales no tienen nada que ver con la interacción del proceso, afectarían el apareamiento.

Bristol (1966) propuso una medición de la interacción que es independiente de las unidades de medición, del rango de los transmisores y del tamaño de las válvulas. La medición de la interacción se basa en lo que se estableció en la sección anterior: en un sistema de control con interacción la ganancia de un lazo cambia cuando otro lazo o lazos se encuentran cerrados. Esto significa que por cada una de las ganancias de lazo abierto de la ecuación 12-2.1 existe una ganancia correspondiente de lazo cerrado, la cual se define a continuación.

Ganancias de lazo cerrado

Para cada par de variables controlada y manipulada, la *ganancia de lazo cerrado* es el cambio en la variable controlada dividido entre el cambio en la variable manipulada cuando todas la demás *variables controladas se mantienen constantes.* Nótese que para ello se requiere que las otras variables manipuladas se ajusten para hacer volver a las otras variables controladas a sus valores base.

Para el sistema 2 × 2 de la figura 12-2.1, las cuatro ganancias de lazo cerrado en estado estacionario son

$$K'_{11} = \left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_1}\right|_{c_2} \quad K'_{12} = \left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_2}\right|_{c_2}$$
$$K'_{21} = \left.\frac{\Delta c_2}{\Delta m_1}\right|_{c_1} \quad K'_{22} = \left.\frac{\Delta c_2}{\Delta m_2}\right|_{c_1} \qquad \textbf{(12-2.2)}$$

Es importante tener presente que las ganancias de lazo cerrado, definidas por la ecuación 12-2.2, no son las mismas ganancias de lazo cerrado que se aprendió a calcular en la sección 6-1.3.

Medición de la interacción o ganancias relativas

Para un par en particular, la medición de la interacción propuesta por Bristol (1966) es simplemente la razón de la ganancia de lazo abierto y la ganancia de lazo cerrado. Para el caso general

$$\mu_{ij} = \frac{K_{ij}}{K'_{ij}} \qquad \textbf{(12-2.3)}$$

donde μ_{ij} es la medición de la interacción o la *ganancia relativa* para el par $c_i - m_j$. Para el sistema 2 × 2 de la figura 12-2.1, las ganancias relativas son

$$\mu_{11} = \frac{K_{11}}{K'_{11}} \qquad \mu_{12} = \frac{K_{12}}{K'_{12}}$$
$$\mu_{21} = \frac{K_{21}}{K'_{21}} \qquad \mu_{22} = \frac{K_{22}}{K'_{22}} \tag{12-2.4}$$

Es evidente que todas las ganancias relativas son adimensionales, ya que se definieron como la razón de dos ganancias que relacionan las mismas variables controlada y manipulada. Esto se puede hacer más claro sustituyendo las ganancias de las ecuaciones 12-2.1 y 12-2.2 en la ecuación 12-2.4. Por ejemplo, para μ_{12},

$$\mu_{12} = \frac{K_{12}}{K'_{12}} = \frac{\left.\dfrac{\Delta c_1}{\Delta m_2}\right|_{m_1}}{\left.\dfrac{\Delta c_1}{\Delta m_2}\right|_{c_2}}$$

La ganancia relativa también es independiente de cosas tales como el rango de los transmisores y el tamaño de las válvulas, porque estos parámetros afectan las ganancias de lazo abierto y de lazo cerrado exactamente de la misma forma.

La utilidad de las ganancias relativas como mediciones de la interacción se deriva directamente de su definición. Si la ganancia para un par dado de variables controlada y manipulada no resultara afectada por la interacción con otros lazos, la ganancia relativa para ese par sería la unidad, debido a que la ganancia de lazo cerrado sería exactamente la misma que la ganancia de lazo abierto. Entre más afecte la interacción con otros lazos a un par, más lejos de la unidad estará su ganancia relativa. Cuando la interacción es positiva, la ganancia relativa es positiva y menor que la unidad debido a que la ganancia de lazo cerrado es del mismo signo y mayor que la ganancia de lazo abierto. Cuando la interacción es negativa, la ganancia relativa es mayor que la unidad o negativa, porque la ganancia de lazo cerrado es menor que la ganancia de lazo abierto o tiene el signo contrario.

Regla de apareamiento

La regla para usar la ganancia relativa para parear variables controladas y manipuladas se enuncia simplemente como sigue:

> *Para minimizar el efecto de la interacción en un sistema de control multivariable, las variables controladas y manipuladas deben ser pareadas de tal manera que la ganancia relativa de cada par esté lo más próxima a la unidad.*

Es importante tener presente que en esta regla sólo se considera el efecto de la interacción de estado estacionario. En algunos sistemas, particularmente los que presentan interacción negativa, los efectos dinámicos pueden anular la validez de la regla anterior.

Los pares con ganancias relativas negativas deben evitarse a toda costa. Una ganancia relativa negativa significa que la acción del proceso cambia cuando los otros lazos están abiertos y cerrados, o cuando sus variables manipuladas alcanzan sus límites (por ejemplo, válvulas totalmente abiertas o cerradas). En tales casos, el lazo con ganancia relativa negativa se volverá inestable a menos que se cambie la acción del controlador, lo que es difícil de hacer automáticamente.

Es posible, aunque no es recomendable, seleccionar un par con ganancia relativa igual a cero. En este caso, la variable manipulada no tiene un efecto directo sobre la variable controlada y su control depende de la interacción con los otros lazos (ganancia de lazo abierto cero). Un par con una ganancia relativa grande no funcionará adecuadamente, ya que la interacción con los otros lazos cancelará la mayor parte del efecto directo de la variable manipulada sobre la variable controlada (ganancia de lazo cerrado próxima a cero).

Para entender mejor el significado de la ganancia relativa, se consideran los dos casos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 12-2.1 Considérese la siguiente matriz de ganancias relativas:

	m_1	m_2
c_1	0.20	0.80
c_2	0.80	0.20

Como se verá pronto, las ganancias relativas para cada renglón y columna siempre suman la unidad. Asimismo, para un sistema 2 × 2 sólo existen dos posibles opciones de apareamiento con dos pares cada una: $c_1 - m_1$, $c_2 - m_2$ y $c_1 - m_2$, $c_2 - m_1$; las ganancias relativas para los dos pares de cada opción son exactamente las mismas.

La ganancia relativa para el apareamiento, $\mu_{11} = \mu_{22} = 0.2 = 1/5$, indica que para este apareamiento la ganancia de cada lazo se incrementa en un factor de 5 cuando el otro lazo se encuentra cerrado. La ganancia relativa para el otro apareamiento, $\mu_{12} = \mu_{21} = 0.8 = 4/5$, indica que para este apareamiento la ganancia sólo se incrementa en un factor de 1.25 cuando el otro lazo se encuentra cerrado. Obviamente, el apareamiento $c_1 - m_2$, $c_2 - m_1$ resulta en una menor sensibilidad a la interacción que el otro.

Ejemplo 12-2.2 Considérese la siguiente matriz de ganancias relativas:

	m_1	m_2
c_1	2.0	−1.0
c_2	−1.0	2.0

En este caso, la ganancia relativa $\mu_{11} = \mu_{22} = 2.0 = 1/0.50$ indica que la ganancia de cada lazo se reduce a la mitad cuando el otro lazo se encuentra cerrado, mientras que la ganancia relativa $\mu_{12} = \mu_{21} = -1.0 = 1/-1$ indica que la ganancia de cada lazo cambia de signo cuando el otro lazo se encuentra cerrado. Desde luego, este último caso es indeseable pues significa que la acción del controlador depende de si el otro lazo se encuentra abierto o cerrado. El apareamiento correcto es obviamente $c_1 - m_1$ y $c_2 - m_2$.

Es conveniente organizar las ganancias relativas en una matriz, como se mostró en los ejemplos anteriores, debido a que se establece una asociación gráfica de los valores de las variables controlada y manipulada. Esto también se puede hacer con las ganancias de lazo abierto y lazo cerrado. El primero de los dos ejemplos corresponde a un proceso con interacción positiva, y el segundo a una interacción negativa.

A continuación se considera el cálculo de las ganancias relativas desde las ganancias de lazo abierto. Primero, se deducirá una fórmula simple para las ganancias relativas de sistemas 2×2, y después se extenderá para sistemas generales $n \times n$, es decir, para un sistema con n objetivos de control que interactúan.

12-2.1 Cálculo de las ganancias relativas para un sistema 2 × 2

La principal ventaja del análisis de ganancias relativas presentado aquí consiste en que sólo requiere parámetros de proceso de estado estacionario, específicamente las ganancias de estado estacionario. En muchos casos estas ganancias se pueden calcular a partir de simples balances de materia y energía en estado estacionario del proceso. Procesos más complejos, tales como columnas de destilación y reactores, tal vez requieran una simulación del proceso, pero las simulaciones de diagramas de flujo en estado estacionario están disponibles fácilmente y son de uso generalizado para diseñar procesos y analizar su desempeño. En esta sección se muestra cómo calcular las ganancias relativas a partir de las ganancias de lazo abierto para un sistema 2×2.

El análisis de las ganancias relativas se basa en una aproximación lineal del proceso en torno a algunas condiciones de operación. Como se ha dicho en numerosas ocasiones en este texto, la mayoría de los procesos son no lineales. Esto significa que en cuanto las ganancias de estado estacionario varíen con las condiciones de operación, así lo harán las ganancias relativas.

Para el sistema 2×2 de la figura 12-2.1, los cambios de estado estacionario en la variable controlada causados por cambios simultáneos en las dos variables manipuladas son

$$\begin{aligned} \Delta c_1 &= K_{11}\Delta m_1 + K_{12}\Delta m_2 \\ \Delta c_2 &= K_{21}\Delta m_1 + K_{22}\Delta m_2 \end{aligned} \tag{12-2.5}$$

donde se aplica el principio de superposición y se supone una aproximación lineal para cambios pequeños en las variables manipuladas. Las ganancias son de lazo abierto de estado estacionario.

Para determinar la ganancia de lazo cerrado para el apareamiento $c_1 - m_1$, es necesario instalar un controlador por retroalimentación que conecte c_2 con m_2, como en la figura 12-2.2. Si

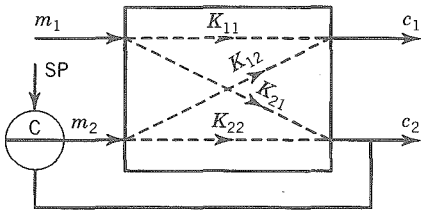


Figura 12-2.2 Esquema de un proceso 2 × 2 general con un lazo cerrado.

este controlador tiene modo integral, cuando se aplique un cambio en m_1, ajustará m_2 para regresar c_2 a su referencia, haciendo el cambio de estado estacionario en c_2 igual a cero:

$$\Delta c_2 = K_{21}\Delta m_1 + K_{22}\Delta m_2 = 0$$

El cambio en m_2 requerido para compensar el cambio en m_1 se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$\Delta m_2 = -\frac{K_{21}}{K_{22}}\Delta m_1$$

Se sustituye este cambio en m_2 en la ecuación 12-2.5 para obtener el cambio total en c_1 causado por el cambio en m_1 cuando c_2 se mantiene constante:

$$\Delta c_1 = K_{11}\Delta m_1 - K_{12}\frac{K_{21}}{K_{22}}\Delta m_1$$

Éste es el valor que se necesita para calcular la ganancia de lazo cerrado; a partir de su definición, ecuación 12-2.2,

$$K'_{11} = \left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_1}\right|_{c_2} = K_{11} - K_{12}\frac{K_{21}}{K_{22}}$$

Esta fórmula muestra que la ganancia de lazo cerrado puede calcularse a partir de las cuatro ganancias de lazo abierto. Las ganancias relativas para cada uno de los otros tres apareamientos de variables se obtienen mediante el reordenamiento apropiado de las conexiones del controlador por retroalimentación de la figura 12-2.2. Las fórmulas resultantes, después de un reordenamiento mínimo de términos, son

$$\begin{aligned} K'_{11} &= \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}{K_{22}} & K'_{12} &= \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}{-K_{21}} \\ K'_{21} &= \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}{-K_{12}} & K'_{22} &= \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}{K_{11}} \end{aligned} \qquad \textbf{(12-2.6)}$$

Ahora se pueden obtener las ganancias relativas a partir de su definición, ecuación 12-2.3,

$$\mu_{11} = \frac{K_{11}K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} \qquad \mu_{12} = \frac{-K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}$$
$$\mu_{21} = \frac{-K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} \qquad \mu_{22} = \frac{K_{11}K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} \tag{12-2.7}$$

Como se mencionó anteriormente, las ganancias relativas para el par $c_1 - m_1$ son iguales a las del par $c_2 - m_2$ ($\mu_{11} = \mu_{22}$) debido a que representan la misma opción de apareamiento. Del mismo modo, $\mu_{12} = \mu_{21}$. Asimismo, es fácil demostrar que $\mu_{11} + \mu_{12} = 1$, y que $\mu_{12} + \mu_{22} = 1$; es decir, la suma de las ganancias relativas en cualquier renglón o columna es igual a 1. Esta última propiedad se extiende a sistemas $n \times n$.

Es sencillo memorizar las fórmulas para las ganancias relativas observando que el denominador es el determinante de la matriz de las ganancias de lazo abierto, y que el numerador es el producto de los términos del denominador que contiene las ganancias de lazo abierto para el par de interés.

Habiendo demostrado que las ganancias relativas se pueden calcular a partir de las ganancias de lazo abierto, a continuación se presenta el procedimiento para calcularlas.

Ejemplo 12-2.3 ***Ganancias relativas del proceso de mezclado.*** Las ecuaciones que relacionan las variables del proceso de mezclado de la figura 12-1.1*a* se presentaron ya en este capítulo (ecuación 12-1.1). Estas ecuaciones son tan simples que las ganancias pueden obtenerse analíticamente utilizando cálculo diferencial. Determinar las fórmulas generales para las ganancias de lazo abierto y relativas para el proceso de mezclado, y deducir una estrategia general para aparear las variables en cualquier proceso de mezclado.

Solución El primer paso es despejar las variables controladas en términos de las variables manipuladas. Por la ecuación 12-1.1,

$$w = w_1 + w_2$$
$$x = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2}{w_1 + w_2} \tag{12-2.8}$$

donde w y x son las variables controladas y w_1 y w_2 son las variables manipuladas. Nótese que se usan los flujos manipulados en vez de las posiciones de las válvulas de control como variables manipuladas. Esto se debe a que las ganancias de las válvulas no tienen efecto sobre las ganancias relativas ya que afectan las ganancias de lazo abierto y lazo cerrado exactamente de la misma manera.

Se puede usar cálculo diferencial para determinar las ganancias de lazo abierto: se toma el límite de las fórmulas para las ganancias cuando el cambio en la variable manipulada tiende a cero:

$$K_{ij} = \lim_{\Delta m_j \to 0} \frac{\Delta c_i}{\Delta m_j}\bigg|_{m_{k\neq j}} = \frac{\partial c_i}{\partial m_j} \tag{12-2.9}$$

Aplicando esta definición a la ecuación 12-2.8, se obtienen las siguientes ganancias de lazo abierto:

$$\begin{aligned} K_{w1} &= 1 & K_{w2} &= 1 \\ K_{x1} &= \frac{-w_2(x_2 - x_1)}{(w_1 + w_2)^2} & K_{x2} &= \frac{w_1(x_2 - x_1)}{(w_1 + w_2)^2} \end{aligned} \tag{12-2.10}$$

Las ganancias relativas se obtienen usando la ecuación 12-2.7.

$$\begin{aligned} \mu_{w1} &= \frac{w_1}{w_1 + w_2} & \mu_{w2} &= \frac{w_2}{w_1 + w_2} \\ \mu_{x1} &= \frac{w_2}{w_1 + w_2} & \mu_{x2} &= \frac{w_1}{w_1 + w_2} \end{aligned} \tag{12-2.11}$$

Ambas ganancias relativas son positivas y menores que la unidad, lo que indica una interacción positiva. El apareamiento correcto es el que da como resultado la ganancia relativa más próxima a la unidad. Debido a que el proceso de mezclado es no lineal, las ganancias relativas, y por consiguiente el apareamiento correcto, son función de las condiciones de operación. El apareamiento correcto depende de cuál de los dos flujos de entrada sea el mayor.

- Si $w_1 > w_2$, entonces las ganancias relativas más próximas a 1 son μ_{w1} y μ_{x2} (ambas iguales entre sí). El apareamiento correcto es $w - w_1$, $x - w_2$.
- Si $w_2 > w_1$, entonces las ganancias relativas más próximas a 1 son μ_{w2} y μ_{x1} (ambas iguales entre sí). El apareamiento correcto es $w - w_2$, $x - w_1$.

Nótese que este resultado constituye una estrategia general de apareamiento para procesos de mezclado:

El flujo del producto se controla con la corriente de entrada que tiene el flujo mayor, y la composición con la corriente de entrada que tiene el flujo menor.

La composición representa cualquier propiedad intensiva de la corriente del producto que se va a controlar. Podría ser, por ejemplo, la temperatura, como en el caso de la ducha diaria, donde se mezclan corrientes de agua fría y caliente para obtener la temperatura deseada en la ducha.

En los procesos en los que se controla el nivel del tanque, debe manipularse la corriente con mayor flujo para controlar el nivel. En el presente ejemplo, la corriente con el flujo mayor es la corriente del producto, pero quizá sea deseable hacer que el operador ajuste directamente el flujo de producto. En tal caso, la corriente del producto es de flujo controlado, la corriente de entrada con flujo mayor se manipula para controlar el nivel, y la corriente de entrada con flujo menor controla la propiedad intensiva del producto (por ejemplo, la composición, la temperatura).

Ejemplo 12-2.4 ***Control de las purezas del producto de destilación.*** La columna de destilación que se muestra en la figura 12-2.3 está diseñada para separar una mezcla que consiste en 60% molar de benceno y 40% molar de tolueno para obtener un producto destilado que consiste en 95% molar de benceno y 5% molar de tolueno, y productos en el fondo con 5% molar de benceno y 95% molar de tolueno. La tasa de alimentación es de 1000 lbmol/h y entra en el séptimo plato desde la parte superior. La columna tiene 12 platos, un recalentador parcial,

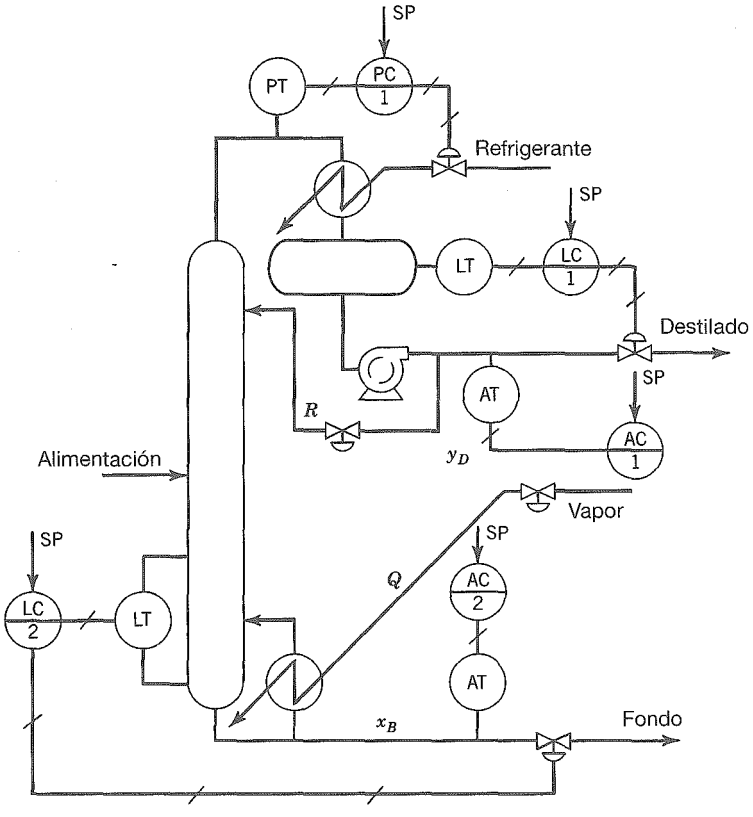


Figura 12-2.3 Columna de destilación para el ejemplo 12-2.4.

un condensador total y la eficiencia de Murphree de los platos es de 70%. La composición del destilado, medida en % molar de tolueno, y la composición de los productos del fondo, medida en % molar de benceno, deben controlarse manipulando el reflujo y la tasa de calor en el recalentador. Determinar las ganancias de lazo abierto para el sistema 2 × 2, las ganancias relativas y el apareamiento de las variables manipuladas y controladas que minimicen los efectos de interacción. Suponer que el controlador de presión mantiene la presión de la columna constante, y que el controlador de dos niveles mantiene los flujos de material en equilibrio en la parte superior y en el fondo manipulando los flujos de los dos productos.

Solución Se usó una simulación ChemSep (Taylor, Haket y Kooijman, 2004) de una columna para determinar las ganancias de estado estacionario. Normalmente es necesario realizar tres corridas de la simulación para determinar las ganancias de estado estacionario: una para la condición de diseño, una en la que el reflujo se cambia manteniendo la tasa de calor constante en el recalentador y una en la que se cambia la tasa de calor en el recalentador manteniendo constante el reflujo. Sin embargo, debido a que las columnas de destilación presentan respuestas asimétricas cuando las variables se incrementan y disminuyen, se hace necesario realizar cinco corridas para que el reflujo y la tasa de calor en el recalentador puedan incrementarse y disminuirse respecto de los valores de diseño. Los resultados de estas corridas se muestran en la tabla siguiente:

	Caso base	Prueba 1^+	Prueba 1^-	Prueba 2^+	Prueba 2^-
Reflujo, klb/h	131.94	132.59	131.29	131.94	131.94
Tasa de calor, MBtu/h	30.10	30.10	30.10	30.23	29.97
% molar de destilado	5.00	4.43	5.69	5.87	4.34
% molar del fondo	5.00	5.84	4.25	4.05	6.06

Nótese la respuesta asimétrica de las composiciones: aunque el cambio en el reflujo en cada dirección es de la misma magnitud, 0.65 klb/h, los cambios en la composición son diferentes para el incremento y la disminución en el flujo, lo cual ocurre también para los cambios en la tasa de calor. Estas diferencias son pequeñas en este caso debido a que los cambios en el flujo y la tasa de calor son pequeños, como deberían serlo. No obstante, estas pequeñas diferencias son suficientes para desechar el cálculo de las ganancias. A esto se debe que se requieran dos cambios, uno hacia arriba y uno hacia abajo, para cada variable. Las ganancias de lazo abierto se calculan de la siguiente manera:

$$K_{DR} = \frac{4.43 - 5.69}{132.59 - 131.29} = -0.97 \frac{\text{mol \%}}{\text{klb/h}} \qquad K_{DQ} = \frac{5.87 - 4.34}{30.23 - 29.97} = 5.88 \frac{\text{mol \%}}{\text{MBtu/h}}$$

$$K_{BR} = \frac{5.84 - 4.25}{132.59 - 131.29} = 1.22 \frac{\text{mol \%}}{\text{klb/h}} \qquad K_{BQ} = \frac{4.05 - 6.06}{30.23 - 29.97} = -7.73 \frac{\text{mol \%}}{\text{MBtu/h}}$$

donde el primer subíndice D denota la composición del destilado y B la composición del fondo, y el segundo subíndice R denota el reflujo y Q la tasa de calor del recalentador.

Las ganancias relativas son, por la ecuación 12-2.7,

$$\mu_{DR} = \mu_{BQ} = \frac{(-0.97)(-7.73)}{(-0.97)(-7.73) - (1.22)(5.88)} = 23.1$$

$$\mu_{DQ} = \mu_{BR} = \frac{-(1.22)(5.88)}{(-0.97)(-7.73) - (1.22)(5.88)} = -22.1$$

o, en forma matricial:

	R	Q
y_D	23.1	−22.1
x_B	−22.1	23.1

Las ganancias relativas son mayores que la unidad o negativas, lo que indica una interacción negativa. El apareamiento para evitar las ganancias relativas negativas debería ser el obvio: el reflujo controla la composición del destilado y la tasa de calor del recalentador controla la composición del fondo. Sin embargo, incluso para el mejor apareamiento, el valor alto de la ganancia relativa, 23.1, indica que los dos lazos compiten entre sí hasta el punto de cancelar, en esencia, la acción del otro. Por ejemplo, supóngase que el controlador de la composición del destilado hace cambiar el reflujo en 0.2 klb/h. Si el lazo de composición del fondo se encuentra abierto, el cambio en la composición del destilado, utilizando la ganancia de lazo abierto, es

$$\Delta y_D = K_{DR}\Delta R = (-0.97)(0.20) = -0.194 \text{ \% molar de tolueno}$$

y la composición del fondo cambiará

$$\Delta x_B = K_{BR}\Delta R = (1.22)(0.20) = 0.244 \text{ \% de benceno}$$

Si el controlador de composición del fondo se cambia al modo automático, hará que la composición del fondo vuelva al valor de la referencia. El cambio requerido en la tasa de calor del recalentador es

$$\Delta Q = \frac{-\Delta x_B}{K_{BQ}} = \frac{-0.244}{-7.73} = 0.0316 \frac{\text{MBtu}}{\text{h}}$$

El cambio total en la composición del destilado será entonces de

$$\Delta y_D = K_{DR}\Delta R + K_{DQ}\Delta Q = (-0.97)(0.20) + (5.88)(0.0316) = -0.008 \text{ \% de tolueno}$$

Nótese cómo el cambio que causa la interacción entre los dos controladores, 0.186, cancela en esencia el cambio que produce la variable manipulada en su variable controlada, −0.194. La ganancia de cada controlador se reduce por un factor de 23.1, la ganancia relativa.

12-2.2 Cálculo de las ganancias relativas para un sistema $n \times n$

Cuando hay más de dos lazos de control que interactúan, el sistema se conoce como sistema $n \times n$, donde n es el número de objetivos de control que interactúan. Tal sistema consta de n variables controladas y n variables manipuladas. La definición de la ganancia relativa es la misma que para los sistemas 2×2, es decir, la razón de la ganancia de lazo abierto y la ganancia de lazo cerrado para cada par de variables controlada y manipulada:

$$\mu_{ij} = \frac{\left.\dfrac{\Delta c_i}{\Delta m_j}\right|_{m_k,\, k \neq j}}{\left.\dfrac{\Delta c_i}{\Delta m_j}\right|_{c_k,\, k \neq i}} = \frac{K_{ij}}{K'_{ij}} \tag{12-2.12}$$

donde K_{ij} es la ganancia de lazo abierto, es decir, la ganancia cuando las demás variables manipuladas se mantienen constantes, y K'_{ij} es la ganancia de lazo cerrado, es decir, la ganancia cuando las demás variables controladas se mantienen constantes.

Las fórmulas para la matriz de ganancias relativas de un sistema 2×2, ecuación 12-2.7, son simples. Para un sistema $n \times n$ resulta más sencillo desarrollar un procedimiento basado en operaciones con matrices. El procedimiento, como fue propuesto por Bristol (1966), es el siguiente:

> *Obtener la transpuesta de la inversa de la matriz de ganancia de estado estacionario y multiplicar cada término de la matriz resultante por el término correspondiente de la matriz original. Los términos que se obtienen así son las ganancias relativas.*

Algebraicamente, sea $\mathbb{B}$ la inversa de la matriz $\mathbb{K}$ de ganancia de estado estacionario; es decir, sea $\mathbb{B} = \mathbb{K}^{-1}$. Entonces

$$\mu_{ij} = B_{ji} K_{ij} \tag{12-2.13}$$

donde K_{ij} y B_{ji} son elementos de las matrices $\mathbb{K}$ y $\mathbb{B}$, respectivamente. Con las calculadoras personales de hoy en día y de programas tales como MATLAB (2001) y MathCad (2001), las operaciones matriciales requeridas se pueden realizar fácilmente. Para un sistema 2×2, este procedimiento produce las mismas ganancias relativas que la ecuación 12-2.7.

La derivación de la ecuación 12-2.13 se hace como sigue: en notación matricial, el cambio en las variables controladas causado por cambios simultáneos en las variables manipuladas es

$$\Delta \mathbf{c} = \mathbb{K}\, \Delta \mathbf{m} \tag{12-2.14}$$

Para obtener los cambios en las variables manipuladas que se requieren para producir cambios específicos en las variables controladas, se multiplica por la inversa de la matriz de ganancia de estado estacionario $\mathbf{K}$.

$$\Delta \mathbf{m} = \mathbf{K}^{-1}\ \Delta \mathbf{c} = \mathbf{B}\ \Delta \mathbf{c} \tag{12-2.15}$$

Ahora se escribe el j-ésimo elemento de esta ecuación matricial

$$\Delta m_j = B_{j1}\,\Delta c_1 + \cdots + B_{ji}\,\Delta c_i + \cdots + B_{jn}\,\Delta c_n \tag{12-2.16}$$

de donde se observa que

$$B_{ji} = \left.\frac{\Delta m_j}{\Delta c_i}\right|_{\substack{c_k \\ k \neq i}} = \frac{1}{K'_{ij}} \tag{12-2.17}$$

En otras palabras, los elementos de la matriz inversa $\mathbf{B}$ son la inversa de las ganancias de lazo cerrado, transpuestas. Combinando la ecuación 12-2.17 con la ecuación 12-2.12, se obtiene la ecuación 12-2.13. A continuación se mostrará el uso de estas fórmulas con un ejemplo.

Ejemplo 12-2.5 ***Sistema de control de mezclado de gasolina.*** En la figura 12-2.4 se muestra un mezclador en línea que se utiliza para producir gasolina de una formulación dada por medio del mezclado de tres productos de refinería: alquilato (corriente 1), gasolina de primera destilación (corriente 2) y gasolina rectificada (corriente 3). Se desea controlar el índice de octano x, la presión de vapor Reid y, y el flujo f de la gasolina producida mediante la manipulación de las referencias de flujo de cada corriente de entrada. Calcular las ganancias de estado estacionario y las ganancias relativas, y decidir qué caudal de entrada debe controlar cada variable del producto de tal modo que el efecto de interacción se minimice. Los valores de diseño de las variables de proceso se muestran en la siguiente tabla.

		Octano, x	RVP, y	Flujo, klb/día
Alquilato	1	97.0	5.00	7.50
Gasolina de primera refinación	2	80.0	11.0	28.12
Gasolina rectificada	3	92.0	3.00	24.38
Gasolina		87.0	7.00	60.00

Solución Suponiendo que las propiedades de la gasolina producida son el promedio de las corrientes de alimentación, ponderadas con la tasa volumétrica de cada corriente, y que las den-

sidades de todas las corrientes son aproximadamente iguales, se obtienen las siguientes ecuaciones que relacionan las variables controladas con los flujos manipulados.

$$x = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3}{f_1 + f_2 + f_3}$$

$$y = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3}{f_1 + f_2 + f_3}$$

$$f = f_1 + f_2 + f_3$$

Nótese que los valores de diseño dados en el enunciado del problema satisfacen estas ecuaciones, como debe ser. Esto quiere decir que los tres valores de diseño no son independientes del resto.

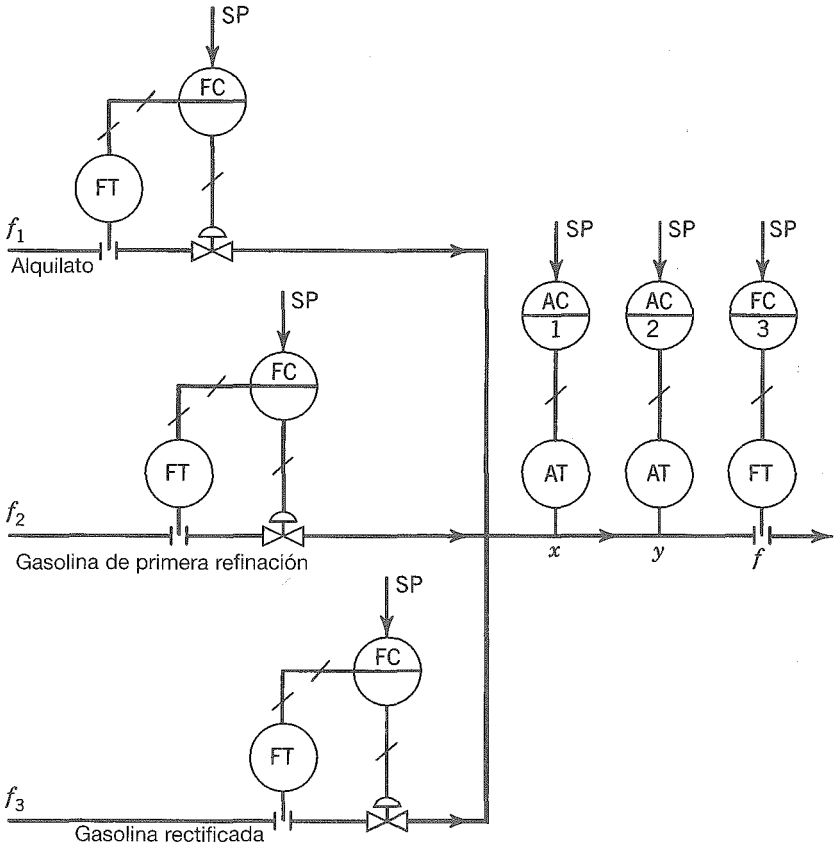


Figura 12-2.4 Proceso de mezclado de gasolina en línea para el ejemplo 12-2.5.

Como en el ejemplo 12-2.3, las ganancias de estado estacionario se obtienen tomando las derivadas parciales de las variables controladas con respecto a las variables manipuladas. Los resultados son

$$K_{1j} = \frac{\partial x}{\partial f_j} = \frac{f_1(x_j - x_1) + f_2(x_j - x_2) + f_3(x_j - x_3)}{(f_1 + f_2 + f_3)^2}$$

$$K_{2j} = \frac{\partial y}{\partial f_j} = \frac{f_1(y_j - y_1) + f_2(y_j + y_2) + f_3(y_j - y_3)}{(f_1 + f_2 + f_3)^2}$$

$$K_{3j} = \frac{\partial f}{\partial f_j} = 1$$

Se sustituyen los valores de diseño para obtener la matriz de ganancia de lazo abierto:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 0.167 & -0.117 & 0.083 \\ -0.033 & 0.067 & -0.067 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de esta matriz es

$$\mathbb{B} = \mathbb{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 7.50 & 11.250 & 0.125 \\ -1.875 & 4.688 & 0.469 \\ -5.625 & -15.938 & 0.406 \end{bmatrix}$$

donde la inversa se calculó con MathCad (2001). Por la ecuación 12-2.13, las ganancias relativas son

	f_1	f_2	f_3
x	1.250	0.219	−0.469
y	−0.375	0.312	1.063
f	0.125	0.469	0.406

Los valores de los recuadros son las ganancias relativas más próximas a 1 que minimizan el efecto de interacción. El apareamiento adecuado consiste entonces en controlar el índice de octano (x) con el alquilato (corriente 1), la presión de vapor Reid (y) con la gasolina rectificada (corriente 3) y el flujo de gasolina (f) con la gasolina de primera destilación (corriente 2). Dos de las ganancias relativas son un poco mayores que la unidad, lo cual significa que la interacción es negativa para cada uno de estos lazos y, por tanto, sus ganancias disminuyen cuando los otros lazos están cerrados. La otra ganancia relativa es 0.469, lo que significa que la ganancia del lazo tiene un incremento de más del doble cuando los otros lazos están cerrados. La combinación de los otros dos lazos (interacción positiva) ayuda a este lazo. Nótese que la suma de las ganancias relativas en cada renglón y columna de la matriz es la unidad, como debería ser.

Puesto que el mezclador en línea tiene una respuesta muy rápida, el análisis de estado estacionario de las interacciones debe ser suficiente para decidir cuál es el mejor apareamiento.

En este ejemplo, como en el ejemplo 12-2.3 del mezclador de dos corrientes, el apareamiento correcto tiene la corriente de entrada con el mayor flujo que controla el flujo del producto. Esto tiene sentido ya que la corriente más grande tiene la mayor influencia relativa sobre el flujo del producto.

12.3 DESACOPLAMIENTO DE LAZOS INTERACTIVOS

La tercera y última pregunta por responder es: ¿la interacción entre dos lazos puede reducirse o eliminarse mediante el diseño de un sistema de control apropiado? La respuesta desde luego es sí, y la manera más fácil de hacerlo es por *desacoplamiento*. El desacoplamiento puede ser una posibilidad realista y rentable si se aplica con atención. La matriz de ganancia relativa proporciona un indicio de cuándo podría ser provechoso el desacoplamiento. Si para la mejor opción de apareamiento, una o más de las ganancias relativas están lejos de la unidad, el desacoplamiento puede ser de ayuda. Para los sistemas existentes, la experiencia de operación por lo general ayuda a tomar la decisión.

En esta sección se presenta el diseño de desacopladores. El diseño de desacopladores es muy parecido al diseño de controladores feedforward presentado en el capítulo 11. Los desacopladores se pueden diseñar a partir de diagramas de bloques o de principios básicos de ingeniería. La diferencia básica consiste en que, a diferencia de los controladores feedforward, los desacopladores forman parte del lazo de control por retroalimentación. Debido a ello, deben seleccionarse y diseñarse con gran atención. Una característica básica del desacoplamiento que se debe tener presente es la siguiente: *en los sistemas interactivos, el desacoplamiento le hace a cada lazo lo que los otros lazos de todos modos iban hacer.* La diferencia es que el desempeño de cada lazo se vuelve independiente de la sintonización y de la condición abierto/cerrado de los otros lazos, siempre y cuando la acción del desacoplador no esté bloqueada.

12-3.1 Diseño de desacopladores a partir de diagramas de bloques

En la figura 12-3.1 se presenta el diagrama de bloques para un sistema 2×2 con interacción. Este diagrama de bloques muestra gráficamente que la interacción entre los dos lazos se debe a los bloques de proceso "entrecruzados" con funciones de transferencia $G_{12}(s)$ y $G_{21}(s)$. Para evitar esta interacción, se instalan dos bloques desacopladores con funciones de transferencia $D_{12}(s)$ y $D_{21}(s)$, como en la figura 12-3.2. El propósito de los desacopladores es cancelar el efecto de los bloques de proceso entrecruzados para que cada variable controlada no se vea afectada por los cambios en la variable manipulada del otro lazo. En otras palabras, el desacoplador $D_{21}(s)$ cancela el efecto de la variable manipulada $M_1(s)$ sobre la variable controlada $C_2(s)$, y $D_{12}(s)$ cancela el efecto de $M_2(s)$ sobre la variable controlada $C_1(s)$. Con base en el álgebra del diagrama de bloques, estos efectos son

$$\frac{C_1(s)}{M_2(s)} = D_{12}(s)G_{v1}(s)G_{11}(s) + G_{v2}(s)G_{12}(s) = 0$$

$$\frac{C_2(s)}{M_1(s)} = D_{21}(s)G_{v2}(s)G_{22}(s) + G_{v1}(s)G_{21}(s) = 0 \qquad \textbf{(12-3.1)}$$

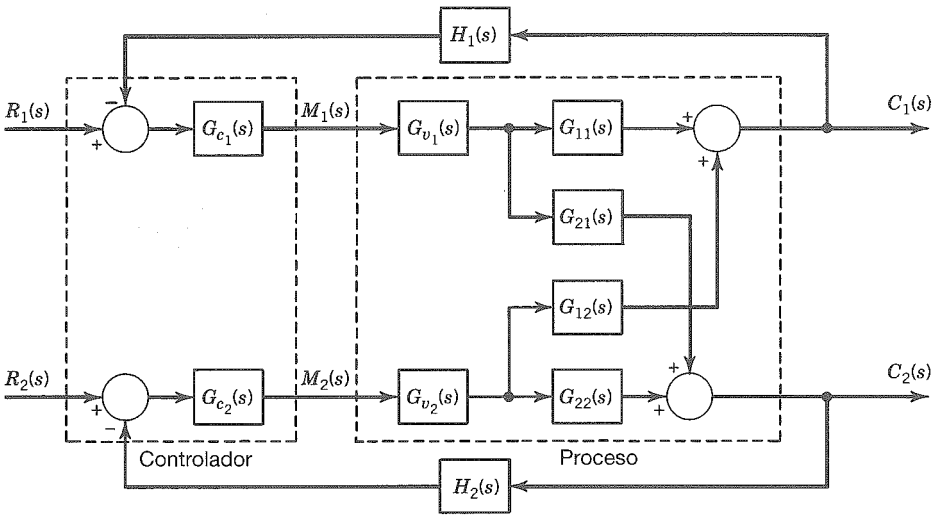


Figura 12-3.1 Diagrama de bloques de un sistema de control 2 × 2 general.

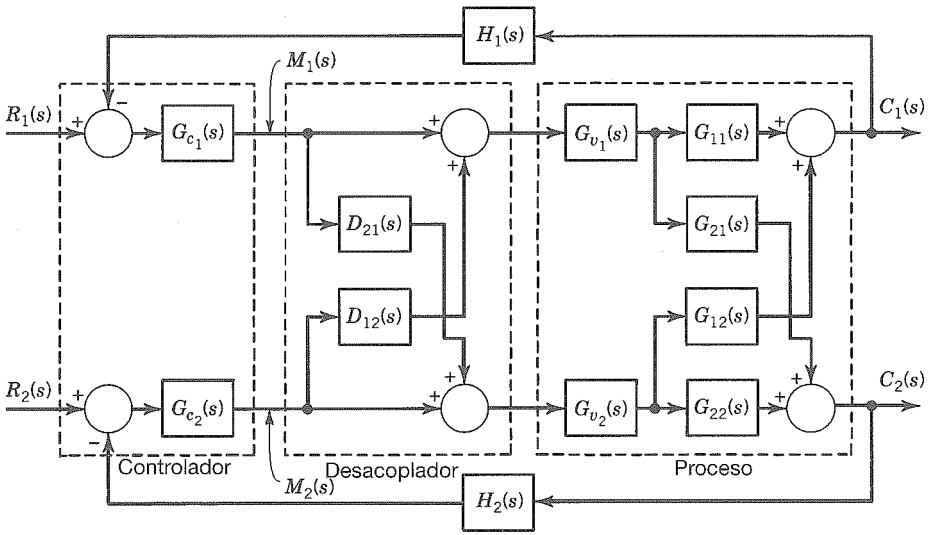


Figura 12-3.2 Diagrama de bloques de un sistema de control 2 × 2 con desacopladores.

Nótese que esto es similar a diseñar controladores feedforward en los que $M_2(s)$ es una perturbación para $C_1(s)$ y $M_1(s)$ es una perturbación para $C_2(s)$. Para obtener las fórmulas de diseño

de los desacopladores, se despejan las funciones de transferencia de los desacopladores de la ecuación 12-3.1.

$$D_{12}(s) = -\frac{G_{v2}(s)G_{12}(s)}{G_{v1}(s)G_{11}(s)}$$
$$D_{21}(s) = -\frac{G_{v1}(s)G_{21}(s)}{G_{v2}(s)G_{22}(s)} \qquad (12\text{-}3.2)$$

Estas fórmulas se pueden utilizar para diseñar desacopladores lineales para cualquier sistema 2×2 siempre que las funciones de transferencia del proceso y las válvulas se puedan derivar de principios básicos, como se vio en los capítulos 3, 4, 5 y 6, o que se puedan aproximar a partir de las respuestas escalón de las variables controladas a las variables manipuladas, como se vio en el capítulo 7. En este último enfoque las funciones de transferencia de la válvula, del proceso y del transmisor se agrupan en una sola función de transferencia para cada combinación. Es fácil establecer que las fórmulas de los desacopladores son entonces

$$D_{12}(s) = -\frac{G_{P12}(s)}{G_{P11}(s)} \quad D_{21}(s) = -\frac{G_{P21}(s)}{G_{P22}(s)} \qquad (12\text{-}3.3)$$

donde $G_{Pij}(s) = G_{vj}(s)\, G_{ij}(s)\, H_i(s)$.

Como ya se señaló, los desacopladores forman parte de los lazos, como se puede ver en el diagrama de bloques de la figura 12-3.2. La relación entre cada variable controlada y su respectiva variable manipulada en el diagrama desacoplado se obtiene por álgebra de diagrama de bloques:

$$\frac{C_1(s)}{M_1(s)} = G_{v1}(s)G_{11}(s) + D_{21}(s)G_{v2}(s)G_{12}(s)$$
$$\frac{C_2(s)}{M_2(s)} = G_{v2}(s)G_{22}(s) + D_{12}(s)G_{v1}(s)G_{21}(s) \qquad (12\text{-}3.4)$$

Los dos términos en cada fórmula indican lo que en el diagrama de bloques de la figura 12-3.2 se muestra gráficamente —que en el sistema desacoplado cada variable manipulada afecta a su variable controlada correspondiente a través de dos trayectorias paralelas—. Como en el sistema con interacción, estas dos trayectorias se pueden ayudar recíprocamente si sus efectos son aditivos (interacción positiva), o contrarrestarse recíprocamente si los efectos son de signos contrarios (interacción negativa).

Si los desacopladores se pueden implementar exactamente como se diseñaron con la ecuación 12-3.2, la sustitución en la ecuación 12-3.4 da como resultado, después de algo de simplificación,

$$\frac{C_1(s)}{M_1(s)} = G_{v1}(s)\left[G_{11}(s) - \frac{G_{21}(s)G_{12}(s)}{G_{22}(s)}\right]$$
$$\frac{C_2(s)}{M_2(s)} = G_{v2}(s)\left[G_{22}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}(s)}\right] \qquad (12\text{-}3.5)$$

Es fácil demostrar que la ganancia de estado estacionario de los términos entre corchetes, obtenida haciendo $s = 0$ en las funciones de transferencia, es exactamente igual a las ganancias de lazo cerrado de la ecuación 12-2.6. En otras palabras, el efecto de los desacopladores perfectos sobre la ganancia del lazo es igual al efecto de cerrar ambos lazos sin desacopladores. Esto tiene sentido, dado que cada desacoplador mantiene cada variable controlada constante cuando la variable manipulada en el otro lazo cambia. Esto es justo lo que el controlador en el otro lazo hace, en estado estacionario, si incluye un modo integral.

Ejemplo 12-3.1 ***Diseño de un desacoplador para un tanque de mezclado.*** Diseñar un desacoplador lineal para el tanque de mezclado de la figura 12-1.1*a*. Despreciar las constantes de tiempo de las válvulas de control por ser pequeñas respecto de la constante de tiempo del tanque.

Solución Para obtener las funciones de transferencia del tanque, se escriben los balances totales y de sal. Suponiendo un mezclado perfecto, volumen y densidad constantes, y composiciones de entrada constantes,[1] las ecuaciones diferenciales son

$$w_1(t) + w_2(t) - w(t) = \frac{d}{dt}(\rho V) = 0$$
$$x_1(t)w_2(t) + x_2(t)w_2(t) - x(t)w(t) = \frac{d}{dt}[\rho V x(t)] \qquad (12\text{-}3.6)$$

donde ρ es la densidad de la solución, lb/ft^3, y V es el volumen de la solución dentro del tanque, ft^3. Los flujos $w_1(t)$, $w_2(t)$ y $w(t)$ están en lb/min, y las composiciones en fracción másica de sal. A continuación se hace la linealización y se toman las transformadas de Laplace, como en el capítulo 3, para obtener las funciones de transferencia:

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s)$$
$$X(s) = \frac{K_{x1}}{\tau s + 1}W_1(s) + \frac{K_{x2}}{\tau s + 1}W_2(s) \qquad (12\text{-}3.7)$$

[1]Las composiciones de entrada son las entradas de perturbaciones, pero se considerarán constantes para no complicar el análisis.

donde:

$$\tau = \frac{\rho V}{\bar{w}} \text{min}$$

$$K_{x1} = \frac{x_1 - \bar{x}}{\bar{w}} \frac{\text{mf}}{\text{lb/min}}$$

$$K_{x2} = \frac{x_2 - \bar{x}}{\bar{w}} \frac{\text{mf}}{\text{lb/min}}$$

Estas ganancias son las mismas que las de la ecuación 12-2.10 porque, dado que las condiciones base están en estado estacionario, se puede establecer que

$$\frac{x_2 - x_1}{\bar{w}} = \frac{x_2 - \bar{x}}{\bar{w}_1} = -\frac{x_1 - \bar{x}}{\bar{w}_2}$$

y $\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$.

Las funciones de transferencia que se han desarrollado concuerdan con el diagrama de bloques de la figura 12-3.2 con $C_1(s) = W(s)$, y $C_2(s) = X(s)$. Despreciando las constantes de tiempo de las válvulas de control, por la ecuación 12-3.7, las funciones de transferencia mostradas en los diagramas de bloques son

$$G_{11}(s) = 1 \qquad G_{12}(s) = 1$$

$$G_{21}(s) = \frac{K_{x1}}{\tau s + 1} \qquad G_{22}(s) = \frac{K_{x2}}{\tau s + 1}$$

$$G_{v1}(s) = K_{v1} \qquad G_{v2}(s) = K_{v2}$$

donde K_{v1} y K_{v2} son las ganancias de las válvulas en (lb/h)/%CO.

Los desacopladores se obtienen ahora sustituyendo las funciones de transferencia anteriores en las fórmulas de diseño de los desacopladores, ecuación 12-3.2,

$$D_{12}(s) = -\frac{G_{v2}(s)G_{12}(s)}{G_{v1}(s)G_{11}(s)} = -\frac{K_{v2}}{K_{v1}} \frac{\%\text{CO}_1}{\%\text{CO}_2}$$

$$D_{21}(s) = -\frac{G_{v1}(s)K_{x1}}{G_{v2}(s)K_{x2}} = \frac{K_{v1}\bar{w}_2}{K_{v2}\bar{w}_1} \frac{\%\text{CO}_1}{\%\text{CO}_2} \qquad \textbf{(12-3.8)}$$

donde se han sustituido las ganancias de la ecuación 12-2.10. En la figura 12-3.3 se muestra el diagrama de instrumentación para el tanque con el desacoplador lineal. En el diagrama, FY-1 implementa $D_{12}(s)$ y AY-2 implementa $D_{21}(s)$.

Ambos desacopladores son ganancias simples. Esto tiene sentido, ya que ambos flujos de entrada tienen exactamente el mismo efecto dinámico sobre el flujo de salida y su composición. El desacoplador $D_{12}(s)$ (FY-1) tiene ganancia negativa porque su propósito es mantener el flujo de salida constante cuando la segunda corriente de entrada cambia. Para ello, se requiere que el primer flujo cambie en la dirección opuesta en exactamente la misma cantidad. La ganancia del desacoplador corrige las capacidades diferentes de las dos válvulas.

El desacoplador $D_{21}(s)$ (AY-2) es positivo porque su propósito es mantener la composición de salida constante cuando ocurre un cambio en la primera corriente de entrada. Para mantener la composición de salida constante, el flujo de la corriente concentrada debe cambiar en la misma dirección que el flujo de la corriente diluida, y la razón de las dos corrientes debe permanecer constante. Nótese que esto es justo lo que hace el desacoplador, pues su ganancia es la razón de las dos corrientes corregidas para las capacidades de las dos válvulas.

Para ilustrar lo anterior, supóngase que la válvula 2 tiene la mitad de la ganancia (capacidad) de la válvula 1, $K_{v1} = 2\,K_{v2}$, y que, en las condiciones base, el flujo 1 es 50% mayor que el flujo 2, $\bar{w}_1 = 1.5\,\bar{w}_2$. Entonces, si el controlador de composición cambia el valor de su salida en 1%, el desacoplador $D_{12}(s)$, con una ganancia de $-1/2$, cambia la señal a la válvula 1 en -0.5%. Debido a que la válvula 1 tiene el doble de ganancia que la válvula 2, el flujo de la corriente 1 disminuirá exactamente la misma cantidad que la corriente 2 se incrementó, manteniendo constante el flujo total. Si ahora el controlador de flujo cambia su valor de salida en 1%, el desacoplador $D_{21}(s)$, con una ganancia de $(2)(1/1.5) = 1.33$, cambia el valor de la señal a la válvula 2 en 1.33%. Debido a que la válvula 2 tiene la mitad de la ganancia de la válvula 1, el cambio en el flujo de la corriente 2 es de $1.33/2 = 0.67$ del cambio en el flujo de la corriente 1. Esto mantiene la relación de flujo de la corriente 2 con respecto de la corriente 1 en 0.67, es decir, el flujo de la corriente 1 sigue siendo 50% mayor que el flujo de la corriente 2, manteniendo la composición de salida constante.

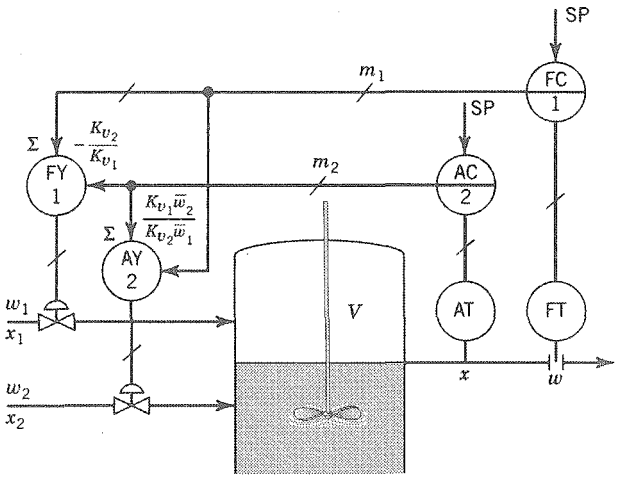


Figura 12-3.3 Diagrama de instrumentación para un desacoplador lineal en un tanque de mezclado.

Apareamiento y desacoplamiento de variables

Se ha mostrado que el desacoplamiento tiene el mismo efecto sobre cada lazo que el que tenían los lazos con interacción antes del desacoplamiento. Debido a ello, y a que la acción del desacoplamiento puede bloquearse si la válvula sobre la que actúa se lleva a un punto de saturación, es importante parear correctamente las variables controladas y manipuladas, aunque se use un desacoplador.

En el ejemplo anterior las variables están pareadas correctamente, con la corriente 1, el flujo mayor, controlando el flujo del producto, y con la corriente 2, el flujo menor, controlando la composición. Nótese que esto hace que la razón de las dos corrientes sea menor que la unidad, por lo que la acción del controlador de flujo sobre la corriente 1 que varía tiene un efecto mayor sobre el flujo del producto que la acción del desacoplador. Considérese lo que sucedería si la razón de la corriente 2 y la corriente 1 fuera 10 y se usara el mismo apareamiento: el desacoplador tendría un efecto 10 veces mayor sobre el flujo del producto que la acción directa del controlador. Se puede establecer que ocurriría lo mismo con el controlador de composición.

Desacoplamiento parcial

No siempre es necesario desacoplar todas las interacciones. Cuando el control de una de las variables es más importante que el de las demás, se obtendría un mejor control de la variable si sólo se implementan los términos del desacoplador que mantienen constante esa variable implementada. Supóngase que en el ejemplo del tanque de mezclado es más importante mantener constante la composición del producto que el flujo del mismo. Entonces sólo se implementaría el desacoplador $D_{21}(s)$ (AY-2 en la figura 12-3.3). Con esto se evita que cambie el valor de la composición cuando el controlador de flujo entra en acción. Cuando el controlador de la composición actúa, se permite que el flujo varíe y el controlador de flujo debe actuar para regresar el valor del flujo a su referencia. Sin embargo, esta acción del controlador de flujo no afectará la composición ya que el desacoplador la compensa.

En el ejemplo siguiente se muestra cómo diseñar un desacoplador a partir de modelos simples del proceso.

Ejemplo 12-3.2 ***Diseño del desacoplador para un evaporador.*** En el evaporador de la figura 12-3.4 la composición del producto, x_P, y el flujo de alimentación, w_F, se controlan manipulando la señales para controlar las válvulas de las líneas de vapor y del producto, m_S y m_P. Como se muestra en el diagrama, aunque hay una válvula de control en la línea de alimentación, esta válvula debe manipular el nivel en el evaporador (LC). Esto se debe a que la alimentación es el mayor de los tres flujos en el sistema y por tanto ejerce la influencia mayor sobre el nivel. El nivel en un evaporador tipo calandria debe ser muy riguroso, debido a que tiene una gran influencia sobre la tasa de transferencia de calor.

Se realizan pruebas escalón de las señales a las válvulas de vapor y del producto, m_S y m_P, una a la vez, y se registran cuidadosamente las respuestas del flujo de alimentación y de las composiciones del producto. Los modelos de primer orden más tiempo muerto resultantes son:

$$G_{FS}(s) = \frac{0.84e^{-0.30s}}{1.05s+1} \qquad G_{FP}(s) = \frac{0.20e^{-0.03s}}{0.65s+1}$$

$$G_{xS}(s) = \frac{1.68e^{-0.80s}}{2.70s+1} \qquad G_{xP}(s) = \frac{-1.60e^{-0.50}}{2.97s+1}$$

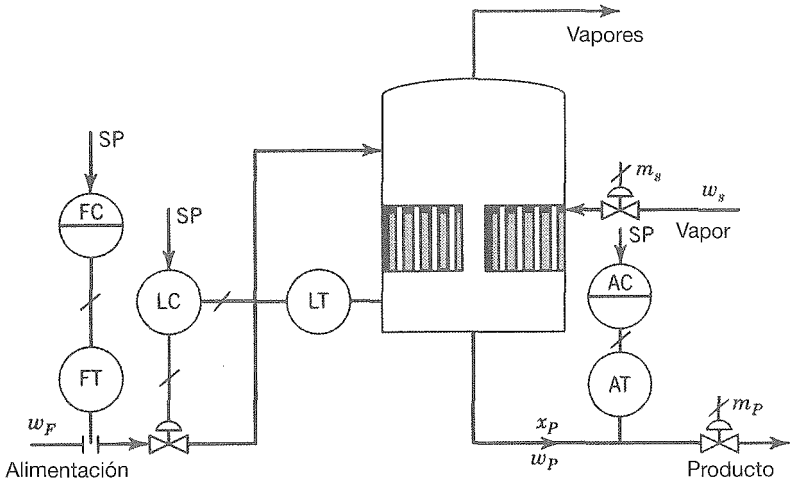


Figura 12-3.4 Sistema de control para el evaporador del ejemplo 12-3.2.

donde el primer subíndice F denota la tasa de alimentación o x para el por ciento másico de producto, y el segundo subíndice S denota el vapor o P para el producto. Cada función de transferencia está en unidades de %TO/%CO; es decir, combinan la funciones de transferencia de la válvula de control, del proceso y del sensor-transmisor. Calcular las ganancias relativas, parear las variables controladas y manipuladas de tal forma que se minimice el efecto de interacción, y diseñar los desacopladores.

Solución La ganancias de lazo abierto en estado estacionario se obtienen haciendo $s = 0$ en las funciones de transferencia del modelo, y las ganancias relativas se calculan con la ecuación 12-2.7. En forma matricial son

K	m_S	m_P
w_F	0.84	0.20
x_P	1.68	−1.60

μ	m_S	m_P
w_F	0.80	0.20
x_P	0.20	0.80

En el apareamiento que minimiza la interacción, la válvula de control de vapor controla el flujo de alimentación y la válvula de la corriente del producto controla la composición del producto. La ganancia relativa para este apareamiento es 0.8.

Los desacopladores se diseñan utilizando la ecuación 12-3.3, ya que se han combinado las funciones de transferencia de todos los dispositivos de campo. Las funciones de transferencia de los desacopladores son

$$D_{12}(s) = -\frac{G_{FP}(s)}{G_{FS}(s)} = -\frac{0.20}{0.84}\left(\frac{1.05s+1}{0.65s+1}\right)e^{0.27s}$$

$$D_{21}(s) = -\frac{G_{xS}(s)}{G_{xP}(s)} = \frac{1.68}{1.60}\left(\frac{2.97s+1}{2.70s+1}\right)e^{-0.30s}$$

El primer desacoplador tiene un tiempo muerto negativo que no se puede implementar. Para proporcionar el adelanto necesario en la acción del desacoplador, se incrementa el valor del adelanto a 1.05 + 0.27 = 1.32 min. Con esto, el desacoplador se reduce a una unidad de adelanto-atraso simple con una ganancia de −0.20/0.84 = −0.24, un adelanto de 1.32 min y un retardo de 0.65 min. Aunque la compensación del tiempo muerto del segundo desacoplador es negativa y podría implementarse, no se recomienda el uso del tiempo muerto en un desacoplador. Esto se debe a que, como ya se vio, el desacoplador forma parte del lazo de retroalimentación y el tiempo muerto disminuye la controlabilidad del mismo. Para eliminar el término del tiempo muerto y mantener el mismo retardo total, se disminuye el adelanto a 2.97 − 0.30 = 2.67 min. Con esto el adelanto se hace casi igual al retardo, lo que significa que el segundo desacoplador puede ser una ganancia simple.

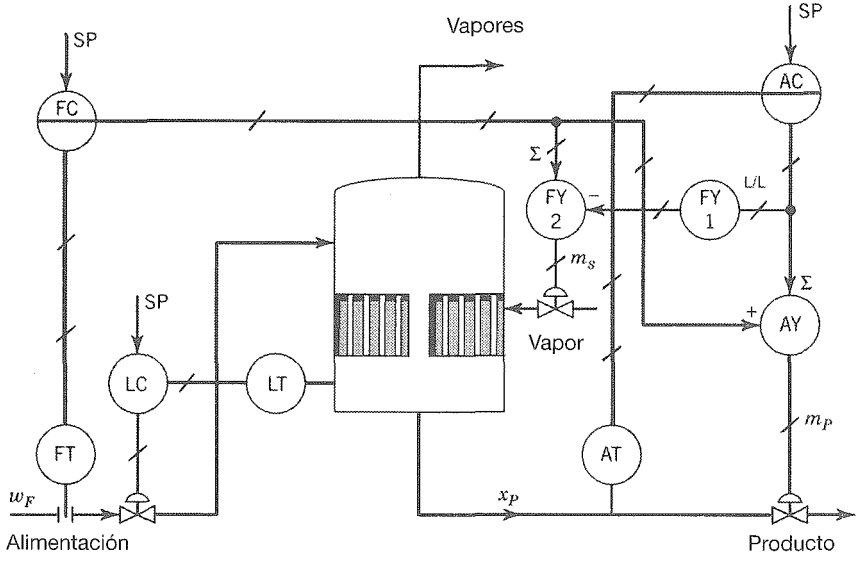


Figura 12-3.5 Diagrama de instrumentación para un desacoplador lineal en un evaporador.

Los desacopladores resultantes son

$$D_{12}(s) = -0.24\left(\frac{1.32s+1}{0.65s+1}\right)\frac{\%CO_S}{\%CO_P}$$

$$D_{21}(s) = \frac{1.68}{1.60} = 1.05\frac{\%CO_P}{\%CO_S}$$

En la figura 12-3.5 se muestra el diagrama de instrumentación para los desacopladores del evaporador. El propósito del primer desacoplador, $D_{12}(s)$ (FY-2 en el diagrama), es mantener constante el flujo de alimentación cuando haya un cambio en el flujo del producto. Su ganancia es negativa porque un incremento en el flujo del producto requiere una disminución en el flujo de vapor para reducir la tasa de generación de vapor. Si estos dos efectos se cancelan entre sí, como será el caso si la ganancia del desacoplador es correcta, el nivel en el evaporador, y por consiguiente el flujo de alimentación, no cambiará. Este desacoplador requiere un adelanto neto porque la tasa de vapor tiene un retardo con respecto al cambio del flujo de vapor mientras que el flujo del producto tiene un efecto inmediato sobre el nivel.

El propósito del segundo desacoplador, $D_{21}(s)$ (AY), es mantener constante la composición del producto cuando el flujo de vapor cambia. Su ganancia es positiva porque cuando el flujo de vapor se incrementa también lo hace la tasa de vapor, causando que la concentración del producto se incremente. Para evitar que ocurra este incremento, el desacoplador aumentará el flujo del producto justo lo suficiente para hacer que el controlador del nivel incremente el flujo de alimentación diluido que llega al evaporador. Este incremento del flujo de alimentación disminuirá la composición del producto, equilibrando el efecto del incremento en la tasa de vapor. No se necesita compensación dinámica en este desacoplador ya que el retardo entre el vapor y el flujo de vapores concuerda aproximadamente con el retardo conjunto del flujo de alimentación en la composición.

En la práctica es más importante mantener constante la composición del producto que el flujo de alimentación. Así, el desacoplamiento parcial es lo más indicado, utilizando tan sólo el término $D_{21}(s)$ (AY), y dejando fuera el término del otro desacoplador (FYs).

Desacoplamiento estático

Como en el control feedforward, el desacoplamiento se puede llevar a cabo de manera estática y dinámica. El desacoplamiento estático se lleva a cabo dejando fuera los términos dinámicos. La ventaja es que sólo se necesitan las ganancias de estado estacionario de las funciones de transferencia para diseñarlo. Las ganancias de estado estacionario se pueden obtener fuera de línea por los métodos analizados para la determinación de las ganancias relativas.

12-3.2 Diseño de desacopladores para sistemas $n \times n$

El procedimiento simple para diseñar desacopladores para sistemas 2×2, ecuación 12-3.1, no se puede extender a sistemas con más de dos objetivos de control con interacción. De nueva

cuenta es necesario recurrir a la notación matricial para poder diseñar un procedimiento para un sistema $n \times n$ general. Sin embargo, incluso con la notación matricial, el diseño de desacopladores no es tan simple para estos sistemas de orden superior debido a la gran cantidad de desacopladores requeridos. Por ejemplo, para un sistema 4×4, es necesario diseñar e implementar 12 desacopladores.

Por las reglas de la multiplicación de matrices, se puede establecer que la relación entre las variables controladas y manipuladas en un sistema $n \times n$ desacoplado es

$$\begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \\ \cdots \\ C_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{P11}(s) & G_{P12}(s) & \cdots & G_{P1n}(s) \\ G_{P21}(s) & G_{P22}(s) & \cdots & G_{P2n}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{Pn1}(s) & G_{Pn2}(s) & \cdots & G_{Pnn}(s) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & D_{12}(s) & \cdots & D_{1n}(s) \\ D_{21}(s) & 1 & \cdots & D_{2n}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{n1}(s) & D_{n2}(s) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(s) \\ M_2(s) \\ \cdots \\ M_n(s) \end{bmatrix}$$

o, de manera equivalente,

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{G}_P(s)\mathbf{D}(s)\mathbf{m}(s) \tag{12-3.9}$$

donde los términos de la matriz $\mathbf{G}_P(s)$ combinan las funciones de transferencia de todos los elementos de campo. El objetivo de la matriz del desacoplador $\mathbf{D}(s)$ es obtener el siguiente sistema desacoplado:

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{G}'_P(s)\mathbf{m}(s) = \begin{bmatrix} G'_{P11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G'_{P22}(s) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & G'_{Pnn}(s) \end{bmatrix} \mathbf{m}(s)$$

en otras palabras, una matriz diagonal. Comparando el resultado deseado con la ecuación 12-3.9, se encuentra que

$$\mathbf{G}_P(s)\mathbf{D}(s) = \mathbf{G}'_P(s)$$

Después se despeja la matriz del desacoplador multiplicando previamente por la inversa de la matriz de funciones de transferencia del proceso:

$$\mathbf{D}(s) = \mathbf{G}_P^{-1}(s)\mathbf{G}'_P(s) \tag{12-3.10}$$

Ésta es la fórmula de diseño para desacoplar un sistema $n \times n$. La ecuación matricial representa n^2 ecuaciones independientes. Las n^2 incógnitas son los $(n^2 - n)$ elementos no diagonales de $\mathbf{D}(s)$ y los n elementos de la matriz diagonal $\mathbf{G}'_P(s)$.

La ecuación 12-3.10 no es fácil de resolver debido a que requiere la inversión de una matriz de funciones de transferencia. Por lo anterior, los sistemas de control multivariable modernos basados en computadora se diseñan por métodos diferentes. Un método popular es el Control por Matriz Dinámica, DMC (Cutler y Ramaker, 1979).

Si se puede obtener la inversa $\mathbf{B}(s) = \mathbf{G}_P^{-1}(s)$, entonces los elementos de la matriz del desacoplador se calculan de la siguiente manera:

$$D_{ij}(s) = \frac{B_{ij}(s)}{B_{jj}(s)} \tag{12-3.11}$$

Este cálculo obliga a los términos de la diagonal de la matriz del desacoplador a ser la unidad. En el siguiente ejemplo se muestra cómo se utiliza la ecuación 12-3.10 para diseñar un desacoplador estático.

Ejemplo 12-3.3 ***Desacoplador estático para un sistema de mezclado de gasolina.*** Diseñar un desacoplador estático para el sistema de control de mezclado de gasolina del ejemplo 12-2.5.

Solución Como el desacoplador es estático, las ganancias de estado estacionario de lazo abierto se pueden sustituir en la función de transferencia del proceso en la ecuación 12-3.10. Sin embargo, antes de utilizar esta ecuación para diseñar el desacoplador, se debe reordenar la matriz de ganancias para conformar el apareamiento que minimice la interacción. Recuérdese del ejemplo 12-2.5 que el apareamiento correcto es aquél en el que la corriente 2 controla la tercera variable y la corriente 3 controla la segunda variable. Con este apareamiento, las columnas 2 y 3 de la matriz de ganancias de lazo abierto deben intercambiarse:

	f_1	f_3	f_2
x	0.167	0.083	−0.117
y	−0.033	−0.067	0.067
f	1	1	1

Cuando se invierte esta matriz, la inversa es la misma matriz que la del ejemplo 12-2.5, con los dos últimos renglones intercambiados:

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 7.500 & 11.250 & 0.125 \\ -5.625 & -15.938 & 0.406 \\ -1.875 & 4.688 & 0.469 \end{bmatrix}$$

De la ecuación 12-3.11 se obtiene la matriz del desacoplador

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -0.71 & 0.27 \\ -0.75 & 1 & 0.87 \\ -0.25 & -0.29 & 1 \end{bmatrix}$$

donde todos los números están en (klb/día)/(klb/día). Suponiendo que las señales de control están en estas unidades en vez de en %CO, las ecuaciones que se necesitan para llevar a cabo el desacoplamiento son

$$f_1^{\text{set}} = m_1 - 0.71m_2 + 0.27m_3$$
$$f_3^{\text{set}} = -0.75m_1 + m_2 + 0.87m_3$$
$$f_2^{\text{set}} = -0.25m_1 - 0.29m_2 + m_3$$

donde m_1, m_2 y m_3 están en klb/día, al igual que las referencias de flujo. En la figura 12-3.6 se presenta el diagrama de instrumentación requerido para implementar estos cálculos. Nótese que la corriente 3, la de la gasolina rectificada, está manipulada directamente por m_2, la salida del controlador de presión de vapor Reid, y que la corriente 2, la gasolina de primera destilación, está manipulada directamente por m_3, la salida del controlador del flujo de gasolina. Éste es el apareamiento que se encontró en el ejemplo 12-2.5.

Si cada corriente manipulada tiene el mismo efecto dinámico sobre su variable controlada que las demás, el desacoplador estático es lo único que se necesita para desacoplar los tres objetivos de control. La matriz de funciones de transferencia desacoplada es entonces la matriz producto **KD**, la cual es una matriz diagonal con términos en la diagonal 0.133, –0.063 y 2.133. Las funciones de transferencia del sistema desacoplado son

$$X(s) = 0.133M_1(s)$$
$$Y(s) = -0.063M_2(s)$$
$$F(s) = 2.133M_3(s)$$

Estas ganancias son dimensionales, ya que provienen de las ganancias de proceso que están en unidades de ingeniería. Esto significa que no se pueden comparar unas con otras.

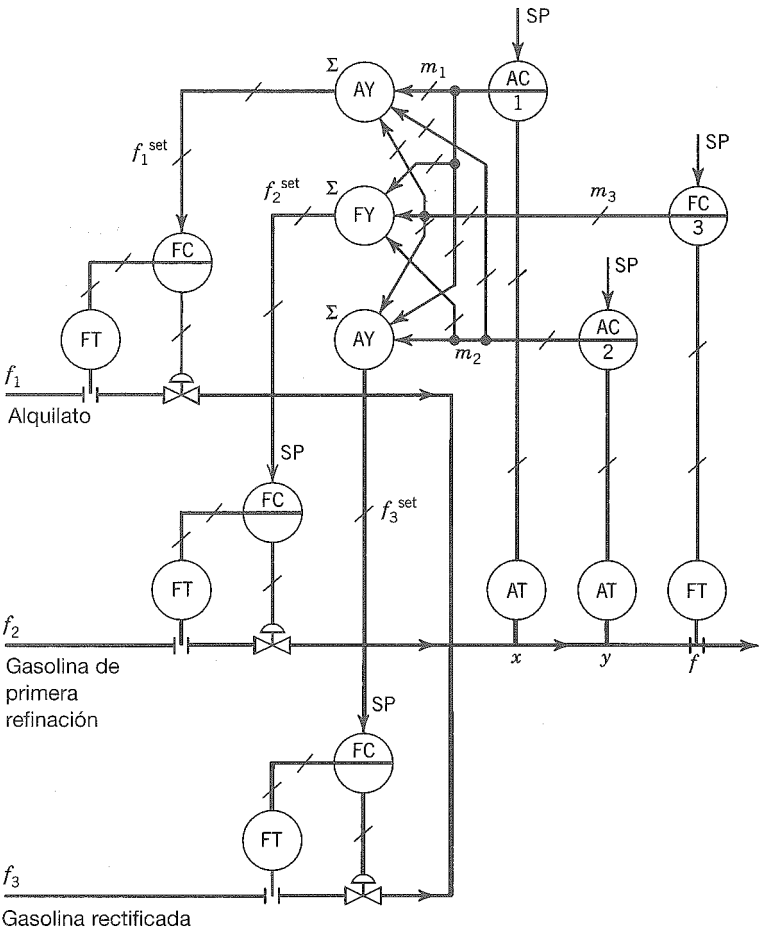


Figura 12-3.6 Diagrama de instrumentación para un desacoplador lineal estático en un sistema de mezclado de gasolina.

12-3.3 Diseño de desacopladores a partir de principios básicos

Las técnicas para el diseño de desacopladores analizadas previamente se derivan de diagramas de bloques del sistema de control multivariable. Puesto que los diagramas de bloques muestran únicamente relaciones lineales entre las variables, sólo se pueden diseñar desacopladores lineales por este procedimiento. En esta sección se presenta un ejemplo del diseño de desacopladores a partir de modelos de procesos obtenidos de la aplicación de principios básicos de ingeniería al proceso. El procedimiento es básicamente el mismo al presentado en el capítulo 11 para diseñar controladores feedforward. La única diferencia es que en el diseño de desacopladores las perturbaciones de un lazo son las variables manipuladas para los otros lazos.

Ejemplo 12-3.4 ***Desacoplador no lineal para un tanque de mezclado.*** Diseñar un desacoplador para el tanque de mezclado de la figura 12-1.1*a* a partir de las ecuaciones del modelo básico que representan al tanque.

Solución En el diseño del desacoplador se ignoran las perturbaciones, que para el tanque son las composiciones de los caudales de entrada. Después de identificar las variables controladas y manipuladas, se escriben los balances de materia y energía simples que relacionan estas variables. Para el tanque de mezclado, los balances de masa total y de sal dan como resultado la ecuación 12-1.1, la cual se puede reordenar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 \\ x &= \left(\frac{w_1}{w_1 + w_2}\right)x_1 + \left(\frac{w_2}{w_1 + w_2}\right)x_2 \end{aligned} \tag{12-3.12}$$

Shinskey (1981) propuso la idea de asignarle a la salida del controlador el significado físico de la variable, o combinación de variables, del proceso que ejerce la mayor influencia sobre la variable controlada. Por la fórmula precedente se observa que el flujo del producto w resulta más afectado *por la suma de los dos flujos de entrada*, en vez de por cualquiera de ellos. Además, la composición del producto resulta más afectada por las razones de los flujos de entrada y el flujo total. Sin embargo, estas dos razones no son independientes entre sí, ya que su suma tiene que ser la unidad. Por lo tanto, se debe elegir una de ellas. De acuerdo con los resultados del análisis de ganancia relativa para el tanque, el menor de los dos flujos deberá controlar la composición del producto (véase el ejemplo 12-2.3). Este resultado se extiende a las razones, por lo que la menor de ellas deberá ser la que controle la composición. Supóngase que la corriente 2 es menor que la corriente 1. Entonces, es necesario hacer que las salidas de los dos controladores tengan el siguiente significado:

$$\begin{aligned} m_1 &= w_1 + w_2 \\ m_2 &= \frac{w_2}{w_1 + w_2} = \frac{w_2}{m_1} \end{aligned} \tag{12-3.13}$$

donde m_1 y m_2 son, respectivamente, las salidas del controlador de flujo y de composición de producto, la cuales se suponen expresadas en las unidades de ingeniería apropiadas.

La implementación de cualquier esquema de control no lineal es más precisa si los controladores de flujo se instalan en las corrientes manipuladas de tal manera que las salidas de los controladores sean las referencias de estos controladores de flujo. El esquema del desacoplador consiste entonces en el cálculo de las referencias de las dos corrientes de entrada, w_1^{set} y w_2^{set}. Por la ecuación 12-3.13, estas referencias son

$$\begin{aligned} w_1^{\text{set}} &= m_1 - w_2 \\ w_2^{\text{set}} &= m_1 m_2 \end{aligned} \tag{12-3.14}$$

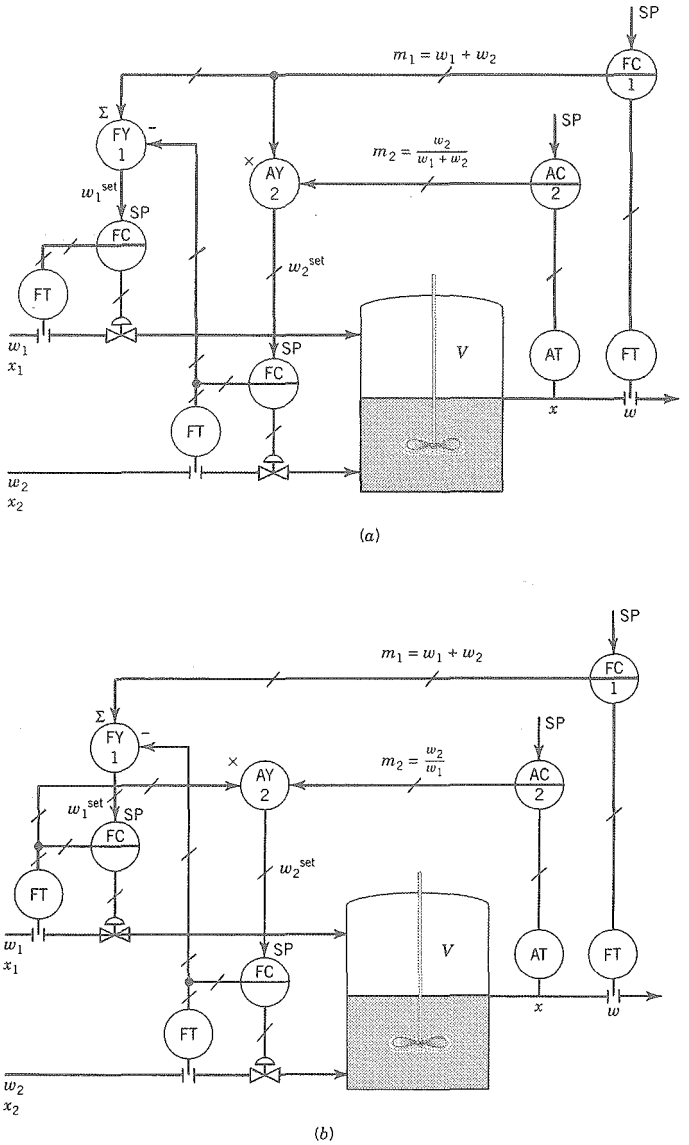


Figura 12-3.7 Desacoplador no lineal para tanque de mezclado. (*a*) Combinando las salidas de los controladores. (*b*) Usando un controlador de relación.

La implementación de estas ecuaciones se muestra en la figura 12-3.7*a*. Nótese que el flujo real w_2, de la señal del transmisor de flujo, se usa en el cálculo de w_1^{set}. Con esto se asegura que se calcula la referencia correcta de la corriente 1 aun cuando el controlador de flujo de la corrien-

te 2 no pueda mantener su referencia. Uno podría preguntarse, ¿por qué no usar también el flujo total medido w en vez de m_w en las fórmulas? Shinskey (1996) señala que si se utiliza el flujo de salida para calcular las referencias de los flujos de entrada, se crea un lazo de retroalimentación positivo alrededor del tanque (un incremento en el flujo de salida incrementa el flujo de entrada, lo cual a su vez incrementa el flujo de salida, y así sucesivamente). Esta retroalimentación positiva deriva en inestabilidad y no deberá implementarse.

El esquema de desacoplamiento de la figura 12-3.7*a* se puede simplificar al esquema de la figura 12-3.7*b*. La diferencia consiste en que la salida del controlador de composición es la razón w_2/w_1 de las dos corrientes de entrada. Es fácil demostrar que esta razón más simple sigue desacoplando los dos lazos porque hace que la composición del producto sea independiente del flujo total. Este esquema también hace posible utilizar únicamente el desacoplamiento parcial dejando fuera el sumador que calcula w_1^{set}. Si se hace esto, la composición del producto es independiente del flujo total, pero el flujo de producto es afectado por los cambios en la composición.

12-4 CONTROL MULTIVARIABLE CONTRA OPTIMIZACIÓN

En el diseño de sistemas de control para sistemas multivariables es común instalar un controlador por retroalimentación que pueda manipularse para cada flujo en el proceso. Ésta no siempre es una buena práctica, en especial cuando no es necesario mantener la variable controlada en una referencia específica. Una alternativa para proporcionar una variable controlada para cada variable manipulada es el uso de variables manipuladas adicionales para optimizar la operación del proceso.

Considérese la columna de destilación del ejemplo 12-2.4. En ese ejemplo se encontró que el esquema que intenta controlar las composiciones del fondo y del destilado tiene pocas posibilidades de éxito debido a que la acción de cada controlador casi es cancelada exactamente por la interacción con el otro. Supóngase que en realidad no era importante mantener la composición del fondo en 5% molar de benceno, sino que este controlador se hubiera incluido tan sólo para que las pérdidas de benceno en el fondo no se hicieran muy altas. Si el benceno es el producto importante de la columna, pérdidas excesivas de benceno en el fondo representarían beneficios disminuidos debido a las bajas tasas de destilación. Sin embargo, el valor económico de la pérdida de benceno en la corriente del fondo debe equilibrarse con el costo del vapor requerido para proveer calor al recalentador. Composiciones más bajas de benceno en el fondo requieren una tasa de calor mayor en el recalentador y por tanto mayores costos de vapor.

Es posible aplicar un esquema de optimización simple a la columna eliminando el controlador de composición del fondo y ajustando la tasa de vapor en el valor que maximice la tasa de beneficios. La tasa de beneficios es la diferencia entre los valores de los productos y los costos de la alimentación, el vapor y el refrigerante del condensador:

$$\text{Tasa de beneficios} = V_D w_D + V_B w_B - V_R Q_R - V_C Q_C - V_F w_F$$

donde V son los valores económicos en \$/klb o \$/MBtu, w son los flujos másicos en klb/h, Q son las tasas de calor en MBtu/h, y los subíndices se refieren a destilado (D), fondo (B), recalentador (R), condensador (C) y alimentación (F).

Se han propuesto varios métodos para determinar la tasa de calor en el recalentador que maximice la tasa de beneficios, pero rebasan el alcance de este texto. Véase, por ejemplo, el artículo de Moore y Corripio (1991).

12-5 ANÁLISIS DINÁMICO DE SISTEMAS MULTIVARIABLES

Para analizar la respuesta dinámica de un sistema de control multivariable se deben determinar las funciones de transferencia del sistema. En esta sección se muestra que la ecuación característica de un conjunto de lazos de control con interacción no tiene las mismas raíces que las ecuaciones características de los lazos individuales considerados por separado. Debido a la complejidad del análisis de diagramas de bloques con lazos múltiples, tan sólo se examina la función de transferencia de un sistema 2 × 2 a fin de sacar algunas conclusiones, y después se ilustran utilizando ejemplos de simulaciones.

12-5.1 Análisis dinámico de un sistema 2 × 2

En la figura 12-5.1 se muestra el diagrama de bloques general para un sistema de control 2 × 2 en el que los dispositivos de campo –válvulas, proceso y transmisor– se han combinado en la función de transferencia del proceso $G_{Pij}(s)$. Para simplificar, se han omitido las perturbaciones en el diagrama.

Para obtener las funciones de transferencia de lazo cerrado del diagrama, se utiliza primero el álgebra de diagramas de bloques para escribir las funciones de transferencia de las dos salidas en términos de las dos entradas de la referencia.

$$\begin{aligned} C_1(s) &= G_{P11}(s)M_1(s) + G_{P12}(s)M_2(s) \\ &= G_{P11}(s)G_{c1}(s)[R_1(s) - C_1(s)] + G_{P12}(s)G_{c2}(s)[R_2(s) - C_2(s)] \\ C_2(s) &= G_{P21}(s)M_1(s) + G_{P22}(s)M_2(s) \\ &= G_{P21}(s)G_{c1}(s)[R_1(s) - C_1(s)] + G_{P22}(s)G_{c2}(s)[R_2(s) - C_2(s)] \end{aligned} \tag{12-5.1}$$

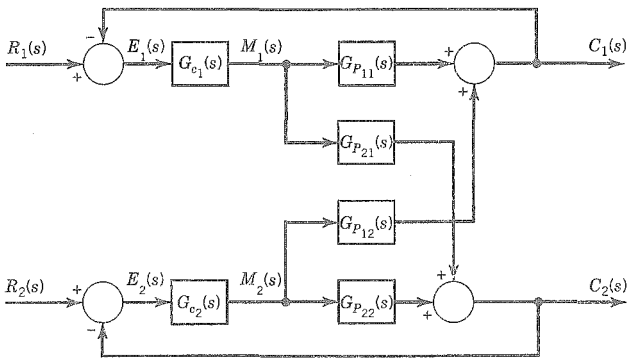


Figura 12-5.1 Diagrama de bloques de un sistema 2 × 2 general.

Después de una larga manipulación algebraica, las cuatro funciones de transferencia individuales se pueden obtener como sigue. Sea

$$\Delta = 1 + G_{c1}(s)G_{P11}(s) + G_{c2}(s)G_{P22}(s) - G_{c1}(s)G_{P21}(s)G_{c2}(s)G_{P12}(s) + G_{c1}(s)G_{P11}(s)G_{c2}(s)G_{P22}(s) \tag{12-5.2}$$

Entonces

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} = \frac{G_{c1}(s)G_{P11}(s)[1 + G_{c2}(s)G_{P22}(s)] - G_{c1}(s)G_{P21}(s)G_{c2}(s)G_{P12}(s)}{\Delta}$$

$$\frac{C_2(s)}{R_1(s)} = \frac{G_{c1}(s)G_{P21}(s)}{\Delta}$$

$$\frac{C_1(s)}{R_2(s)} = \frac{G_{c2}(s)G_{P12}(s)}{\Delta}$$

$$\frac{C_2(s)}{R_2(s)} = \frac{G_{c2}(s)G_{P22}(s)[1 + G_{c1}(s)G_{P11}(s)] - G_{c2}(s)G_{P12}(s)G_{c1}(s)G_{P21}(s)}{\Delta} \tag{12-5.3}$$

Como en cualquier sistema dinámico, la respuesta está determinada por la localización de las raíces del polinomio del denominador o de la ecuación característica. Para obtener la ecuación característica tan sólo se iguala el denominador con cero: $\Delta = 0$. Es ilustrativo reordenar la ecuación 12-5.2 en la siguiente forma:

$$\Delta = [1 + G_{c1}(s)G_{P11}(s)][1 + G_{c12}(s)G_{P22}(s)] - G_{c1}(s)G_{P21}(s)G_{c2}(s)G_{P12}(s) = 0 \tag{12-5.4}$$

Las raíces de esta ecuación determinan la estabilidad y la respuesta del sistema 2×2 con interacción. Como en cualquier otro sistema, la respuesta será oscilatoria si hay por lo menos un par de raíces conjugadas complejas, y será inestable si cualquiera de las raíces reales es positiva, o si un par de raíces conjugadas complejas tiene una parte real positiva (ver la sección 2-3). Además, como el denominador es el mismo para las cuatro funciones de transferencia, las características de las respuestas son las mismas para las dos variables controladas.

La ecuación 12-5.4 indica lo siguiente:

- La sintonización de cada controlador afecta la respuesta de ambas variables controladas, porque afecta las raíces de la ecuación característica común.
- El efecto de interacción de un lazo se puede eliminar interrumpiendo el otro lazo. Por ejemplo, si el controlador 2 se cambia a modo manual, $G_{c2}(s) = 0$, y la ecuación característica del sistema es

$$1 + G_{c1}(s)G_{P11}(s) = 0 \tag{12-5.5}$$

Ésta es la ecuación característica del lazo de control 1 considerado por separado. El cambio en la ecuación característica significa que si el controlador 1 se sintoniza con el con-

trolador 2 en modo manual, la respuesta del lazo de control 1 cambiará cuando el lazo de control 2 se vuelva a poner en modo automático. Del mismo modo, si el controlador 1 se ajusta en modo manual, $G_{c1}(s) = 0$, y la ecuación característica del sistema es

$$1 + G_{c2}(s)G_{P22}(s) = 0 \tag{12-5.6}$$

Ésta es la ecuación característica del lazo de control 2 considerado por separado.

- Para que la interacción afecte la respuesta de los lazos, debe actuar en ambos sentidos. Es decir, cada variable manipulada debe afectar la variable controlada del otro lazo. Esto se debe a que, si cualquiera de las dos funciones de transferencia "cruzadas" del proceso, $G_{P12}(s)$ o $G_{P21}(s)$, es igual a cero, la ecuación característica del sistema es

$$[1 + G_{c1}(s)G_{P11}(s)][1 + G_{c2}(s)G_{P22}(s)] = 0$$

Las raíces de esta ecuación característica son las mismas que las raíces de las ecuaciones características de cada lazo de retroalimentación considerado por separado, ecuaciones 12-5.5 y 12-5.6. Por tanto, no habría interacción. Nótese, sin embargo, que una de las variables manipuladas seguirá afectando a ambas variables controladas.

Se invita al lector a estudiar la ecuación 12-5.4 para obtener un mejor entendimiento de cómo estas importantes propiedades de los sistemas con interacción se siguen de la ecuación característica del sistema.

En el siguiente ejemplo se muestra el efecto de la interacción sobre la respuesta de lazo cerrado del sistema utilizando una simulación.

Ejemplo 12-5.1 ***Control por retroalimentación de un mezclador.*** Estudiar el efecto de la interacción sobre la respuesta dinámica del tanque de mezclado de la figura 12-1.1*a* utilizando una simulación. El tanque almacena 1000 lb de solución, y las composiciones de las corrientes de entrada son de 10% y 30% en masa de sal, respectivamente. Se desea producir 100 lb/min de solución de producto con una concentración de 20% en masa de sal. Las válvulas de control son lineales con caídas de presión constantes y dimensionadas para entregar 150 lb/min cuando se encuentran totalmente abiertas. Cada una de ellas tiene una constante de tiempo de 0.1 min. El transmisor de flujo es lineal con un rango de 0 a 150 lb/min y con una constante de tiempo de 0.1 min. El transmisor del analizador tiene un rango de 5% a 35% en masa de sal, y se puede representar con un retardo de primer orden con una constante de tiempo de 5.0 min. Suponer que el controlador de composición es PI sintonizado para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto con el controlador de flujo en modo manual. ¿Cómo cambia la razón de asentamiento cuando el controlador de flujo, también PI, se cambia a modo automático?

Solución A partir de los balances de masa en estado estacionario, ecuación 12-1.1, se determina que los flujos de entrada de diseño son cada uno igual a 50 lb/min. Las ganancias relativas, determinadas en el ejemplo 12-2.3, son, por la ecuación 12-2.11, iguales a 0.50, sin importar

cómo se encuentren pareados los lazos. Se supondrá que el controlador de flujo manipula la corriente diluida y que el controlador de composición manipula el caudal concentrado.

Suponiendo masas de solución constantes en el tanque y un mezclado perfecto, las ecuaciones que describen el tanque se obtienen a partir del balance total y del soluto en el tanque:

$$\frac{dM}{dt} = w_1(t) + w_2(t) - w(t) = 0$$

$$\therefore w(t) = w_1(t) + w_2(t)$$

$$M\frac{dx(t)}{dt} = w_1(t)x_1(t) + w_2(t)x_2(t) - w(t)x(t)$$

$$= w_1(t)[x_1(t) - x(t)] + w_2(t)[x_2(t) - x(t)]$$

Estas ecuaciones se resuelven en MATLAB para simular el tanque, y los transmisores, controladores y válvulas de control se simulan como se describe en la sección 13-4. Las condiciones iniciales son $w(0) = 100$ lb/min, $x(0) = 20\%$ en masa, $w_1(0) = 50$ lb/min, $w_2(0) = 50$ lb/min.

Con el controlador de flujo abierto, el controlador de composición se sintoniza para la respuesta con razón de asentamiento de un cuarto. Los parámetros de sintonización resultantes son $K_{c2} = 15$ %CO/%TO, y $\tau_{I2} = 12$ min. El controlador de flujo se sintoniza con una ganancia de 0.9 %CO/%TO, y un tiempo integral de 0.1 min, valores típicos para lazos de control de flujo.

En la figura 12-5.2 se muestran las respuestas de la composición y el flujo del producto, así como de los flujos de entrada, a un cambio escalón de 30% a 31% en masa en la composición

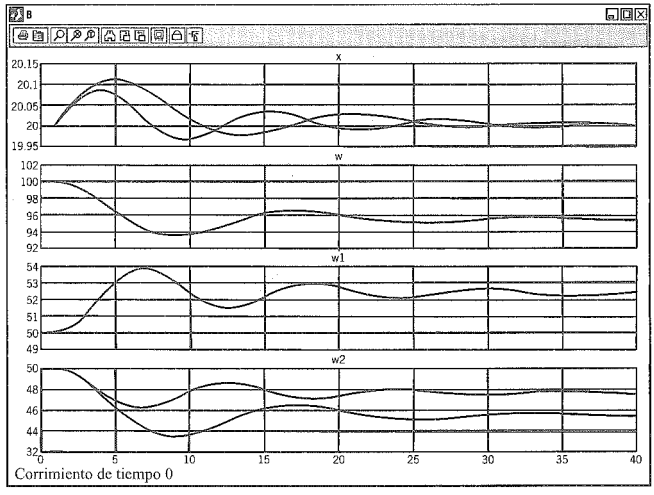


Figura 12-5.2 Respuestas de las variables en el mezclador a un aumento de 1% en masa en la composición de la solución concentrada. Control de composición del producto contra el control de composición del producto y del flujo.

de la solución concentrada. Las respuestas se muestran para el caso en que sólo se controla la composición del producto, y para el caso en que se controla el flujo y la composición del producto. El primer caso presenta una desviación inicial mayor de la composición respecto de la referencia y una caída en el flujo total mientras el flujo de la solución diluida, w_1, se mantiene constante. El caso en que se controlan el flujo y la composición muestra una desviación inicial menor respecto de la referencia a costa de una respuesta más oscilatoria. Esto se debe a que, como los dos lazos se ayudan entre sí, la ganancia del lazo de composición es mayor cuando el lazo de flujo está cerrado. Nótese cómo se mantiene constante el flujo de producto mientras que ambos flujos de entrada cambian en direcciones opuestas.

En el ejemplo anterior la interacción no afectó la respuesta básica del controlador de flujo. Esto se debe a que el controlador de flujo es muy rápido y controlable por lo que su respuesta es insensible a la ganancia del proceso. El controlador de la composición sí resulta afectado por la interacción cuando oscila con mayor rapidez y las oscilaciones decaen más lentamente. Esto se debe a que su ganancia se incrementa por un factor de 2 cuando el lazo de control de flujo está cerrado.

12-5.2 Sintonización de controladores para sistemas interactivos

Es evidente por el estudio de la sección anterior que la interacción hace que la sintonización de sistemas de control multivariable sea una tarea difícil. Sin embargo, con un procedimiento adecuado se pueden superar estas dificultades. En esta sección se presenta una guía breve del procedimiento de sintonización. Para un análisis más detallado se remite al lector al libro de Shinskey (1996).

El primer paso en el procedimiento de sintonización, después de parear apropiadamente las variables controladas y manipuladas, es determinar las velocidades relativas de los lazos. Si un lazo es mucho más rápido que otro, por ejemplo, con una constante de tiempo dominante cinco veces menor, entonces se sintoniza primero con el otro lazo abierto. Después el lazo más lento se sintoniza con el lazo cerrado más rápido. Se parte del supuesto de que el cierre del lazo más lento tiene un efecto menor sobre el desempeño del lazo más rápido, porque este último puede responder con rapidez a las acciones del lazo más lento. Cuando el lazo más lento se sintoniza con el lazo cerrado rápido, la sintonización toma en completa consideración la interacción. Los lazos de flujo y presión por lo general son mucho más rápidos que los de temperatura y composición. Por ejemplo, en el tanque de mezclado del ejemplo 12-5.1, el lazo de flujo tiene una constante de tiempo de lazo cerrado de 0.1 min, mientras que el lazo del analizador tiene una constante de tiempo dominante de 10 min. En ese ejemplo se vio que la respuesta del lazo de control de flujo no resultó afectada cuando el lazo de composición estaba cerrado.

Si los dos lazos tienen prácticamente la misma velocidad de respuesta, entonces la desintonización de uno de los lazos mediante el ajuste de una ganancia pequeña y un tiempo integral largo producirá el mismo efecto de hacer ese lazo lento. Esto reducirá su efecto sobre la respuesta del otro lazo porque el lazo desintonizado parecerá estar abierto. Este enfoque se elige cuando el control de una variable es más importante que el control de la otra. El controlador de la variable menos importante es el que se desintoniza.

Por último, cuando ambos lazos tienen prácticamente la misma velocidad de respuesta e igual importancia, cada controlador debe sintonizarse con el otro lazo abierto. Luego la sintonización debe ajustarse para tomar en cuenta la interacción. Si la interacción es positiva (ver la sección 12-1), los dos lazos se ayudan entre sí. Esto significa que los efectos dinámicos de la interacción por lo general son despreciables. En tal caso, la ganancia de cada controlador se ajusta a partir de su sintonización inicial (lazo abierto) multiplicándola por la ganancia relativa para el par. El principio es que con dicho ajuste se mantendrá una ganancia global constante para cada lazo. Para que la ganancia del lazo permanezca igual,

$$K_{ci}K_{Pii} = K'_{ci}K'_{Pii}$$

donde las ganancias del controlador y del proceso cuando el otro lazo está cerrado se representan con primas. Despejando la ganancia del controlador con el otro lazo cerrado se obtiene

$$K'_{ci} = K_{ci}\frac{K_{Pii}}{K'_{Pii}} = K_{ci}\mu_{ii} \tag{12-5.7}$$

donde se ha usado la definición de la ganancia relativa, ecuación 12-2.3.

Por ejemplo, en el tanque de mezclado del ejemplo 12-5.1, la ganancia relativa para cualquiera de los dos apareamientos es 0.5. Esto significa que la ganancia obtenida para cada controlador cuando el otro lazo está abierto deberá reducirse a la mitad para tomar en cuenta el incremento en la ganancia del proceso cuando el otro lazo está cerrado. En tal caso, sin embargo, el lazo de control de flujo es tan rápido que no es necesario ajustar su ganancia. Se invita al lector a verificar que si la ganancia del controlador de composición se reduce a (15) (0.5) = 7.5 %CO/%TO, la respuesta de la composición del producto es la misma cuando el lazo de flujo estaba abierto y el controlador de composición tenía la ganancia original.

Si la interacción es negativa, su efecto sobre la respuesta dinámica es muy significativo ya que los dos lazos compiten entre sí. Esto significa que la respuesta inversa es posible cuando los dos lazos están cerrados. La respuesta inversa hace que la variable controlada se mueva primero en la dirección incorrecta, lo cual demerita severamente el desempeño del lazo. Debido a ello, el ajuste de las ganancias de los controladores debe hacerse por prueba y error, después de que ambos lazos están cerrados.

Sintonización de sistemas $n \times n$

El procedimiento de sintonización que se acaba de presentar para sistemas 2×2 se puede extender a cualquier número de lazos. Lo que se necesita hacer primero es clasificar los lazos en orden de velocidad de respuesta y sintonizar los lazos que son mucho más rápidos que los otros. Al hacer esto, las ganancias de los lazos rápidos deben ajustarse para tomar en cuenta la interacción entre los mismos. Después los lazos más lentos deben clasificarse en orden decreciente de importancia y los lazos menos importantes deben desintonizarse si es posible. Por último, las

ganancias de los lazos lentos deben ajustarse para compensar el efecto de interacción. La ecuación 12-5.7 es válida para hacer el ajuste de los lazos para los cuales la interacción sea positiva. Recuérdese que la interacción es positiva cuando la ganancia relativa de un par está entre 0 y + 1.

12-6 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL A NIVEL DE PLANTA

Una de las fases importantes del diseño de un proceso nuevo es la selección de las variables del proceso que deben controlarse y de las corrientes que se van a manipular para controlarlas. La mejor manera de llevar a cabo esta tarea es mediante un equipo en el que se encuentre el ingeniero que diseñó el proceso, el ingeniero de instrumentación o control que diseñará el sistema de control y especificará la instrumentación, y el personal de operación que ejecutará el proceso. Hasta este punto se han considerado sistemas de control para unidades individuales —intercambiadores de calor, reactores, columnas de destilación, etc.— sin examinar la manera en que estas unidades pueden interactuar entre sí.

En el pasado, los esquemas de control para procesos químicos se diseñaban unidad por unidad sin considerar las interacciones entre ellas. Se suponía que la instalación de grandes tanques de suministro entre equipos resolvería cualquier interacción. Hoy en día, debido a consideraciones de seguridad, aspectos ambientales y económicos, es en interés de las industrias reducir la cantidad de almacenamiento intermedio en los procesos. Si un sistema de control bien diseñado puede tratar las interacciones entre las unidades y reducir el almacenamiento de sustancias químicas intermediarias, los costos de inventario se reducen, así como las responsabilidades ambientales y de seguridad, porque hay menos almacenamiento de sustancias químicas peligrosas e inflamables.

Para llevar a cabo la reducción del inventario, los esquemas de control deben diseñarse de tal modo que tomen en consideración las interacciones dinámicas introducidas por las corrientes que salen de unidades conectadas entre sí cuando no hay almacenamiento intermedio. Una forma de hacer esto consiste en diseñar un sistema de control tomando en consideración la planta completa. Ésta es la meta del *control a nivel de planta.*

Al diseñar sistemas de control de esta manera, hay por lo general más elecciones de las que es posible evaluar en la práctica. Existen muchas referencias excelentes que tratan el diseño de control a nivel de planta. En esta sección se examinan algunas de estas referencias, y se hace una encarecida invitación a los lectores a leerlas; un libro que se recomienda en particular es el de Luyben *et al.* (1998).

Con base en extensos estudios, se ofrecen a continuación algunos criterios generales (Kight, 1998). La intención de estos criterios es facilitar la tarea del diseño de sistemas de control a nivel de planta.

La decisión más crítica es la identificación de la *variable manipulada de rendimiento* (TPM, por sus siglas en inglés), es decir, el flujo de corriente que determina la *tasa de producción* de la planta. Esta corriente afecta la operación del proceso en su conjunto, no sólo por el efecto directo sobre el flujo de la corriente, sino porque la localización de la TPM determina la disposición de muchos de los lazos de control restantes. Cuando se elige la localización de la TPM, con frecuencia hay más de una elección que satisface las reglas presentadas a continuación. Cada localización se puede racionalizar con base en algunos beneficios del proceso percibidos. Se han desarrollado varias reglas para la ubicación de la TPM:

1. La TPM debe localizarse en la ruta principal del proceso y en la corriente de alimentación de la unidad más susceptible, por ejemplo, el reactor principal. La ruta puede trazarse comenzando con las alimentaciones y siguiendo el flujo a medida que se convierten en productos hasta la corriente final de productos. La tasa de producción debe ajustarse manipulando uno de los flujos de esta ruta. Si se produce más de un producto, es necesario determinar cuál de ellos es el producto principal; en general esta decisión se basa en consideraciones económicas.
2. La corriente manipulada debe ser una corriente rica en productos o una corriente de alimentación que contenga una gran fracción de reactivo que se convierte en su mayor parte en productos. Si el reactivo o el producto se encuentran en baja concentración, el flujo de corriente deja de ser un buen indicador de la tasa de producción.
3. La alimentación de una unidad que representa un cuello de botella importante en el proceso es una buena candidata para la TPM. Al controlar la tasa de alimentación de la unidad limitante se minimizan las perturbaciones que inciden en esa unidad, permitiendo una producción máxima.
4. Siempre que sea posible, se prefiere una TPM interna del proceso, en vez de una corriente de alimentación o de producto (Price, 1993). Al usar una corriente interna se minimiza la propagación de perturbaciones de flujo. La TPM hace las veces de amortiguador para las unidades a cada lado de la misma en lo que a las perturbaciones se refiere.
5. Aunque en la mayoría de los esquemas comunes se manipula directamente el flujo de la corriente de TPM, no siempre es necesario hacer esto. Cuando el flujo de la corriente de TPM no se manipula directamente, el flujo manipulado debe ser aquél que tenga un efecto sustancial sobre el flujo de la corriente TPM. Un ejemplo sería el vapor que va hacia un tanque de vaporización instantánea donde la corriente del vapor de salida es la ruta principal del proceso (Lyman, 1992).
6. Evitar controlar los flujos de las corrientes de producto de una columna de destilación para fijar los valores. Este punto se examina en el siguiente ejemplo.

Una vez que se ha determinado la localización de la TPM, se deben diseñar los controles de inventario antes y después de la TPM. En la mayoría de los casos, controladores sólo proporcionales sintonizados para el control del nivel promedio (véase la sección 7-3.3) dan el mejor desempeño global, excepto cuando las presiones y los niveles se deben mantener en sus referencias.

1. Los inventarios que están antes de la TPM deben controlarse manipulando los flujos de entrada, y los que están después de la TPM deben manipular los flujos de salida. La estructura del control de inventarios debe ser autoconsistente; es decir, el conjunto de controles debe tener la capacidad de propagar un cambio en la tasa de producción hacia atrás a la corriente de alimentación y hacia adelante a la corriente del producto.
2. Deberán utilizarse reglas de proximidad cuando se elijan las variables manipuladas. Es decir, las variables manipuladas que están físicamente cerca de los inventarios que se están controlando tienden a ofrecer el mejor desempeño.

Se recomienda diseñar primero un lazo de control por retroalimentación simple para cada variable controlada. Una vez hecho esto, el ingeniero decidirá si se necesitará otro sistema de

control (de relación, en cascada, feedforward o desacoplador) para alcanzar el desempeño de control requerido; la experiencia con procesos similares constituye una base para la decisión. En cualquier caso, la mejor recomendación es *diseñar la estrategia más simple que proporcione el desempeño requerido.*

Vale la pena mencionar las leyes de plomería de Luyben (2002):

- ***Primera ley de plomería.*** Localizar las válvulas en las líneas de líquido que están después de las bombas centrífugas. Si la válvula se coloca en la succión de la bomba, quizá no se pueda satisfacer la especificación de carga neta de succión positiva (NPSH, por sus siglas en inglés) debido a la caída de presión de la válvula (véase el ejemplo 5-2.3).
- ***Segunda ley de plomería.*** Utilizar una sola válvula de control en una línea, excepto cuando la segunda válvula controle la presión entre las dos válvulas. Esta ley se refiere a dos válvulas de *control* en la misma línea. Si las válvulas son manipuladas por controladores diferentes, competirán entre sí, debido a que sólo puede haber un flujo en la línea.
- ***Tercera ley de plomería.*** No regular la descarga de un compresor. Instalar una válvula a la salida del compresor sólo afecta la razón trabajo y compresión, no el flujo, y lleva el compresor a una condición inestable conocida como *sobrecarga*. Instalar una válvula en la succión del compresor afecta directamente el flujo másico y evita que el compresor llegue a la condición de sobrecarga. El método energéticamente más eficiente de controlar un compresor es ajustar su velocidad.

A continuación se considera un ejemplo para examinar las aplicaciones de estos criterios.

Ejemplo 12-6.1 ***Diseño de un sistema de control para un proceso de acetona.*** La figura 12-6.1 es la representación esquemática de un proceso de producción de acetona por medio de deshidrogenación catalítica de alcohol isopropílico (IPA). Se ha reportado que este proceso puede alcanzar 85% de conversión al pasar a través de un reactor a una presión de 200 KPa y a una temperatura de 350°C sobre un catalizador metálico de cobre (Austin, 1984). La reacción de fase gaseosa altamente endotérmica está dada por

$$(CH_3)_2\,CHOH \longrightarrow (CH_3)_2CO + H_2$$

El esquema de la figura 12-6.1 es una simplificación en cuanto a que supone la ausencia de reacciones secundarias. Esto significa que luego de la separación del hidrógeno no condensable, sólo se requiere una columna de destilación, T-100, para separar la acetona producida del IPA sin reaccionar. El IPA sin reaccionar se recicla de nuevo en el reactor como se muestra en la figura. Se usa un compresor, K-100, y un tanque de vaporización instantánea refrigerado, V-101, para recuperar la acetona y el IPA mezclado con el hidrógeno. La corriente final de hidrógeno es de 98% molar pura y se puede utilizar como materia prima química o como combustible por su capacidad calorífica.

Se utiliza un horno para proveer la energía para la reacción. La integración de la energía se consigue por medio de una corriente de intercambio cruzada que sale del reactor con la alimentación del reactor en el intercambiador E-100. La carga de calor es suficiente para vaporizar la combinación de las corrientes de alimentación fresca y reciclada. Como la reacción es endotérmica, no existe peligro de salirse de los límites.

El diseño del sistema de control para el proceso debe tomar en consideración el control de la tasa de producción, el control de la columna de destilación, el control de las temperaturas y presiones en el reactor y en el tanque de vaporización instantánea, así como los inventarios en el tanque de vaporización instantánea y en la columna de destilación.

Solución Lo primero que se debe hacer es seleccionar la corriente que regule la tasa de producción, la TPM. Hay dos corrientes de salida de este proceso, el producto P y el hidrógeno H, y una corriente de entrada, la alimentación de IPA fresco FF. Existen también varias corrientes internas alrededor del reactor, el tanque de vaporización instantánea y la columna de destilación, y la corriente de reciclado R.

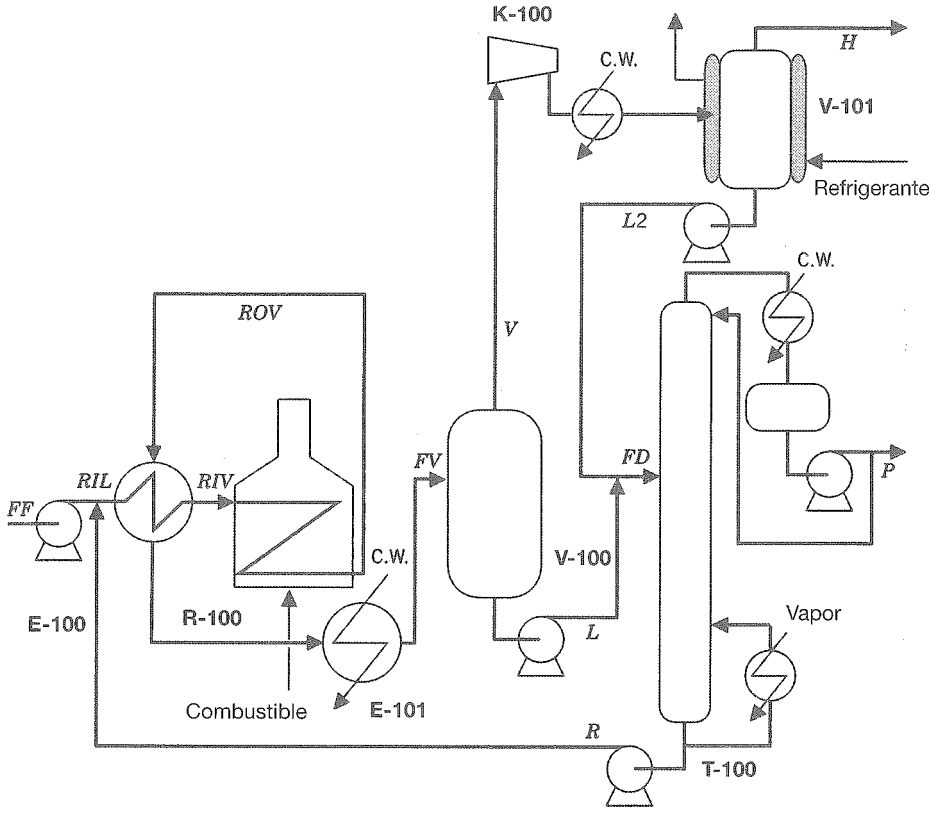


Figura 12-6.1 Esquema del proceso para producir acetona a partir de alcohol isopropílico.

Aun cuando en el criterio 4 ya se había indicado que debe elegirse una corriente interna para la TPM, en este ejemplo se ve por qué es así.

Considérese la corriente del producto *P*. Es el producto destilado de la columna de destilación. De acuerdo con el criterio 6, rara vez es una buena idea controlar el flujo del producto de una columna de destilación en un valor fijo. Veamos por qué. Supóngase que se mantiene el flujo del destilado constante y que una perturbación hace que la conversión en el reactor baje. Esto haría que el flujo de acetona que entra a la columna disminuya y se vuelva menor que el flujo de destilado. Para mantener el flujo de destilado por encima del flujo de acetona en la alimentación, deberá llegar más IPA a los productos y la pureza del producto disminuirá. Nótese que ocurrirá lo mismo si el producto del fondo *R* de la columna se mantiene constante mientras se permite variar la tasa de destilado. La caída en la conversión causará que entre más IPA a la columna de lo que se remueve en el fondo. El IPA adicional tendrá que llegar al destilado, incrementando su flujo y disminuyendo la pureza del producto.

Disminuciones similares en la pureza del producto ocurrirán como resultado de perturbaciones que causan pérdidas de acetona con el incremento de la corriente de hidrógeno. Aunque un incremento en la conversión del reactor no afectará de manera adversa la pureza de la corriente del producto, hará que la acetona adicional fluya hacia el fondo de la columna. Esto no hará que haya pérdidas de acetona, ya que ésta se recicla al reactor, pero puede afectar la operación de la columna.

Como la corriente del producto no debe ser la TPM, se consideran las otras dos corrientes externas. Es obvio a partir del esquema de la figura 12-6.1 que la corriente de hidrógeno *H* no se encuentra en la trayectoria principal entre la alimentación y el producto y que, de acuerdo con el criterio 1, no deberá ser la TPM. Sólo queda la corriente de alimentación de IPA fresco *FF*. El problema al usar *FF* como la TPM es que no controla directamente la producción de acetona en el reactor. Cuando la conversión en el reactor varíe, la corriente de reciclado *R*, la cual lleva el IPA sin reaccionar, también variará, haciendo variar el flujo que entra al reactor y al sistema de separación. Aunque en estado estacionario la tasa de conversión de IPA estará muy cerca de la tasa de alimentación fresca, las variaciones en la conversión darán lugar a perturbaciones temporales en todos los equipos del lazo de reciclado. Así se ha demostrado que el criterio 4 se puede aplicar a este proceso.

De las corrientes internas en la ruta entre la alimentación y el producto están las corrientes que entran y salen del reactor, así como la corriente de alimentación de la columna de destilación. Podría seleccionarse la alimentación de la columna *FD* si se determina que la columna es el cuello de botella en este proceso, pero esto presentaría el problema de cómo controlar el nivel en el tanque de vaporización instantánea V-100, porque la alimentación del tanque *FV* es una corriente de dos fases difícil de manipular. Por lo tanto, sería preferible seleccionar una de las corrientes en la ruta de entrada y salida del reactor. De éstas, las corrientes que salen del reactor tienen una fracción molar baja de acetona e IPA —cerca de la mitad de ellos es hidrógeno— y, de acuerdo con el criterio 2, no deberían seleccionarse. Una desventaja adicional es que son corrientes de vapor o de dos fases.

Las dos corrientes finales a considerar son las que están en la ruta de entrada al reactor, *RIL* y *RIV*, una líquida y la otra vapor. El flujo de la corriente líquida *RIL* se puede medir con mayor precisión que la de vapor, porque la densidad del líquido no varía mucho. Por lo tanto, se selec-

ciona la corriente líquida *RIL* como la corriente TPM. Esta corriente es la combinación de la alimentación de IPA fresco *FF* y la corriente reciclada *R*. Así que la siguiente pregunta es cómo controlar el flujo de la corriente TPM.

Un método es alimentar tanto *FF* como *R* en un tanque, controlar directamente el flujo de la corriente de salida del tanque, la corriente *RIL*, con una válvula de control en esa línea, y controlar el nivel del tanque con una válvula en la línea de alimentación de IPA fresco, *FF*. Éste es el método más simple, quizá el que prefiera el personal de operación, pero se dijo que se quería eliminar el almacenamiento intermedio por consideraciones de seguridad, ambientales y económicas. Por lo tanto, se debe manipular una de las dos corrientes que constituyen la corriente *RIL* para controlar su flujo. Se vio ya que la columna de destilación debe manipular la corriente de reciclado *R* para que pueda regresar todo el IPA sin reaccionar en esta corriente. Así, la solución final es

Seleccionar la corriente RIL como la corriente TPM y controlar su flujo manipulando el flujo de alimentación de IPA fresco FF.

Por la primera ley de plomería de Luyben, la válvula de control debe instalarse en la descarga de la bomba. En la figura 12-6.2 se muestra el esquema de control propuesto (FC en *FF*). En el diseño final se seguirá el criterio 5, el cual establece que no es necesario manipular directamente la corriente TPM.

Controles de la columna de destilación. Como se vio en el ejemplo 12-2.4, una columna de destilación simple con dos productos incluye cinco variables controladas y cinco válvulas de control. Normalmente es necesario hacer un análisis de medición de interacciones para decidir cómo se deben parear estas variables. Aquí se usará tan sólo un esquema preliminar simple que se modificará después de un estudio más profundo. En la figura 12-6.2 se muestra el esquema de control:

- Control de la presión de la columna manipulando la tasa de calor del condensador (PC en el agua de refrigeración).
- Control de inventario en el acumulador del condensador manipulando el flujo de producto destilado *P* (LC en *P*).
- Control de la pureza del producto destilado manipulando el reflujo (AC).
- Control del inventario del fondo de la columna manipulando el flujo del producto del fondo, el reciclado *R* (LC en *R*).
- Control de la tasa de calor constante al recalentador manipulando el flujo de vapor (FC en el vapor).

La decisión en este caso es controlar la pureza del producto *P* constante en vez de intentar controlar el contenido de acetona en el reciclado, ya que la acetona en el reciclado no se pierde sino que se devuelve al reactor. Al no controlar la pureza en el fondo se evitan los efectos de la interacción sobre el control de composición del producto.

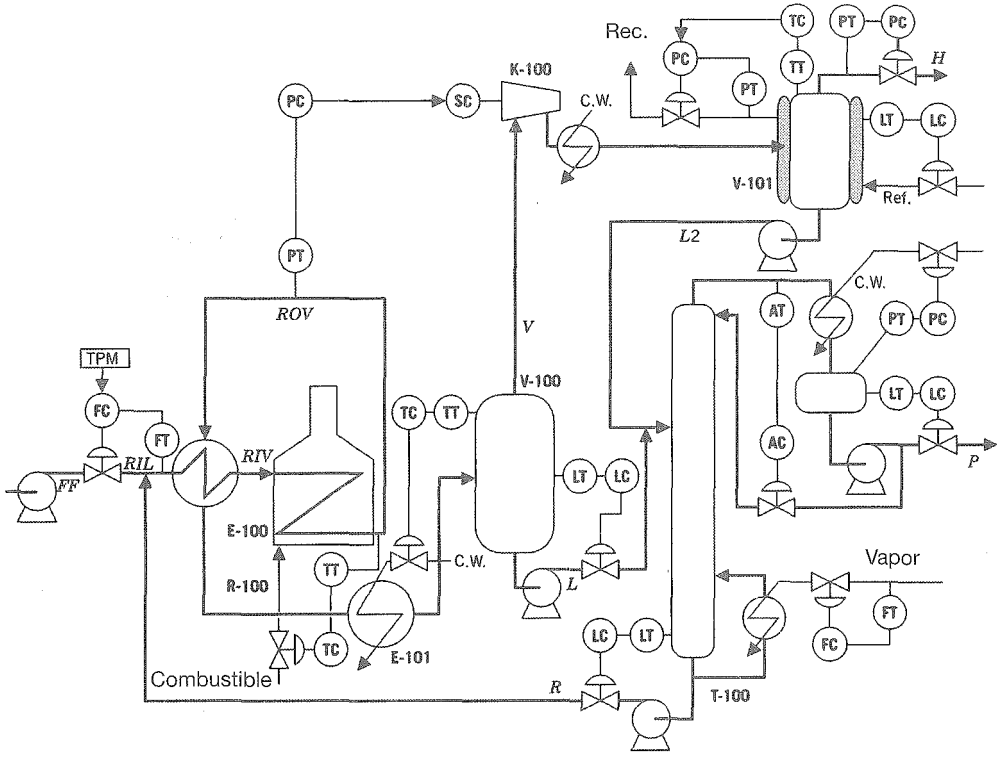


Figura 12-6.2 Esquema de control para el proceso de acetona.

Control de presiones. Aparte de la columna, las tres presiones en el proceso son las presiones en el reactor y en los dos tanques de vaporización instantánea. En el reactor y el tanque de vaporización instantánea V-101, al estar antes de la corriente TPM, la presión se controla manipulando las válvulas de control sobre las corrientes de vapor que salen de los tanques. Los controladores de presión son reguladores simples de contrapresión que son relativamente fáciles de sintonizar y operar. Para el tanque de vaporización instantánea V-100, el flujo de vapor es el flujo que llega al compresor. Siguiendo la tercera ley de plomería de Luyben, la válvula de control debería estar en la succión del compresor, en cuyo caso este controlador de presión también se vuelve un regulador de contrapresión. Si el compresor está accionado por una turbina de vapor cuya velocidad sea ajustable, es más eficiente controlar la presión en V-100 manipulando la velocidad del compresor. Esto resulta en un consumo de energía más bajo del compresor porque no requiere de una caída de presión a través de una válvula de control.

Es importante preguntarse si es realmente necesario controlar la presión tanto en el reactor como en el tanque de vaporización instantánea V-100. Si sólo se controla una de estas presiones, la válvula de control entre estos dos tanques se elimina ya que es la caída de presión requerida por la válvula de control. Entonces la presión en el tanque de vaporización instantánea será mayor y la composición de acetona y de IPA en la corriente de vapor del tanque se reducirá, dis-

minuyendo el flujo y la potencia requeridos por el compresor. La presión es una variable de respuesta rápida, por lo que no se pierde mucha controlabilidad cuando la presión en el reactor se regula manipulando la velocidad del compresor. Éste es el esquema que se muestra en la figura 12-6.2 (PC sobre SC, controlador de velocidad del compresor). La presión en la succión del compresor será la presión en el reactor menos la suma de las caídas de presión en los intercambiadores E-100, E101 y en el tanque V-100.

Control de inventarios. Aparte de los inventarios en la columna, es necesario controlar los niveles del líquido en los dos tanques de vaporización instantánea. Al estar después de la corriente TPM, estos niveles se controlan manipulando las corrientes de líquidos que salen de los tanques, con la válvula en las descargas de las bombas (primera ley de plomería de Luyben). En la figura 12-6.2 se muestra el lazo de control para V-100 (LC). El lazo de control de nivel para V-101 no se muestra ya que en esencia es el mismo.

Control de temperaturas. Es necesario controlar las temperaturas en el reactor y en los dos tanques de vaporización instantánea. Puesto que la reacción se lleva a cabo en un horno, la temperatura en el reactor se controla manipulando el flujo de combustible de la cámara de combustión del horno (TC sobre el combustible). Este control por retroalimentación simple puede mejorarse agregando un controlador de relación de flujo de combustible a alimentación. Los hornos también requieren controles e instrumentación de seguridad significativos que no se estudian aquí.

La temperatura en el tanque de vaporización instantánea V-100 se puede controlar ajustando el refrigerante que llega al intercambiador de calor E-101 (TC en el agua de enfriamiento). Esta temperatura debe mantenerse lo más baja posible para mantener baja la composición de acetona y de IPA en la corriente de vapor que sale del tanque, con lo cual se reduce el flujo que llega al compresor.

El enfriamiento del tanque de vaporización instantánea V-101 se hace por refrigeración. El refrigerante regularmente entra como líquido y se vaporiza en la camisa del tanque. Así, la temperatura en el tanque se regula mediante un esquema de control en cascada: el controlador de temperatura ajusta la referencia del controlador de presión del refrigerante, el cual a su vez manipula la válvula de control en la corriente de vapor de salida del refrigerante (TC a PC en el refrigerante). El nivel de la corriente de vapor de refrigerante en la camisa se controla manipulando el flujo de líquido de entrada de refrigerante (LC en el refrigerante). Esto restituye el refrigerante a la tasa en que se vaporiza. El tanque de vaporización instantánea V-101 debe mantenerse tan frío como sea posible para reducir las pérdidas de acetona e IPA en la corriente de hidrógeno.

El ejemplo anterior muestra cómo se diseña el esquema de control completo aplicando principios de ingeniería de procesos. Para llegar a la solución es esencial entender el proceso y la operación de las diferentes unidades de proceso. El análisis indica asimismo que el esquema presentado es únicamente una de varias soluciones correctas para el problema de diseño de control.

12-7 RESUMEN

En este capítulo se ha presentado el diseño y la sintonización de sistemas de control por retroalimentación multivariable. Se explicó primero el efecto de la interacción y después se presentó su medición a partir de las ganancias de lazo abierto. Las ganancias relativas se usan no solamente como medidas cuantitativas de interacción, sino también para parear las variables con-

troladas y manipuladas de tal manera que se minimice el efecto de interacción. En el apareamiento apropiado cada par tiene una ganancia relativa próxima a la unidad. Después se presentó el diseño de desacopladores. El desacoplamiento puede eliminar total o parcialmente el efecto de interacción. Por último, se analizó la respuesta dinámica de los lazos con interacción y se presentó un procedimiento para sintonizarlos.

REFERENCIAS

1. Austin, G. T., *Shreve's Chemical Process Industries,* 5a ed., Nueva York, McGraw-Hill, p. 764.
2. Bristol, Edgar H., "On a New Measure of Interaction for Multivariable Process Control", en *IEEE Transactions on Automatic Control AC-11,* pp. 133-134.
3. Cutler, C. R., y B. L. Ramaker, "DMC-A Computer Control Algorithm", ponencia leída en el AIChE 1979 Houston Meeting, documento #0516, Nueva York, AIChE.
4. Hulbert, D. G., y E. T. Woodburn, "Multivariable Control of a Wet Grinding Circuit", *AIChE Journal.*
5. Kight, Darryl, *Evaluation of Plant Wide Control Guidelines with a Series of Two-Phase Reactors with Separation,* tesis de maestría, University of South Florida.
6. Luyben, W. L., B. D. Tyreus y M. L. Luyben, *Plantwide Process Control,* Nueva York, McGraw-Hill.
7. Luyben, William L., *Plantwide Dynamic Simulators in Chemical Processing and Control,* Nueva York, Marcel Dekker.
8. Lyman, Philip, *Plant-Wide Control Structures for the Tennessee Eastman Process,* tesis de maestría, Lehigh University.
9. MATLAB, The MathWorks, Inc., Natick, MA.
10. MathCad, MathSoft, Inc., Cambridge, MA.
11. Moore, J. D., y A. B. Corripio, "On-Line Optimization of Distillation Columns in Series", en *Chemical Engineering Communications* 106, pp. 71-86.
12. Price, R. M., *Design of Plant Wide Regulatory Control Systems,* tesis de doctorado, Lehigh University.
13. Shinskey, F. G., *Controlling Multivariable Processes,* Research Triangle Park, NC: ISA.
14. Shinskey, F. G., *Process Control Systems, Application, Design, and Tuning,* 4a ed., Nueva York, McGraw-Hill.
15. Taylor, R., A. Haket, y H. Kooijman, *ChemSep, Potsdam,* NY, Departamento de Ingeniería Química, Clarkson University.

PROBLEMAS

12-1. Para cada uno de los procesos de la figura 12-1.1, usando conocimientos de mecanismos y principios básicos de procesos, explicar qué causa la interacción entre las variables mostradas. ¿La interacción es positiva o negativa? Indicar los supuestos empleados.

12-2. *Control de un proceso de dilución de sosa cáustica.*

El tanque de la figura P12-1 se utiliza para mezclar una solución de sosa cáustica al 50% con agua desmineralizada para producir una solución diluida. La composición

especificada del producto es de 30% en masa de NaOH y, en condiciones de diseño, el flujo de producto es de 40 klb/h. Se desea controlar el flujo de producto, w_P (FC-3), y la composición, x_P (AC-3), manipulando las referencias de los controladores de flujo en las dos corrientes de entrada (FC-1 y FC-2). Se supone un tanque con mezclado perfecto, y que la masa total M de la solución en el tanque es constante. Obtener las ganancias de lazo abierto en estado estacionario para el sistema 2 × 2 y las ganancias relativas en condiciones de diseño. ¿La interacción es positiva o negativa? ¿Qué apareamiento de las variables controladas y manipuladas minimiza el efecto de interacción? ¿Por cuánto se incrementa o disminuye (especificar cuál) el valor de la ganancia del lazo de la composición del producto cuando el lazo de flujo de producto está cerrado? *Nota:* la simulación de este proceso es el tema del problema 13-34.

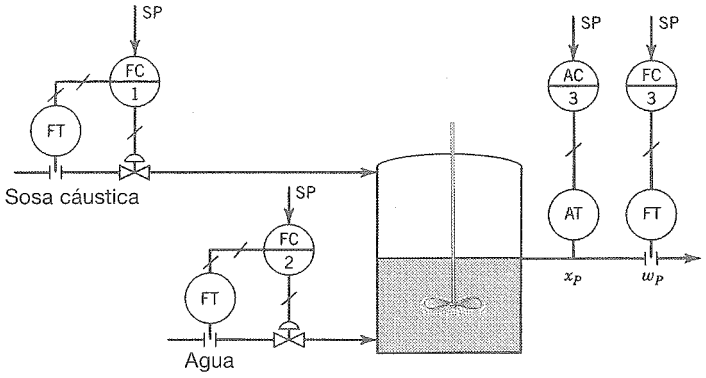


Figura P12-1 Tanque para la dilución de sosa cáustica del problema 12-2.

12-3. *Control automático de una ducha doméstica.*

El diseño de duchas automatizadas para la mansión del señor Trump requiere el control de temperatura y del flujo de agua de la regadera. El diseño requiere un sistema que pueda suministrar 3 gpm de agua a 110°F mezclando agua caliente a 170°F con agua fría a 80°F. La densidad del agua es de 8.33 lb/gal, y su calor específico es de 1.0 Btu/lb-°F. Se utilizan válvulas de control para manipular los flujos del agua fría y caliente. También se utiliza un transmisor de flujo y uno de temperatura en cada ducha.

a) Establecer que los balances de materia y energía de estado estacionario resultan de las siguientes relaciones, suponiendo que la densidad y el calor específico del agua son constantes:

$$f_o = f_1 + f_2$$
$$f_o T_o = f_1 T_1 + f_2 T$$

b) Calcular los flujos requeridos de agua fría y caliente en condiciones de diseño, y las ganancias de lazo abierto de estado estacionario. Especificar las unidades.

c) Calcular las ganancias relativas para el sistema y decidir cuál de los dos flujos de entrada controlará el flujo y cuál la temperatura para que se minimice el efecto de interacción.

12-4. *Control de un evaporador.*

Considérese el evaporador de la figura 12-3.4. El nivel del evaporador se controla de manera muy rigurosa manipulando la válvula en la línea de alimentación porque éste es el flujo más grande entre las corrientes de entrada y de salida (LC). Se desea controlar el flujo de alimentación, w_F (FC) y la composición del producto, x_P (AC), manipulando las señales a las válvulas en las corrientes de producto, m_P, y de vapor saturado, m_S. La economía del evaporador es aproximadamente constante y tiene un valor de E lb de vapor por libra de vapor saturado, y la composición de entrada es x_F, % en peso de soluto.

a) Establecer, a partir de los balances de estado estacionario en el evaporador, que las relaciones entre las variables son:

$$w_F = w_P + Ew_s$$

$$x_P = x_F\left(1 + \frac{Ew_s}{w_P}\right)$$

b) Deducir las fórmulas generales para las ganancias de lazo abierto en estado estacionario y para las ganancias relativas. ¿La interacción es positiva o negativa?

c) Desarrollar una estrategia general de apareamiento que minimice el efecto de interacción para cualquier evaporador que dependa de los valores de diseño de las variables del proceso.

12-5. El evaporador del problema 12-4 está diseñado para concentrar una solución de sosa cáustica al 30% a fin de producir una solución con 50% en masa de NaOH y, en condiciones de diseño, el flujo de alimentación es 80 klb/h. La economía es de 0.9 klb de vapor por klb de vapor saturado. Resolver el problema para estas condiciones de diseño. ¿Por cuánto se incrementa o decrementa (especificar cuál) la ganancia del controlador de composición del producto cuando el lazo de control del flujo de alimentación está cerrado? *Nota:* la simulación de este proceso es el tema del problema 13-35.

12-6. *Control de composición de productos de destilación.*

Un ejemplo de lazos de control altamente interactivos es el control de las composiciones de la parte superior y del fondo en una columna de destilación. Se realizaron dos pruebas en la simulación de una columna de butano-pentano: la primera fue un cambio en el flujo de vapor manteniendo el reflujo constante, y la segunda fue un cambio en el reflujo manteniendo el flujo de vapor constante. En la tabla siguiente se resumen los flujos y las composiciones de cada prueba, después de establecer el estado estacionario:

	Base	Prueba 1	Prueba 2
Flujo de vapor, klb/h	24.0	25.0	24.0
Reflujo, lbmol/h	70.0	70.0	75.0
Butano porcentual en el fondo	6.22	3.08	8.77
Butano porcentual en el destilado	93.50	91.79	96.88

Las variables controladas son el porcentaje de butano en el fondo y en los productos destilados, y las variables manipuladas son las referencias del flujo de vapor y del reflujo. Calcular las ganancias de lazo abierto en estado estacionario y las ganancias relativas para los dos apareamientos posibles. ¿La interacción es positiva o negativa? ¿Qué variable deberá manipularse para controlar la composición del destilado de tal modo que la interacción entre los lazos se minimice? ¿Cuál es la ganancia de estado estacionario para el lazo de la composición del destilado cuando el lazo de control de los productos del fondo está cerrado?

12-7. Para el sistema de control de mezclado de gasolina del ejemplo 12-2.5, calcular los flujos requeridos de las tres corrientes de alimentación si el número especificado de octanos es de 89.0 en vez de 87.0. Después vuelva a calcular las ganancias de lazo abierto en estado estacionario y las ganancias relativas. ¿El apareamiento de las variables controladas y manipuladas que minimizan el efecto de la interacción cambia con respecto del obtenido en el ejemplo? Diseñar un desacoplador estático para este sistema y calcular las ganancias del sistema desacoplado, como en el ejemplo 12-3.3.

12-8. *Control de un circuito de molienda en húmedo.*

Hulbert y Woodburn (1983) presentan el control multivariable para un circuito de molienda en húmedo como el que se muestra en la figura P12-2. Las variables controladas son el torque necesario para poder accionar el molino (TOR), la densidad de alimentación del ciclón (DCF) y el flujo desde el molino (FML). Estas variables se seleccionaron con base en su importancia en el proceso metalúrgico. El torque y el flujo desde el molino describen la operación de este último, y la densidad de la alimentación del ciclón describe la operación del tanque de lodos. El flujo proveniente del molino no se mide directamente, sino a partir de la combinación de otras mediciones y de un balance de materia alrededor del molino. Sin embargo, para simplificar, en el diagrama se muestra un transmisor simple.

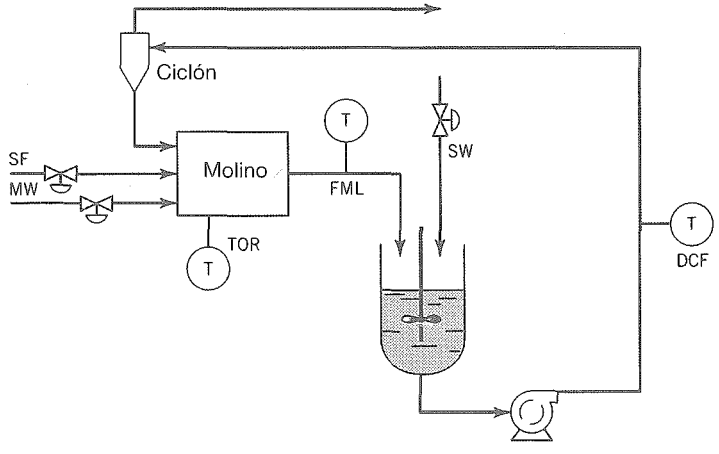


Figura P12-2 Circuito de molienda en húmedo para el problema 12-8.

Las variables manipuladas son los flujos de las tres corrientes de alimentación: sólidos (SF) y agua hacia el molino (MW), y agua al tanque de lodos (SW). La tasa de alimentación de sólidos en el molino se manipula ajustando la velocidad de la banda transportadora de sólidos.

Las pruebas escalón de lazo abierto en cada variable manipulada resultan en las siguientes funciones de transferencia:

	SF, kg/s	MW, kg/s	SW, kg/s
TOR, Nm	$\frac{119}{217s+1}$	$\frac{153}{337s+1}$	$\frac{-21}{10s+1}$
FML, m^3/s	$\frac{0.00037}{500s+1}$	$\frac{0.000767}{33s+1}$	$\frac{-0.000050}{10s+1}$
DCF, kg/m^3	$\frac{930}{500s+1}$	$\frac{-667e^{-320s}}{166s+1}$	$\frac{-1033}{47s+1}$

donde todos los parámetros de tiempo están en segundos.

a) Calcular las ganancias relativas y seleccionar los pares de las variables controladas y manipuladas que minimicen el efecto de la interacción.
b) Utilizando el apareamiento del inciso a), trazar el diagrama de bloques y diseñar un desacoplador lineal para el sistema. Hacer el diagrama de instrumentación para el sistema de control completo.

12-9. *Diseño de un desacoplador para una columna de destilación.*

En la columna de destilación de la figura 12-2.3, el reflujo y el flujo de vapor hacia el recalentador se manipulan para controlar la pureza de los productos destilados y del fondo. Pruebas escalón de lazo abierto en cada una de estas variables manipuladas resultan en las siguientes funciones de transferencia:

$$Y_D(s) = -3.0\left(\frac{1-0.11s}{1+0.35s}\right)M_R(s) + \left(\frac{0.75}{1+0.35s}\right)M_S(s)$$

$$X_B(s) = \left(\frac{2.5}{1+0.35s}\right)M_R(s) - 3.5\left(\frac{1+0.25s}{1+0.35s}\right)M_S(s)$$

donde $Y_D(s)$ es la composición del componente pesado en el destilado, $X_B(s)$ es la del componente ligero en el fondo, en %TO, y $M_R(s)$ y $M_S(s)$ son las señales a las válvulas de reflujo y de vapor, respectivamente, en %CO. Los parámetros de tiempo están en horas.

a) Calcular las ganancias relativas para el sistema y determinar la forma correcta de parear las variables controladas y manipuladas. ¿Los lazos se ayudan o compiten entre sí?
b) Trazar el diagrama de bloques y diseñar los desacopladores para este sistema. Analizar brevemente cualquier problema de implementación y sugerir modificaciones para asegurarse de que el sistema de control es estable.

12-10. *Diseño de un desacoplador para un proceso 2 × 2.*

Un proceso tiene dos variables controladas que son afectadas por dos variables manipuladas y una perturbación, $U(s)$. Las funciones de transferencia son:

$$C_1(s) = G_{P11}(s)M_1(s) + G_{P12}(s)M_2(s) + G_{P1U}(s)U(s)$$

$$C_2(s) = G_{P21}(s)M_1(s) + G_{P22}(s)M_2(s) + G_{P2U}(s)U(s)$$

donde

$$G_{P11}(s) = \frac{0.81e^{-0.6s}}{1.4s+1} \quad G_{P12}(s) = \frac{1.2e^{-1.1s}}{2.4s+1}$$

$$G_{P1U}(s) = \frac{0.5}{2.2+1}$$

$$G_{P21}(s) = \frac{1.1e^{-0.3s}}{1.5s+1} \quad G_{P22}(s) = \frac{0.9e^{-s}}{2.0s+1}$$

$$G_{P2U}(s) = \frac{-1.5}{1.8s+1}$$

a) Calcular las ganancias relativas y seleccionar el apareamiento correcto para este sistema.
b) Diseñar un desacoplador para este sistema y mostrar la implementación en un diagrama de bloques.

12-11. Establecer que si se implementa el desacoplador exacto en el sistema representado por el diagrama de bloques de la figura 12-3.2; de hecho, el sistema queda desacoplado.

12-12. Diseñar un desacoplador para el tanque de mezclado descrito en el ejemplo 12-5.1. Mostrar el diagrama de instrumentación para implementar el desacoplador.

12-13. Diseñar, a partir de principios básicos, un desacoplador lineal estático para el evaporador del problema 12-4.

Capítulo
13

Simulación dinámica de sistemas de control

La simulación dinámica es el método más conveniente para analizar el funcionamiento de los sistemas de control de procesos. En este capítulo se presentan las bases para aprender cómo desarrollar y utilizar las simulaciones dinámicas de procesos e instrumentos tales como controladores, sensores, válvulas, etcétera. La mayor parte de las simulaciones que se presentan aquí se basan en la técnica de modelaje dinámico descrita en los capítulos 3 y 4, así como en los modelos de instrumentos presentados en el capítulo 5.

Se consideran dos métodos de simulación dinámica:

- Simulación de sistemas lineales a través de su representación por medio de funciones de transferencia.
- Simulación de sistemas de control a partir de modelos mecanísticos básicos.

El primero de estos métodos tiene la ventaja de que no importan las condiciones iniciales, ya que, como se indicó en el capítulo 2, las funciones de transferencia suponen que las variables son desviaciones de las condiciones iniciales del estado estacionario, esto es, las condiciones iniciales son cero. Sin embargo, el método requiere el desarrollo de las funciones de transferencia y, en el caso de sistemas no lineales, la linealización de las ecuaciones del modelo.

El segundo método es más fundamental y es más apropiado para el modelaje de sistemas no lineales. La principal dificultad es que el modelador debe tener mucho cuidado de utilizar las condiciones iniciales correctas para todas las variables. Cuando se simulan sistemas de control para procesos continuos también es necesario asegurarse de que las condiciones iniciales representan un estado estacionario.

La mayor parte del capítulo supone que los procesos son de variables concentradas, esto es, las variables sólo son funciones de tiempo. Al final del capítulo se incluye una breve descripción de la simulación de sistemas rígidos.

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

Los ejemplos presentados utilizan el programa MATLAB con Simulink, ya que es uno de los programas de simulación en bloques más poderoso y disponible comúnmente para estudiantes e ingenieros.

13-1 USOS Y HERRAMIENTAS DE LA SIMULACIÓN DINÁMICA

En esta sección se describen los usos de la simulación dinámica y algunos programas de simulación disponibles actualmente en el mercado.

13-1.1 Usos de la simulación dinámica

Entre las aplicaciones comunes de la simulación dinámica de procesos están:

- Estudio del comportamiento dinámico de los procesos.
- Diseño, sintonización y evaluación de los sistemas de control de procesos.
- Capacitación de operadores en la operación de procesos.
- Diseño y operación de sistemas por lotes.

Obsérvese que el diseño de procesos continuos no se considera en la lista. La razón de ello es que este diseño se lleva a cabo mejor en simuladores de estado estacionario, como ASPEN PLUS, HySys, ProII, Chemcad y programas similares.

En los capítulos anteriores se describieron métodos de papel y lápiz para estudiar el comportamiento dinámico de los procesos, y para diseñar y sintonizar sistemas de control. Sin embargo, los métodos presentados requieren considerables manipulaciones algebraicas para obtener los resultados (linealización, transformadas de Laplace, combinación de ecuaciones simultáneas, etc.). Asimismo, han requerido poco análisis de la respuesta final de los procesos y de los sistemas de control. En contraste, la simulación dinámica no sólo puede producir los mismos resultados con una escasa manipulación algebraica o sin ésta, sino que también puede producir las respuestas de los sistemas de control en función del tiempo para varias señales de entrada. Sin embargo, los procedimientos analíticos presentados hasta ahora son muy útiles para entender los conceptos de estabilidad, las causas principales de la inestabilidad, la necesidad de compensadores dinámicos y cómo diseñarlos, y otras cuestiones por el estilo.

Como se señaló en la lista anterior, la simulación dinámica es una herramienta excelente para capacitar operadores en la operación de procesos altamente integrados y sus sistemas de control. Esta práctica, basada en el entrenamiento de astronautas para los viajes espaciales, se ha llevado a cabo en la industria durante al menos cuatro décadas. Tal entrenamiento a veces se lleva a cabo con un simulador conectado a una consola de control que se parece mucho a la consola que usan los operadores para controlar los procesos reales.

13-1.2 Herramientas para la simulación dinámica

Antes de la revolución de la computadora personal, la simulación dinámica requería considerables habilidades de programación por parte del modelador. Inicialmente, las simulaciones se llevaban a cabo en computadoras analógicas. Las ecuaciones diferenciales se resolvían conectando componentes eléctricos que eran similares a los sistemas físicos que estaban simulando. El

Tabla 13-1.1 Programas de simulación dinámica

Programa	Compañía	Página web	Características
MATLAB/ Simulink	MathWorks	www.mathworks.com	Lenguaje procedural, programación orientada en bloques
VisSim	Visual Solutions, Inc.	www.vissim.com	Programación orientada en bloques, incluida en algunas versiones de MathCad
TK Solver	UTS	www.uts.com	Notación en formato de ecuación, realiza conversión de unidades, manipulación simbólica
MathCad	MathSoft	www.mathsoft.com	Notación en formato de ecuación, realiza conversión de unidades, manipulación simbólica
Mathematica	Wolfram Research, Inc.	www.wolfram.com	Notación en formato de ecuación, realiza conversión de unidades, manipulación simbólica
LabVIEW	National Instruments	www.ni.com	Programa de control y recopilación de datos en forma de bloque que puede utilizarse para simulación
Maple	Waterloo Maple, Inc.	www.maplesoft.com	El lenguaje de comando incluye subprogramas de integración y graficación
Aspen Plus Dynamic	Aspen Tech	www.aspentech.com	Proporciona módulos de operación unitaria y paquetes de propiedades termodinámicas
HySys	AspenTech	www.aspentech.com	Proporciona módulos de operación unitaria y paquetes de propiedades termodinámicas

cableado y la conexión de los componentes eléctricos no sólo era engorroso, sino que el requerimiento del escalamiento de las variables del problema al rango de valores del simulador era una habilidad difícil de dominar. Sin embargo, la simulación analógica tenía la ventaja de que los componentes se conectaban gráficamente en una forma igual a como se conectaban los componentes de los sistemas de control, por ejemplo, en los diagramas de bloques.

Cuando la simulación analógica fue reemplazada en las décadas de 1970 y 1980 por programas digitales de computadora, el conjunto de habilidades requeridas de parte del modelador cambió, pero el grado de dificultad no se redujo mucho. Se requirieron lenguajes procedurales como FORTRAN, BASIC, Pascal y C para poder integrar y resolver las ecuaciones diferenciales que representan la dinámica del proceso. Afortunadamente, pronto se dispuso de un número de rutinas de integración numérica que eliminó la necesidad de que el modelador desarrollara la suya propia.

En la actualidad se cuenta con un buen número de programas de computadora que hacen extremadamente accesible la simulación dinámica para modeladores que tienen pocas habilidades de programación o sin éstas. En la tabla 13-1.1 se presenta una lista de los programas más utilizados. Los que son más útiles tienen las siguientes características:

- Interfaz gráfica para programación en bloques.
- Bloques para generar señales de entrada (fuentes o generadores de señales) tales como escalones, rampas y ondas sinusoidales.
- Graficación de variables en el tiempo.
- Bloques para simular los dispositivos de control más comunes (retardos de transporte, funciones de transferencia, limitadores de señales, muestreo y retención, etc.).
- La habilidad para desarrollar bloques de simulación a la medida utilizando lenguajes procedurales.

Los ejemplos en este capítulo utilizan MATLAB con Simulink ya que es uno de los programas de simulación dinámica más poderosos al alcance de estudiantes e ingenieros.

Como se señaló en la introducción a este capítulo, existen dos métodos básicos para llevar a cabo simulaciones dinámicas de un sistema. La siguiente sección presenta la simulación de sistemas lineales mediante la simulación de las funciones de transferencia de sus componentes. El resto de este capítulo cubre la simulación de modelos desarrollados a partir de principios fundamentales.

13-2 SIMULACIÓN DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA LINEALES

En los capítulos 2, 3, 4 y 5 se aprendió a desarrollar las funciones de transferencia de procesos, controladores, válvulas de control y sensores-transmisores; esto se hizo mediante la aplicación de la transformada de Laplace a modelos dinámicos lineales. Los procesos representados por ecuaciones diferenciales no lineales requirieron linealización, por lo que las funciones de transferencia eran válidas sólo en un estrecho rango de condiciones de operación para el cual las aproximaciones lineales son válidas. Cuando se dispone de estos modelos basados en funciones de transferencia, pueden simularse las funciones de transferencia para estudiar la respuesta del sistema de control a diversas entradas. El siguiente ejemplo muestra cómo llevar a cabo tal simulación.

Ejemplo 13-2.1 ***Simulación de un tanque calentador de agitación continua.*** En el ejemplo 6-1.1 se desarrollaron las funciones de transferencia para el lazo de control por retroalimentación para controlar la temperatura de un tanque calentador de agitación continua. Simule el lazo usando las funciones de transferencia desarrolladas en ese caso. Luego, use la simulación para verificar la ganancia última y el periodo último del lazo, determinados en el ejemplo 6-2.2. Verifique también la respuesta de un controlador proporcional sintonizado para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto a un cambio escalón en el flujo de proceso.

Solución La figura 13-2.1 muestra el diagrama de bloques para la simulación de este problema en MATLAB con Simulink. Los bloques utilizados son los que se enlistan en la página siguiente:

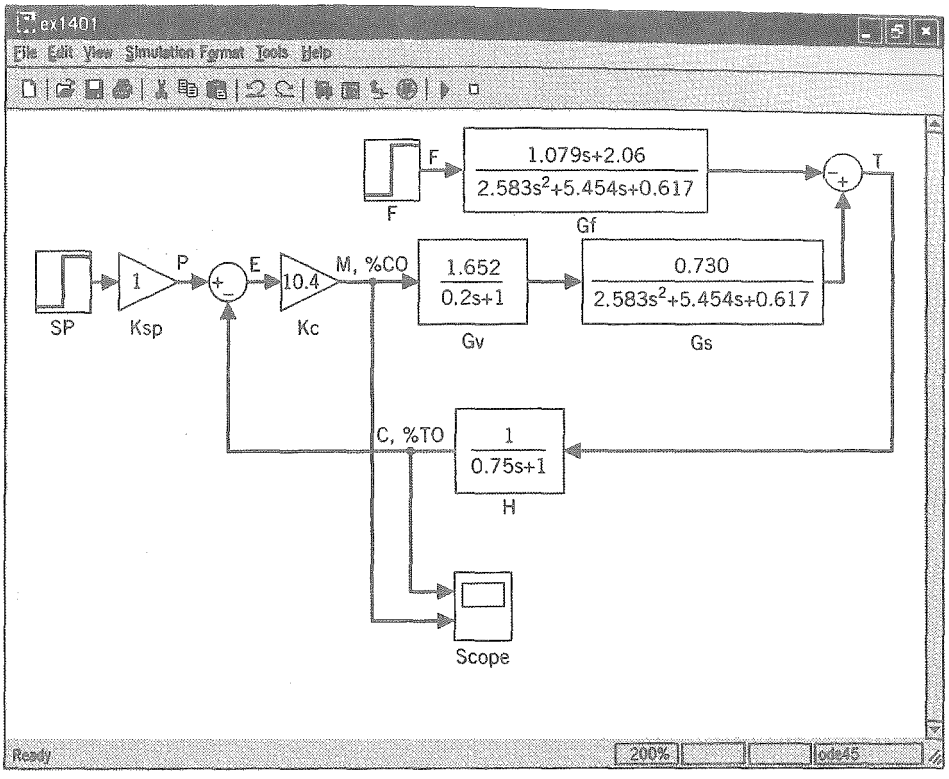


Figura 13-2.1 Diagrama de Simulink para la simulación del calentador con tanque de agitación usando funciones de transferencia.

- Bloques de cambio escalón para las entradas: la referencia *SP* (set point) y el flujo de proceso *F*.
- Bloques de ganancia para el controlador proporcional K_c y la ganancia de la referencia K_{sp}.
- Sumadores para calcular el error *E* y la suma de los efectos del flujo de proceso y del flujo de vapor en la temperatura de salida *T*.
- Bloques de función de transferencia para la válvula G_v, el sensor-transmisor *H* y las funciones de transferencia del proceso G_F y G_s.
- Bloque scope o monitor para graficar la respuesta de la temperatura contra el tiempo.

Los valores de las funciones de transferencia se obtienen de los resultados del ejemplo 6-1.1. La mayor parte de los valores numéricos proviene de la tabla 6-1.1, excepto las funciones de transferencia G_F y G_s, que deben calcularse de la forma requerida por el bloque en Simulink. Estos cálculos, utilizando los valores de la tabla 6-1.1, son

$$G_F(s) = \frac{K_F(\tau_c s+1)}{(\tau s+1)(\tau_c s+1)-K_s} = \frac{2.06(0.524s+1)}{(4.93s+1)(0.524s+1)-0.383}$$
$$= \frac{1.079s+2.06}{2.583s^2+5.454s+0.617}$$
$$G_s(s) = \frac{K_w K_s}{(\tau s+1)(\tau_c s+1)-K_s} = \frac{1.905\times 0.383}{(4.93s+1)(0.524s+1)-0.383}$$
$$= \frac{0.730}{2.583s^2+5.454s+0.617}$$

Para obtener la ganancia última y el periodo último, se debe establecer la ganancia del controlador y correr la simulación, vigilando la respuesta en el monitor después de cada corrida. Entonces se aumenta la ganancia hasta que la respuesta sea una oscilación continua. Cuando se obtienen oscilaciones continuas, la ganancia del controlador es la ganancia última y el periodo de la respuesta es el periodo último. La figura 13-2.2 muestra la respuesta de las salidas del transmisor y del controlador cuando la ganancia del controlador se establece en 10.4 %CO/%TO. En dicha figura puede verse que tienen lugar tres oscilaciones completas en 13.9 min, para un periodo de

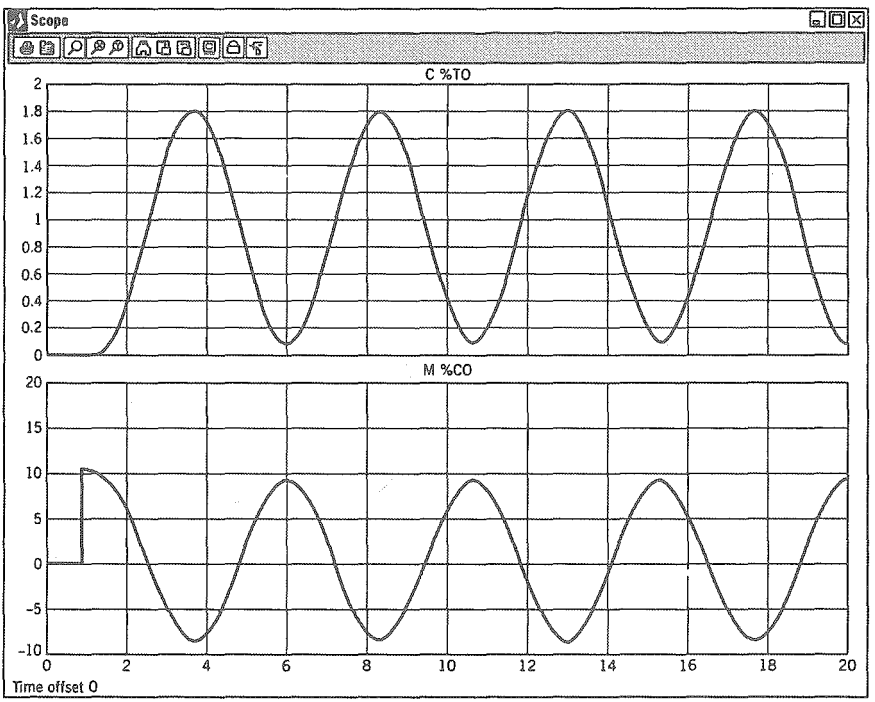


Figura 13-2.2 Respuesta de las salidas del transmisor y del controlador para la ganancia última del controlador.

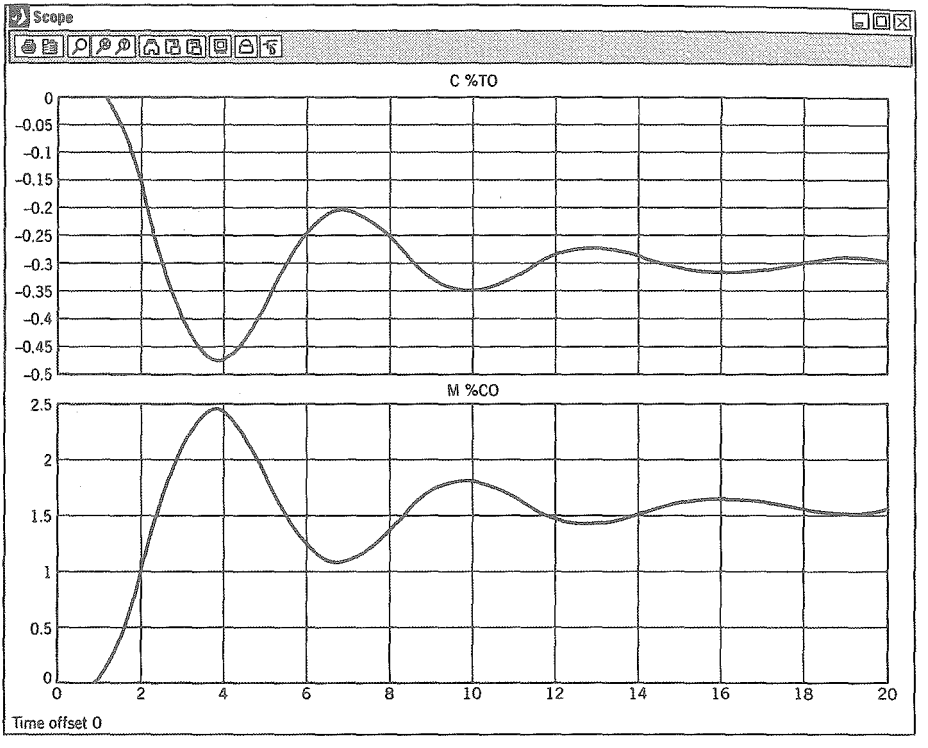


Figura 13-2.3 Respuesta de las salidas del transmisor y del controlador a un cambio escalón en el flujo de proceso.

13.9/3 = 4.6 min. Éstos son los valores obtenidos mediante sustitución directa en el ejemplo 6-2.2. Las respuestas a un cambio escalón en el flujo del proceso de 1.0 lb/min se muestran en la figura 13-2.3. La ganancia del controlador se fija en 10.4/2 = 5.2 %CO/%TO, como indican las ecuaciones de sintonización para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto de la tabla 7-1.1 para un controlador proporcional. Tales respuestas, fáciles de obtener con la simulación, requieren extensas manipulaciones algebraicas si se quieren obtener por métodos analíticos.

Comparando el diagrama de Simulink de la figura 13-2.1 y el diagrama de bloques de la figura 6-1.7, puede verse la correspondencia uno a uno de los bloques. Ésta es una de las principales ventajas de la simulación gráfica por bloques para el estudio de los sistemas de control de procesos.

Las condiciones iniciales de todas las variables en el diagrama son cero, ya que, tratándose de funciones de transferencia, las variables son desviaciones de sus condiciones de estado estacionario iniciales (véanse la sección 2-3.1 y el ejemplo 6-1.1).

Así como se utilizó la simulación del ejemplo 13-2.1 para sintonizar el controlador usando el método de la ganancia última, también podría haberse utilizado para determinar la respuesta del proceso a un paso escalón unitario. Para hacer esto, basta reemplazar el controlador por un bloque de entrada escalón.

Después de demostrar cómo simular modelos de funciones de transferencia lineales de procesos, en la siguiente sección presentamos un método más fundamental para simular modelos de ecuaciones diferenciales del proceso.

13-3 SIMULACIÓN DE PROCESOS

Una alternativa para simular el proceso que se presentó en la sección anterior es resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales que representan el modelo. De esta manera, no sólo se ahorra uno la necesidad de desarrollar las funciones de transferencia del proceso, sino también la necesidad de linealizar el modelo del proceso si éste es no lineal. De hecho, tanto los modelos de procesos lineales como los no lineales se pueden simular con igual facilidad.

Los programas de simulación actuales ofrecen una variedad de métodos muy poderosos para la solución numérica de ecuaciones diferenciales. Más aún, el método utilizado por el programa es completamente transparente para el usuario. Lo único que se requiere es un modelo en el cual cada ecuación diferencial esté en el formato de primer orden, tal como:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t),u(t),t] \tag{13-3.1}$$

donde:

$x(t)$ = variable de estado
$u(t)$ = variable de entrada
t = tiempo

y f es cualquier función lineal o no lineal de las variables. Por fortuna, los modelos de procesos desarrollados a partir de principios fundamentales tienen exactamente la forma de la ecuación 13-3.1, como puede verificarlo fácilmente el lector examinando todos los modelos desarrollados en los capítulos 3 y 4.

Los programas de simulación por bloques proporcionan un bloque integrador diseñado para integrar numéricamente ecuaciones diferenciales con la forma de la ecuación 13-3.1. Además de la derivada de entrada, el bloque de integración requiere la condición inicial de la variable de estado x. El símbolo $1/s$ se usa en Simulink y VisSim para indicar el bloque integrador. Esto no significa que el bloque emplee las transformadas de Laplace para realizar la integración. Sólo se trata de una nomenclatura apropiada para el bloque.

Los siguientes ejemplos muestran cómo simular procesos utilizando MATLAB con Simulink.

Ejemplo 13-3.1 ***Simulación del proceso de gas.*** Éste es el proceso de gas modelado en la sección 3-6 para obtener la respuesta de la presión del gas en el tanque a un cambio escalón en la señal al ventilador que alimenta el gas al tanque. El modelo desarrollado en la sección 3-6 es la ecuación 3-6.10:

$$\bar{\rho} f_i(t) - \bar{\rho} f_o(t) = \frac{V}{RT}\frac{dp(t)}{dt}$$

$$f_i(t) = 0.16 m_i(t)$$

$$f_o(t) = 0.00506 m_o(t)\sqrt{p(t)[p(t) - p_1(t)]}$$

donde:

$m_i(t)$ = señal al ventilador de entrada, %
$m_o(t)$ = señal a la válvula de salida, %
$p(t)$ = presión en el tanque, psia
$p_1(t)$ = presión corriente abajo de la válvula, psia
$\bar{\rho}$ = densidad del gas, 0.00263 lbmol/scf
V = volumen del tanque, 20 ft^3
R = constante de la ley de gases ideales, 10.73 psia-ft^3/lbmol-°R
T = temperatura del gas, 520°R

y las constantes están en unidades de scf/min-%. El modelo del tanque consiste en una ecuación diferencial y dos ecuaciones algebraicas. La condición inicial de la presión, $p(0)$, es necesaria para definir el estado del tanque, por lo que se dice que la presión es una *variable de estado*. Existen tres entradas o funciones de forzamiento, las dos señales $m_i(t)$ y $m_o(t)$, y la presión corriente abajo, $p_1(t)$.

Para que una simulación represente apropiadamente la respuesta de un proceso a las señales de entrada, es necesario que las condiciones iniciales correspondan al estado estacionario. Este estado estacionario usualmente se obtiene a partir de las condiciones de diseño del proceso. Sin embargo, debemos comprender que el requerimiento de estado estacionario impone una restricción en los valores que pueden asumir las condiciones de diseño. De las condiciones de diseño indicadas en la sección 3-6, las especificaciones mínimas requeridas son:

$$m_i(0) = \bar{m}_i = 50\% \qquad m_o(0) = \bar{m}_o = 50\% \qquad p_1(0) = \bar{p}_1 = 14.7 \text{ psia}$$

Usando las tres ecuaciones del modelo, con $dp(0)/dt = 0$ en estado estacionario, se pueden determinar las otras tres condiciones iniciales.

$$f_i(0) = 0.16 m_i(0) = (0.16)(50) = 8.0 \text{ scf/min}$$

$$f_o(0) = f_i(0) = 8.0 \text{ scf/min}$$

$$f_o(0) = 0.00506 m_o(0)\sqrt{p(0)[p(0) - p_1(0)]}$$

$$\therefore p(0) = 39.8 \text{ psia}$$

Teniendo las condiciones iniciales, la ecuación diferencial puede ser resuelta para su derivada como sigue:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{\overline{\rho}RT}{V}[f_i(t) - f_o(t)]$$
$$= \frac{(0.00263)(10.73)(5.20)}{20}[f_i(t) - f_o(t)]$$
$$= 0.734[f_i(t) - f_o(t)]$$

La figura 13-3.1 muestra el diagrama de bloques de Simulink usado para simular el proceso de gas. Los bloques de entrada en escalón se utilizan para generar las tres señales de entrada, y los bloques de adición, multiplicación y de raíz cuadrada se usan para hacer los cálculos del flujo de salida. Los bloques de ganancia se utilizan para introducir los coeficientes constantes del modelo, y un bloque integrador integra la ecuación diferencial para obtener la presión en el tanque. La condición inicial del integrador se establece en 39.8 psia.

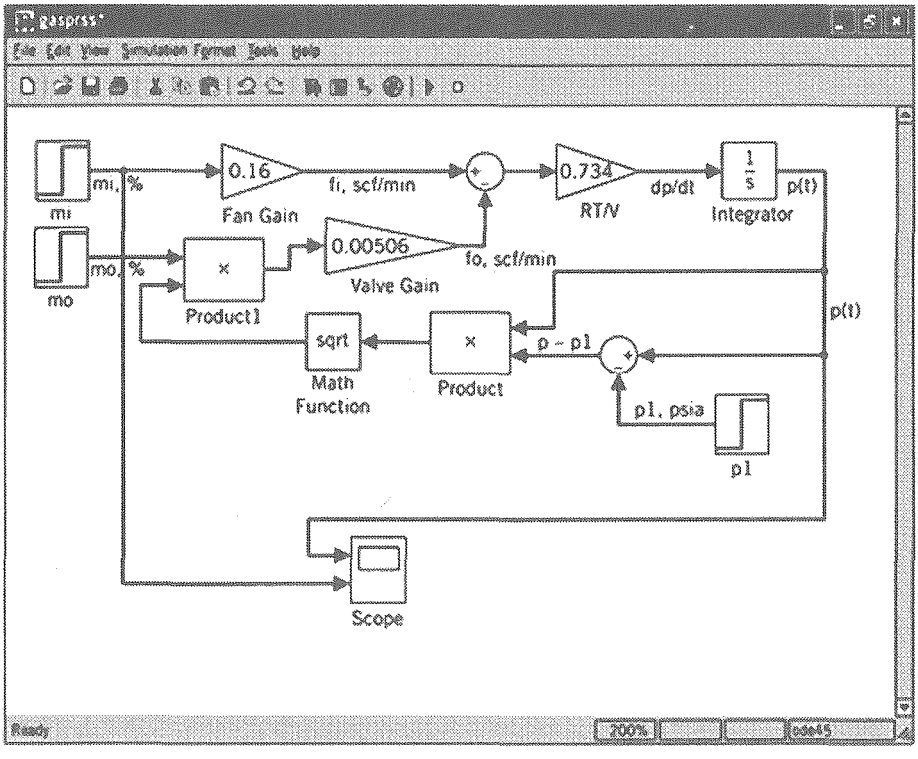


Figura 13-3.1 Diagrama de Simulink para la simulación del proceso de gas.

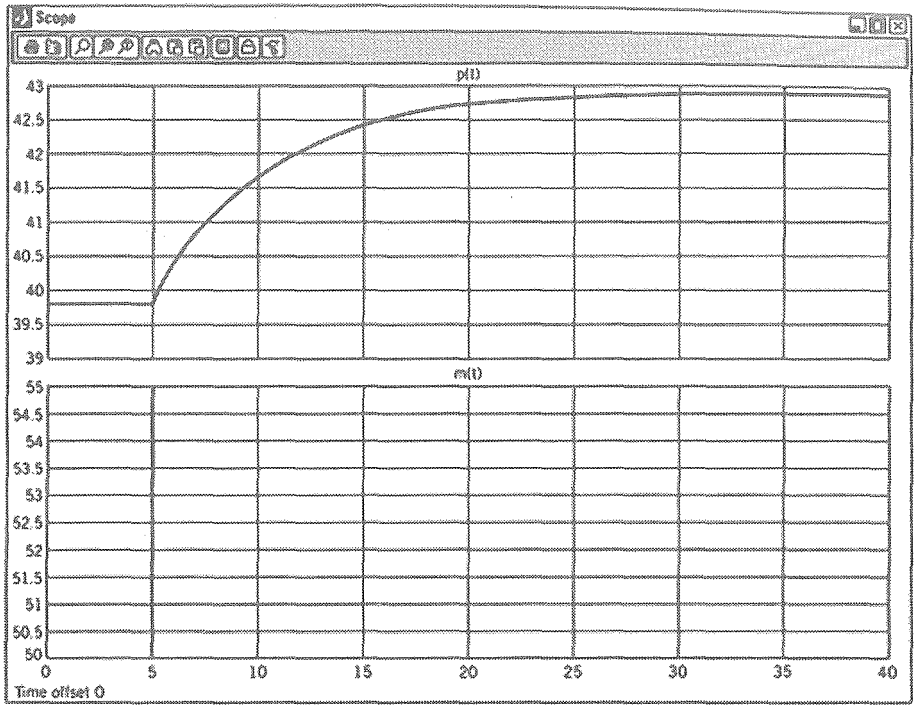


Figura 12-3.2 Respuesta de la presión de gas a un cambio escalón en la señal al ventilador (flujo de entrada).

La figura 13-3.2 muestra la respuesta de la presión ante un cambio escalón de 5 % en la señal al ventilador de entrada. El cambio escalón ocurre en $t = 5$ min para mostrar que la presión de hecho está en estado estacionario antes de que cambie el flujo de entrada. La respuesta se completa en 25 min aproximadamente, lo que es consistente con la constante de tiempo de 5.24 min determinada en la sección 3-6.

Tal vez el estudiante se pregunte qué determina que las unidades de tiempo sean en minutos. El hecho de que todas las unidades de $dp(t)/dt$ sean psia/min es lo que determina que la variable de tiempo sea en minutos, ya que la integración con respecto al tiempo produce la presión del tanque en psia.

El siguiente ejemplo muestra cómo simular un proceso representado por ecuaciones diferenciales múltiples.

Ejemplo 13-3.2 ***Simulación de un tanque calentador de agitación continua.*** Éste es el calentador de vapor del ejemplo 6-1.1, el mismo calentador que se simuló a partir de las

funciones de transferencia lineales del ejemplo 13-2.1. Aquí se hará su simulación a partir de las ecuaciones diferenciales básicas derivadas en el ejemplo 6-1.1:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{V} f(t)[T_i(t) - T(t)] + \frac{UA}{V\rho c_v}[T_s(t) - T(t)]$$

$$\frac{dT_s(t)}{dt} = \frac{1}{C_M}\{\lambda w(t) - UA[T_s(t) - T(t)]\}$$

donde hemos resuelto para las derivadas. La explicación de las variables y los valores de los parámetros del sistema y de las condiciones de diseño aparece en el ejemplo 6-1.1. En dicho ejemplo se determinó que las condiciones iniciales de estado estacionario son $T(0) = 150°F$ y $T_s(0) = 230°F$. También, las condiciones iniciales de diseño son $f(0) = 15$ ft^3/min, $T_i(0) = 100°F$ y $w(0) = 42.2$ lb/min.

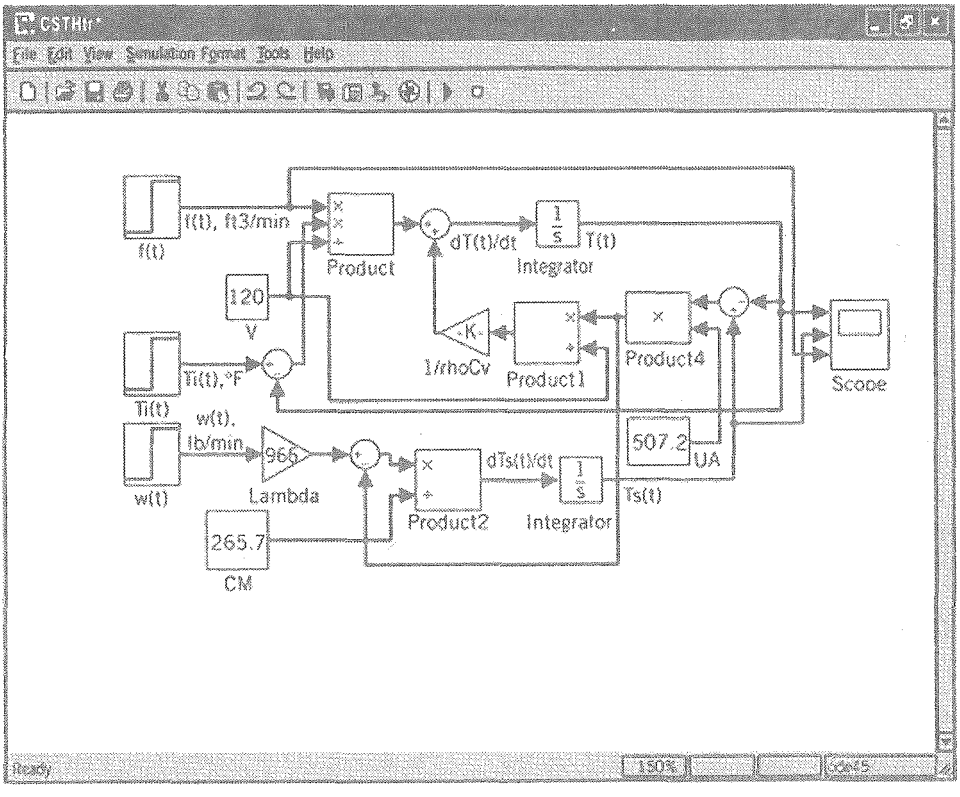


Figura 13-3.3 Diagrama de Simulink para el calentador del tanque de agitación.

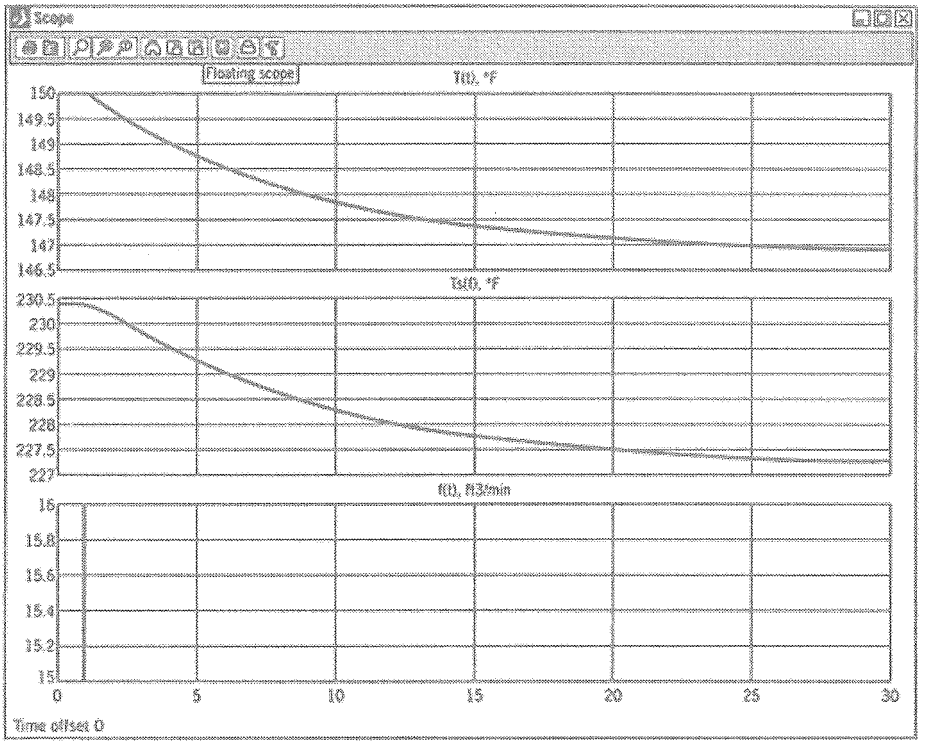


Figura 13-3.4 Respuesta de la temperatura de salida del calentador y la temperatura de la caja de vapor a un cambio escalón en el flujo de proceso.

La figura 13-3.3 muestra el diagrama de bloques de Simulink para la simulación del calentador. Se usan generadores de señales de entrada escalón para las tres entradas: los flujos de proceso y de vapor, y la temperatura de entrada. Se utilizan dos integradores ($1/s$) para integrar las dos ecuaciones diferenciales y bloques aritméticos (sumadores, multiplicadores, ganancias y bloques de constantes) para calcular las funciones derivadas de las ecuaciones dadas anteriormente. Se utiliza un monitor para graficar la respuesta de la señal de entrada y de las dos temperaturas.

La figura 13-3.4 muestra las respuestas de las temperaturas a un cambio escalón en el flujo de proceso. La ganancia del proceso puede calcularse a partir de su definición $(136.9 - 150)°F/(16 - 15)(ft^3/min) = -3.1°F/(ft^3/min)$. Esto es comparable con el resultado analítico obtenido en el ejemplo 6-1.1, $K_F/(1 - K_s) = [-2.06°F/(ft^3/min)]/(1 - 0.383) = -3.3°F/(ft^3/min)$. La pequeña diferencia se debe a la aproximación lineal.

Ejemplo 13-3.3 ***Simulación de un biorreactor por lotes.*** Muchos productos químicos especializados son producidos en biorreactores a través de procesos tales como la fermentación. La mayoría de estos procesos se lleva a cabo en forma discontinua o por lotes, llenando un tanque con una solución sustrato e inoculándola con una pequeña cantidad de biomasa. La biomasa, que se alimenta del sustrato, se reproduce para producir el producto deseado, hasta que

el sustrato se consume. Este ejemplo se presenta aquí para mostrar algunas de las características especiales de los procesos bioquímicos.

Un modelo dinámico del aumento de la concentración de biomasa, $x(t)$, y del consumo del sustrato, $s(t)$, con base en la unidad de volumen puede obtenerse como sigue:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu(t)x(t)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\frac{1}{y}\mu(t)x(t)$$

donde y es el rendimiento en biomasa por unidad de masa del sustrato y $\mu(t)$ es la función de la velocidad de crecimiento de la biomasa, usualmente en h^{-1}. Esta función de velocidad de crecimiento es análoga a los modelos cinéticos usados para modelar reactores químicos. Está diseñada para que iguale los datos experimentales de reactores. Aquí se utilizará el modelo de Monod con adaptabilidad, el cual tiene la siguiente forma:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \alpha\left[\mu_m \frac{s(t)}{k + s(t)} - \mu(t)\right]$$

donde α es el parámetro de adaptabilidad y k y μ_m son los parámetros del modelo. Estas tres ecuaciones diferenciales se resuelven con el diagrama de Simulink en la figura 13-3.5, con $\alpha = 15\ h^{-1}$, $k = 0.5$ g/l, $s(0) = 2.5$ g/l, $\mu(0) = \mu_m = 1.2\ h^{-1}$ y $x(0) = 0.001$ g/l.

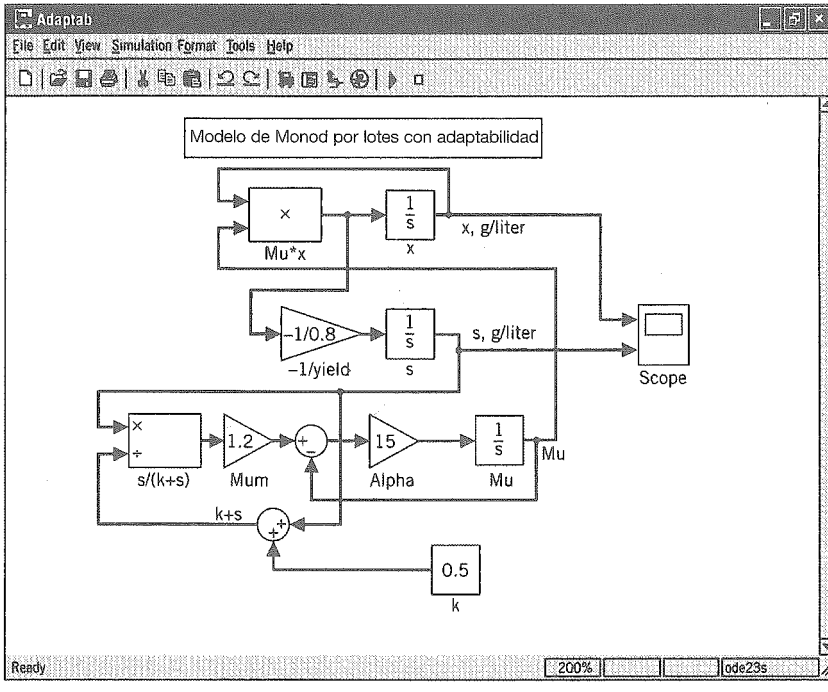


Figura 13-3.5 Diagrama de Simulink para el biorreactor por lotes.

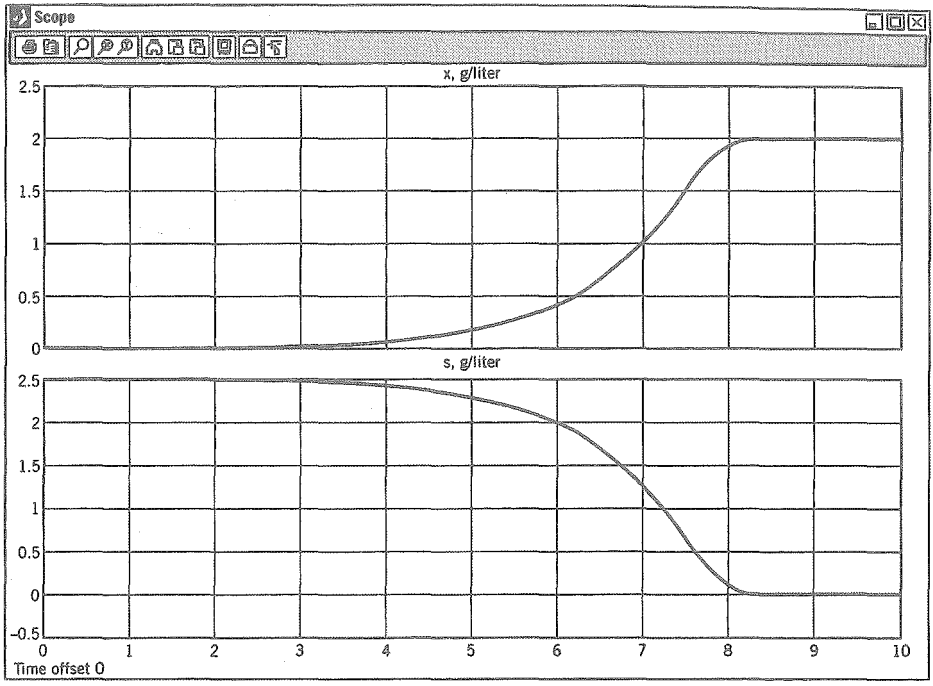


Figura 13-3.6 Gráfica de las concentraciones de biomasa y sustrato contra el tiempo en horas.

La figura 13-3.6 muestra una gráfica de las concentraciones de biomasa y de sustrato en función del tiempo en horas. Se necesitan cerca de 3 h para que la velocidad de crecimiento de la biomasa sea perceptible, pero luego se eleva de forma exponencial mientras que la gráfica de la concentración de sustrato es una imagen en espejo de la gráfica de la biomasa. Al fin, aproximadamente a 10 h del comienzo, el sustrato se ha convertido en biomasa, el crecimiento se detiene y el lote se ha completado.

Los reactores de biomasa han sido objeto de numerosos estudios de control que han sido reportados en la literatura especializada.

Los ejemplos anteriores muestran cómo simular modelos dinámicos que constan de múltiples ecuaciones diferenciales. Cada función derivada se calcula a partir de las variables de entrada y de estado, las cuales son alimentadas a un bloque integrador aparte.

Una característica conveniente de Simulink y de otros programas de simulación por bloques es la habilidad de combinar los bloques para la simulación de un sistema como si se tratara de un *subsistema*. De esta manera, la simulación del calentador mostrada en la figura 13-3.3 puede representarse como un solo bloque con tres entradas y dos salidas, como se muestra en la figura 13-3.7. Si ahora se reemplaza el bloque del calentador por los bloques de las funcio-

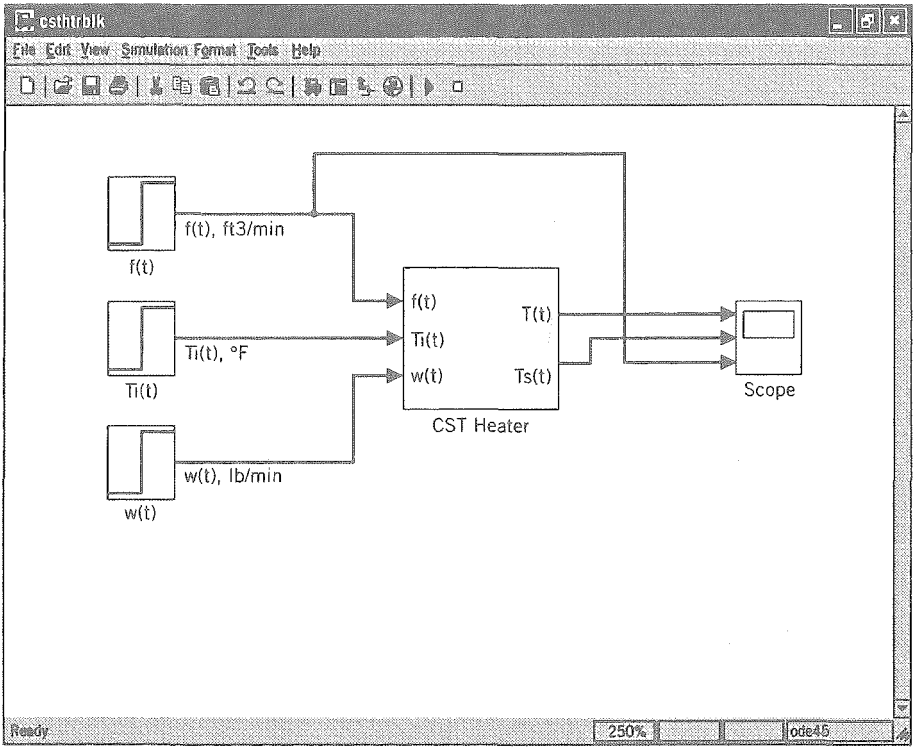


Figura 13-3.7 Bloque del subsistema para el calentador con tanque de agitación continua.

nes de transferencia de la figura 13-2.1, es posible estudiar el sistema de control de temperatura con el modelo más fundamental no lineal del calentador. Sin embargo, esto presentaría un problema: los modelos de funciones de transferencia de la válvula y el transmisor en la figura 13-2.1 tienen condiciones iniciales cero, pero se necesitan condiciones iniciales diferentes de cero para el flujo de vapor en el modelo fundamental del calentador. Para resolver este problema se necesitan modelos más fundamentales de instrumentación. Éste es el tema de la siguiente sección.

13-4 SIMULACIÓN DE LA INSTRUMENTACIÓN DE CONTROL

Cuando se simula un sistema de control utilizando funciones de transferencia lineales, como en la sección 13-2, la instrumentación también puede ser simulada empleando funciones de transferencia lineales. Los capítulos 5 y 11 presentan las funciones de transferencia lineales para sensores-transmisores, válvulas de control, controladores por retroalimentación y unidades de adelanto-atraso. Sin embargo, si nos limitáramos a estos tipos de simulaciones, no seríamos

capaces de estudiar mediante simulaciones los efectos de la no linealidad de los procesos. Tal estudio requiere simular el proceso a partir de las ecuaciones diferenciales originales, como en la sección 13-3. Tal y como se vio en esta sección, una característica importante de esas simulaciones es que las condiciones iniciales son diferentes de cero y deben considerarse cuidadosamente. Como los modelos simples de funciones de transferencia no permiten tener condiciones iniciales diferentes de cero, es preciso desarrollar modelos de simulación especiales de los diferentes instrumentos. Éste es el tema de esta sección.

La mayoría de los modelos de instrumentos que se desarrollarán aquí requerirá la simulación de un retardo de primer orden con una condición inicial diferente de cero. La función de transferencia de un retardo de primer orden con ganancia unitaria es

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \tag{13-4.1}$$

Donde $Y(s)$ es la señal de salida, $X(s)$ es la señal de entrada y τ es la constante de tiempo. Para modelar la respuesta de la salida, la función de transferencia se reordena como sigue:

$$\begin{aligned} (\tau s + 1)Y(s) &= X(s) \\ \tau s Y(s) &= X(s) - Y(s) \\ Y(s) &= \frac{1}{s}\left\{\frac{1}{\tau}[X(s) - Y(s)]\right\} \end{aligned} \tag{13-4.2}$$

La ecuación 13-4.2 se simula alimentando a un bloque integrador $(1/s)$ la diferencia entre las señales de entrada y salida dividida entre la constante de tiempo. Para comenzar en estado estacionario, la condición inicial del integrador debe igualarse al valor inicial de la entrada. Este modelo de un retardo de primer orden aparecerá en cada modelo de instrumento presentado en esta sección.

13-4.1 Simulación de válvulas de control

La figura 13-4.1 muestra el diagrama de bloques de Simulink para la simulación de una válvula de control con caída de presión constante. Este diagrama supone que el modelo de la válvula es un subsistema con una entrada $m(t)$, la salida del controlador en %CO, y una salida $f(t)$, el flujo a través de la válvula en las unidades más convenientes.

El primer elemento en el modelo de la válvula es un interruptor para seleccionar la válvula como aire para abrir (cerrada en falla), en cuyo caso la señal $m(t)$ se alimenta directamente, o aire para cerrar (abierta en falla), en cuyo caso la señal se cambia a $[100 - m(t)]$%CO. Nótese

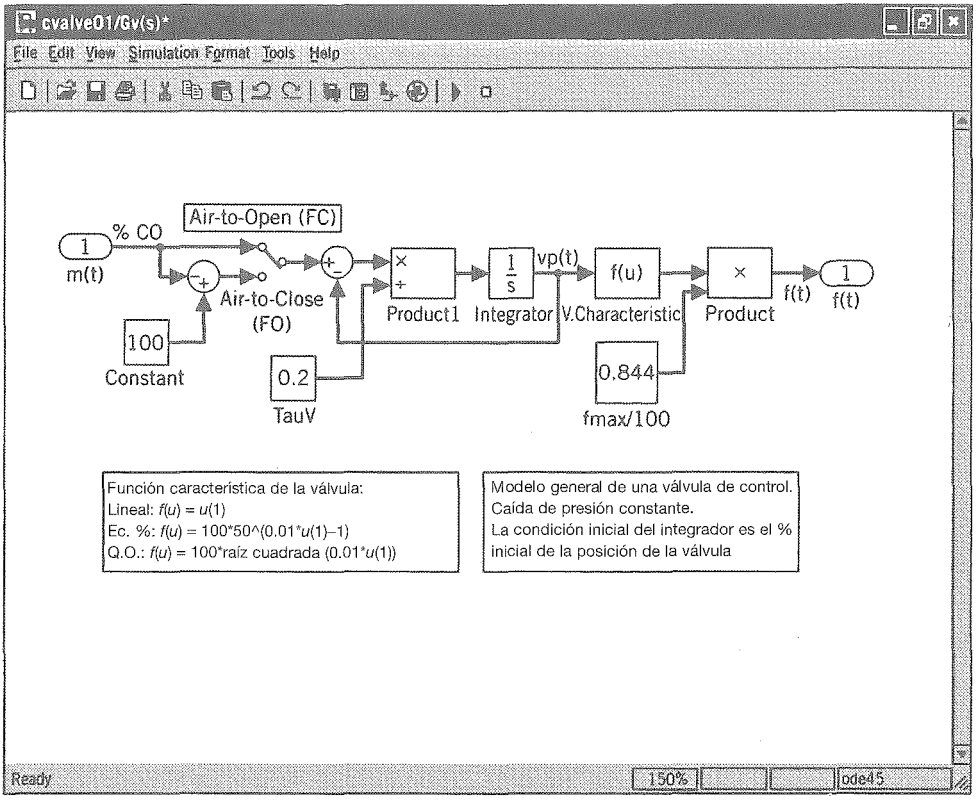


Figura 13-4.1 Diagrama de bloques de Simulink para una válvula de control general con caída de presión constante.

que la señal de salida del controlador $m(t)$ varía en el rango de 0 a 100 %CO y no es una variable de desviación. Por lo tanto, no basta cambiar el signo de la ganancia de la válvula para modificar su acción, ya que eso sólo funcionaría en variables de desviación.

La siguiente parte del modelo de la válvula es el retardo de primer orden con la constante de tiempo de la válvula τ_v. Esto es, simplemente resolver la ecuación 13-4.2. La salida del retardo de primer orden es la posición de la válvula $vp(t)$, en %VP. Para comenzar en estado estacionario, la condición inicial del integrador debe establecerse en el valor inicial de la entrada. Nótese que ésta pudiera ser $m(0)$ o $100 - m(0)$, dependiendo de la acción de la válvula. Si la constante de tiempo de la válvula es despreciable, la simulación completa del retardo de primer orden debe eliminarse o ignorarse, ya que la constante de tiempo no puede ser igual a cero.

El término dinámico de la válvula es seguido por un bloque de propósito general llamado "Math Function" para introducir la función de las características de la válvula. Ese bloque tiene, en este caso, una sola entrada $u(1)$ y permite cualquier cálculo usando esta entrada. Para simular una válvula lineal, simplemente se introduce $u(1)$, y para una válvula isoporcentual se requiere la expresión $100*\alpha\text{^}[0.01*u(1)-1]$, donde α es el parámetro de rangeabilidad de la válvula, por

ejemplo, 50 (véase la ecuación 5-2.7). Una válvula de apertura rápida puede simularse utilizando la función raíz cuadrada.

Por último, se introduce la capacidad de la válvula como un multiplicador constante, $f_{máx}/100$, el 100 se debe a que la posición de la válvula está en %VP. Cuando la caída de presión a través de la válvula no se ve afectada por las variables de la simulación, el flujo máximo a través de la válvula es constante. Éste es usualmente el caso en la simulación de lazos de control de temperatura o composición. El flujo máximo a través de la válvula es el flujo cuando la válvula está completamente abierta. Para una válvula de líquidos, a partir de la ecuación 5-2.1,

$$f_{máx} = C_{v,máx}\sqrt{\frac{\Delta p_v}{G_f}} \tag{13-4.3}$$

donde $f_{máx}$ está en galones por minuto. Sin embargo, para los efectos de la simulación de la válvula, $f_{máx}$ puede introducirse en el diagrama de la figura 13-4.1 en las unidades que sea conveniente (lb/h, ft^3/min, etc.). Las unidades del flujo de salida del modelo, $f(t)$, serán las mismas de $f_{máx}$. Para una válvula de gases, $f_{máx}$ puede calcularse a partir de las ecuaciones 5-2.3 o 5-2.4, según se requiera. En estas ecuaciones, se usa $C_{v,\,máx}$ en vez de C_v para obtener el flujo máximo.

Para válvulas de líquidos, cuando las variables de proceso afectan la caída de presión a través de la válvula, como en el caso de la simulación de lazos de control del nivel o de la presión, debe usarse el diagrama de bloques de la figura 13-4.2. Las únicas diferencias con el diagrama de la figura 13-4.1 son que el flujo a través de la válvula se calcula usando la ecuación 5-2.1, y que se requiere una entrada adicional para la caída de presión a través de la válvula, Δp_v. Se puede desarrollar un diagrama similar para simular una válvula para vapor o gas.

Simulación de lazos de control de flujo

El diagrama de la figura 13-4.1 puede usarse para simular un lazo de control de flujo cuando las variables de proceso no afectan la caída de presión a través de la válvula. Cuando se hace esto,

- La entrada $m(t)$ es la referencia del flujo en %TO del transmisor de flujo,
- El interruptor está en la posición de aire para abrir,
- La constante de tiempo τ_v es la constante de tiempo de lazo cerrado del lazo de flujo,
- La función característica de la válvula es usualmente lineal, y
- $f_{máx}$ es el límite superior del transmisor de flujo en el lazo.

De esta manera, no es necesario simular y sintonizar el controlador de flujo. Si, por otra parte, la caída de presión a través de la válvula es una función de las variables de proceso, se tiene que usar el diagrama de la figura 13-4.2 para simular la válvula en un lazo que incluirá un controlador de flujo y un transmisor de flujo.

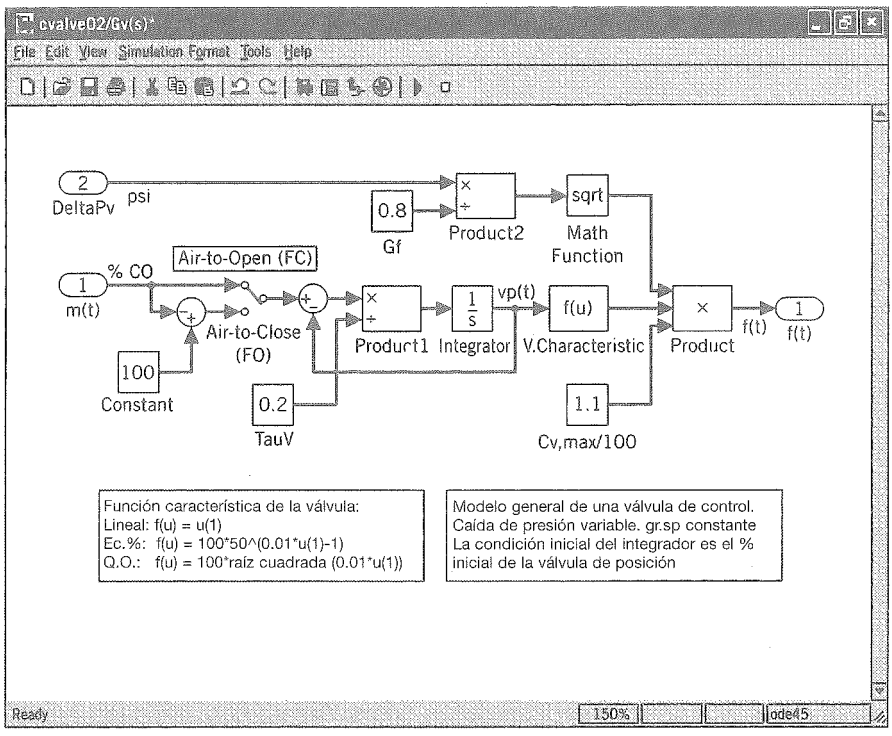


Figura 13-4.2 Diagrama de bloques de Simulink para una válvula de control con caída de presión variable y gravedad específica constante.

13-4.2 Simulación de controladores por retroalimentación

En esta sección se desarrolla un modelo para un controlador proporcional-integral-derivativo (PID) que permite condiciones iniciales diferentes de cero, limita directamente de 0 a 100% la salida del controlador y limita la ganancia dinámica en el modo derivativo. Este modelo es altamente recomendado cuando existe la posibilidad de que la salida del controlador se pueda saturar. El modelo se presenta en dos partes, la parte proporcional-integral (PI) y la proporcional-derivativa (PD). Luego, las dos partes se combinarán para simular un controlador PID en serie. Se presenta también un modelo de un controlador PID en paralelo.

Controlador proporcional-integral (PI)

La función de transferencia de un controlador PI está dada por la ecuación 5-3.14,

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) = K_c\left(\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s}\right) \qquad (5\text{-}3.14)$$

donde K_c es la ganancia proporcional y τ_I es el tiempo integral. El problema con la simulación directa de esta función de transferencia es que el limitador en la salida del controlador no evita que la salida del integrador se sature, al mismo tiempo que no es fácil limitar directamente el integrador. A continuación se desarrolla un modelo más conveniente:

$$\begin{aligned} \tau_I s M(s) &= K_c E(s)(\tau_I s + 1) \\ \tau_I s M(s) + M(s) &= K_c E(s)(\tau_I s + 1) + M(s) \\ M(s) &= K_c E(s) + \frac{1}{\tau_I s + 1} M(s) \end{aligned} \tag{13-4.4}$$

La ecuación 13-4.4 se programa en el diagrama de bloques de Simulink en la figura 13-4.3. El diagrama muestra que la salida del controlador $m(t)$ es la suma de los términos $K_c E$ y la salida es retrasada por una constante de tiempo τ_I de primer orden. Antes de que la salida se retroalimente al cálculo se inserta un limitador con límites de 0 a 100 %CO. Así, no existe manera

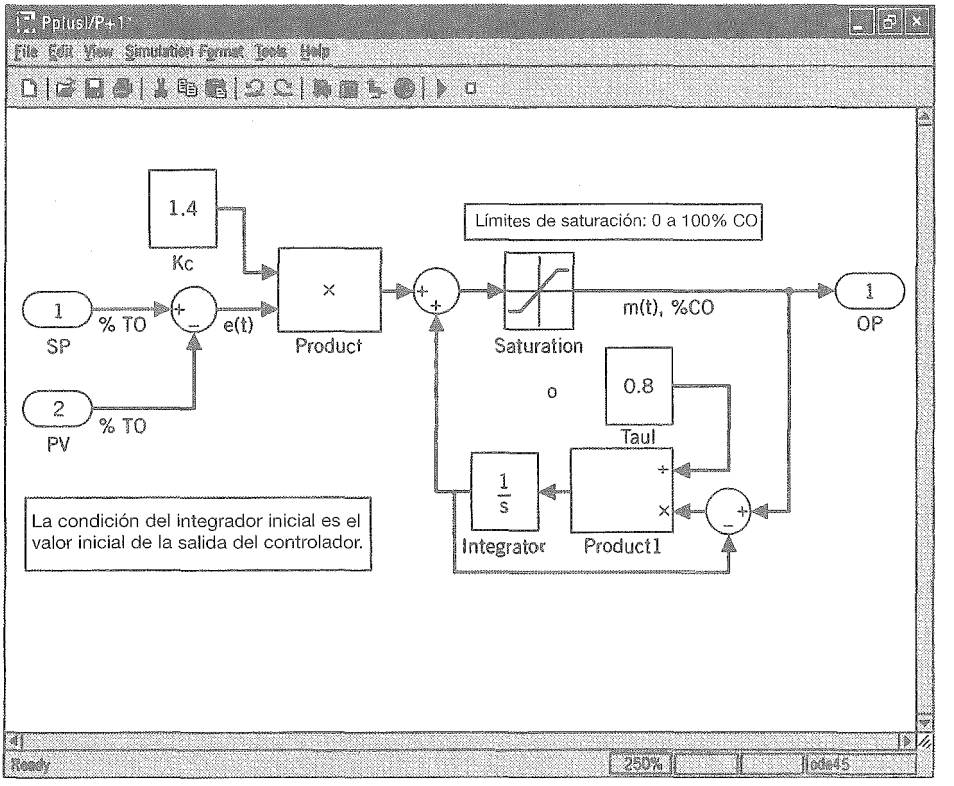


Figura 13-4.3 Diagrama de bloques de Simulink para el controlador proporcional integral (PI) con límites de saturación.

de que ninguna de las variables en el lazo se salga de esos límites. Para comenzar en estado estacionario, la condición inicial del integrador tiene que ser el valor inicial deseado de la salida del controlador, $m(0)$, contando con que el error inicial es cero. La única característica indeseable del modelo de controlador PI descrito aquí es que no es posible combinarlo con el factor derivativo para simular un controlador PID paralelo.

Unidad proporcional-derivativa (PD)

Aprendimos en la sección 5-3 que el modo derivativo requiere en la práctica un filtro:

$$\frac{U(s)}{X(s)} = \frac{\tau_D s}{\alpha\tau_D s + 1} \tag{13-4.5}$$

donde $U(s)$ es la salida, $X(s)$ es la entrada y τ_D es el tiempo derivativo. El filtro consiste en un retardo de primer orden con constante de tiempo $\alpha\tau_D$. El valor de α se selecciona lo suficientemente pequeño (de 0.05 a 0.2) de manera que el filtro no afecte el desempeño del controlador. El filtro limita la salida del modo derivativo en caso de una entrada repentina, tal como un cambio escalón, con un límite igual al producto de $1/\alpha$ por la magnitud del escalón. Por esto es que el filtro también se llama *limitador de ganancia dinámica*. El modelo del filtro derivativo de la ecuación 13-4.5 se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned} &\alpha\tau_D s U(s) + U(s) = \tau_D s X(s) \\ &U(s) = \frac{1}{\alpha\tau_D s}(\tau_D s X(s) - U(s)) = \frac{1}{\alpha}\left(X(s) - \frac{1}{\tau_D s} U(s) \right) \end{aligned} \tag{13-4.6}$$

Esta ecuación produce un modo derivativo filtrado. Para obtener la unidad PD simplemente añadimos la variable de entrada:

$$Y(s) = X(s) + U(s) \tag{13-4.7}$$

donde $Y(s)$ es la salida. La figura 13-4.4 muestra el diagrama de bloques en Simulink para la unidad PD. El multiplicador constante $1/\alpha$ se iguala a 8, el cual entonces es el límite de ganancia dinámica. Para prevenir un sobresalto al comienzo, la condición inicial del integrador debe ser el valor inicial de la entrada $x(0)$.

Combinando las ecuaciones 13-4.5 y 13-4.7, la función de transferencia de la unidad PD es

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = 1 + \frac{\tau_D s}{\alpha\tau_D s + 1} = \frac{(\alpha + 1)\tau_D s + 1}{\alpha\tau_D s + 1} \tag{13-4.8}$$

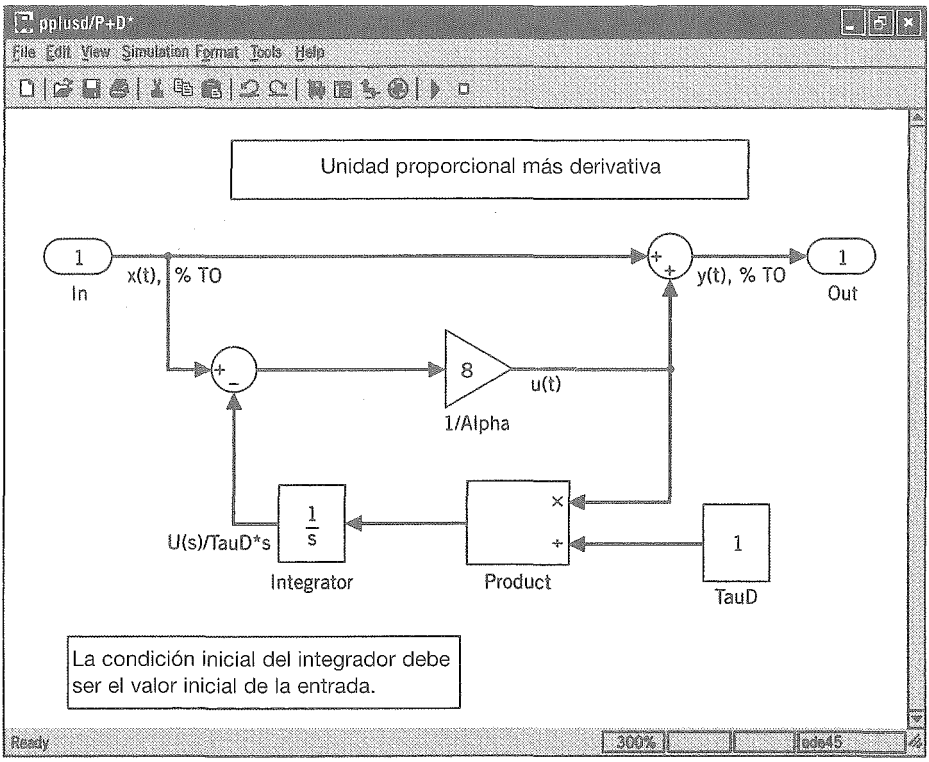


Figura 13-4.4 Diagrama de bloques de Simulink para la unidad proporcional más derivativa (PD). También sirve para introducir un adelanto neto de TauD con un factor de atenuación de alfa.

Vemos que la unidad PD es una unidad de adelanto-atraso con un adelanto neto de τ_D y una relación del adelanto sobre el retardo de $(\alpha + 1)/\alpha$. Esto quiere decir que el diagrama de la figura 13-4.4 también puede usarse para insertar un adelanto neto con un retardo despreciable en otros esquemas de control, tales como los controladores feedforward y desacopladores.

Simulación de un controlador proporcional-integral-derivativo (PID) en serie

Los diagramas de las figuras 13-4.3 y 13-4.4 son bloques de subsistemas en Simulink que ahora pueden conectarse para formar un controlador PID en serie, como se muestra en la figura 13-4.5. Obsérvese que la unidad PD está conectada en la entrada de medición en vez de en la señal de error. Ésta es la forma recomendada de hacerlo. Si se desea la acción derivativa en la señal de error, entonces el bloque PD debe moverse dentro del bloque PI de la figura 13-4.3 e insertarlo justo después del cálculo del error. El diagrama de la figura 13-4.5 es en sí mismo un subsistema de Simulink que puede ser usado para simular controladores PID en la simulación de sistemas de control.

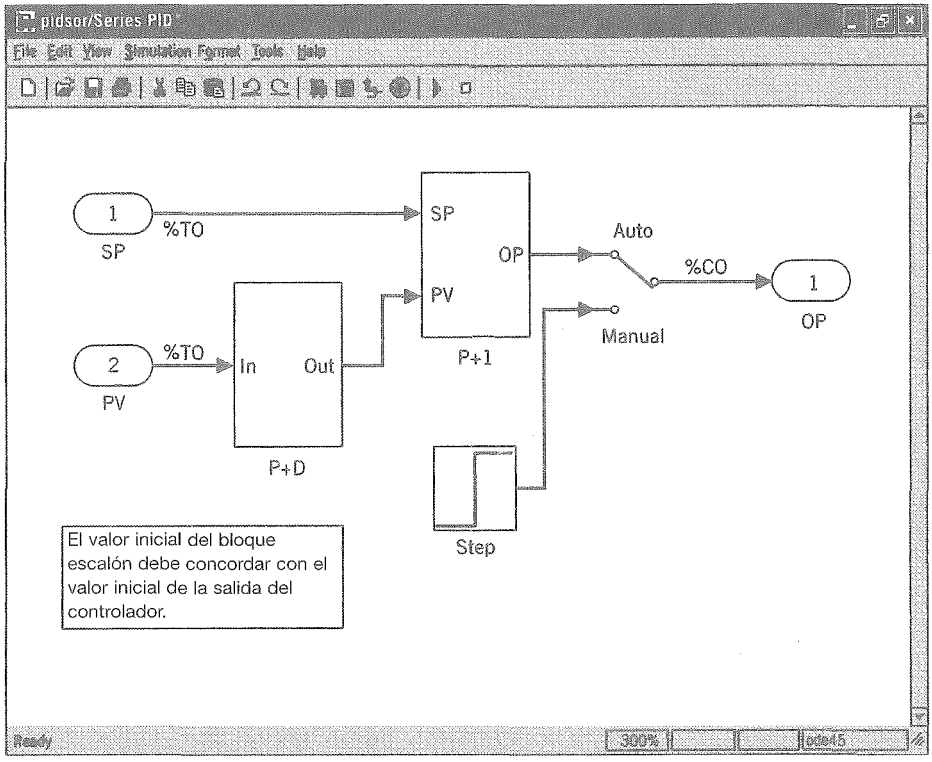


Figura 13-4.5 Diagrama de bloques para controladores PID en serie con derivada en la medición. Los bloques P + I y P + D son subsistemas que contienen los diagramas de las figuras 13-4.3 y 13-4.4. El interruptor automático-manual permite un cambio escalón en la salida de un controlador.

El diagrama de la figura 13-4.5 incluye un interruptor de automático/manual para introducir un cambio escalón en la salida del controlador. Aquí es donde debe aplicarse el cambio escalón para llevar a cabo el procedimiento de la prueba escalón del proceso descrito en la sección 7-2.1. Para obtener la respuesta del proceso al cambio escalón, el interruptor se coloca en la posición inferior y se determina la función escalón $M(t)$ para introducir un cambio escalón. Obsérvese que el valor inicial de la función escalón tiene que ser igual al valor inicial de la salida del controlador, y su valor final es el valor inicial más la magnitud del cambio escalón.

Simulación de un controlador proporcional más integrativo más derivativo (P + I + D) en paralelo

La figura 13-4.6 muestra un diagrama de bloques de Simulink para un controlador proporcional-integral-derivativo (P + I + D) en paralelo. Este modelo se desarrolló añadiendo el término integral al bloque PD de la figura 13-4.4 y posee las siguientes características:

- El término derivativo se filtra con un retardo de primer orden con una constante de tiempo igual a $\tau_D/8$.
- El término derivativo actúa sobre la variable de proceso y no sobre el error. Ésta es la configuración recomendada.
- Si las condiciones iniciales no son cero, el diagrama explica cómo establecer las condiciones iniciales para los dos integradores.

La función de transferencia del controlador de la figura 13-4.6 se presentó en el capítulo 5 como la ecuación 5-3.17.

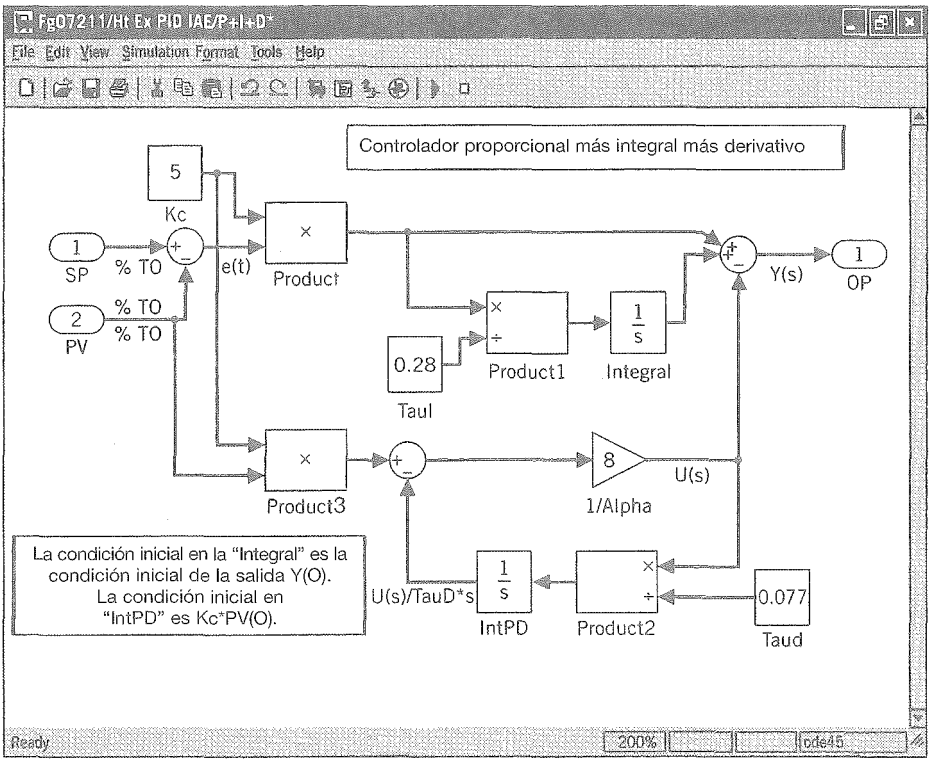


Figura 13-4.6 Simulación del controlador proporcional integral derivativo (P + I + D) en paralelo con derivada en la medición.

13-4.3 Simulación de sensores-transmisores

El diagrama de bloques en Simulink para el modelo de sensor-transmisor mostrado en la figura 13-4.7 consta de dos partes, un término dinámico que consiste en un retardo de primer orden con

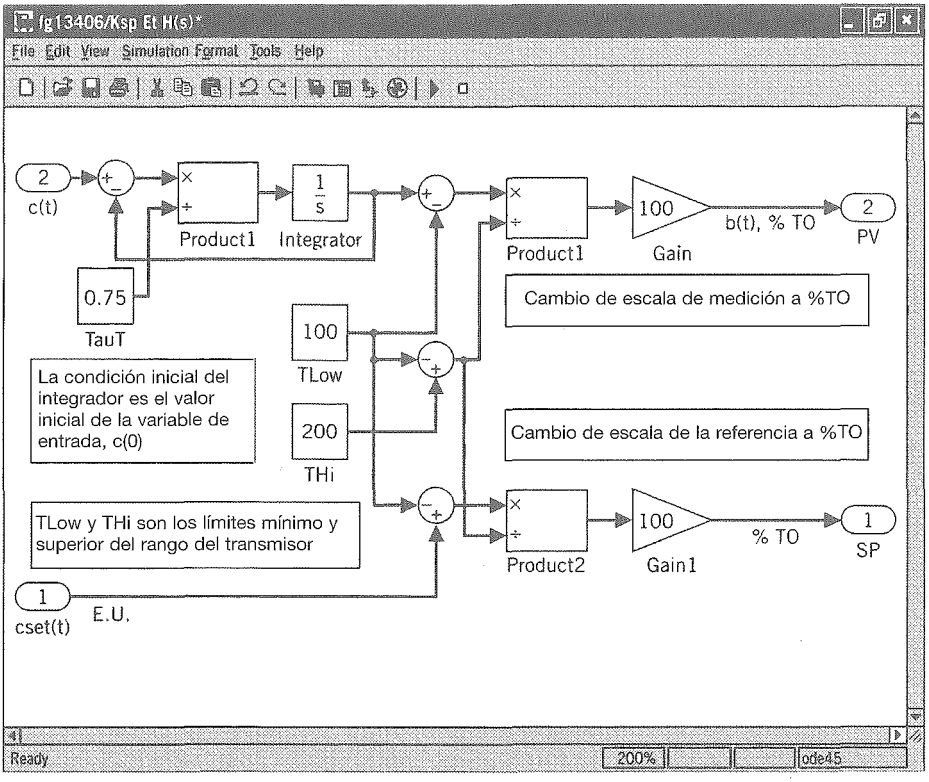


Figura 13-4.7 Diagrama de bloques de Simulink para simular un sensor-transmisor y cambiar la escala de la referencia.

una constante de tiempo τ_T y el cambio de escala de unidades de ingeniería a %TO. En el modelo también se muestra el cambio de escala de la referencia que pasa de unidades de ingeniería a %TO, que es idéntico al cambio de la variable de proceso. Si el transmisor no se conecta al controlador por retroalimentación, la porción del diagrama que tiene que ver con el cambio de escala de la referencia puede eliminarse.

Para comenzar en estado estacionario, la condición inicial del integrador tiene que ser igual al valor inicial de la variable medida, $c(0)$. El cálculo del cambio de escala mostrado en la figura 13-4.7 es para un transmisor lineal. Éste se deriva sabiendo que la señal de salida del transmisor $b(t)$ es cero cuando la variable de proceso $c(t) = T_{low}$ y 100 %TO cuando la variable de proceso $c(t) = T_{hi}$. Así, el cálculo es

$$b(t) = \frac{c(t) - T_{low}}{T_{hi} - T_{low}} 100\ \%\text{TO} \tag{13-4.9}$$

Donde T_{low} y T_{hi} son los límites inferior y superior del rango del transmisor, en las mismas unidades que $c(t)$. El mismo cálculo se hace para la entrada de la referencia a fin de producir la señal de referencia del controlador $r(t)$ en %TO.

Si el transmisor es no lineal, debe usarse un bloque de función matemática "Math Function" de Simulink para programar la función no lineal. Éste es el tipo de bloque usado en las figuras 13-4.1 y 13-4.2 para las características de las válvulas.

13-4.4 Simulación de compensación dinámica utilizando adelanto-atraso

La sección 11.3 mostró que las unidades de adelanto-atraso se utilizan comúnmente para introducir compensación dinámica en los esquemas de control feedforward. En muchas situaciones, la sintonización del dispositivo de adelanto-atraso puede simplificarse considerablemente si se utiliza el adelanto neto requerido sin ningún retardo o el retardo neto requerido sin ningún adelanto. Cuando éste es el caso, no se requiere ningún dispositivo especial para simular la unidad de adelanto-atraso. Por ejemplo,

- Puede simularse un adelanto neto con retardo despreciable utilizando la unidad PD de la figura 13-4.4 con $\tau_D = \tau_{lead} - \tau_{lag}$. Si se desea un retardo significativo, entonces se establece $\alpha = \tau_{lag}/\tau_D$.
- Puede simularse un retardo neto sin adelanto usando un retardo de primer orden con una constante de tiempo igual a $\tau_{lag} - \tau_{lead}$.

La única situación que no cubren los dos casos anteriores es cuando se desea un retardo neto con un adelanto significativo.

La figura 13-4.8 muestra el diagrama de bloques en Simulink para la unidad de adelanto-atraso. Se desarrolla como sigue:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\tau_{lead}s + 1}{\tau_{lag}s + 1} \tag{13-4.10}$$

$$\tau_{lag}sY(s) + Y(s) = \tau_{lead}sX(s) + X(s)$$

$$Y(s) = \frac{\tau_{lead}}{\tau_{lag}}X(s) + \frac{1}{\tau_{lag}s}[X(s) - Y(s)]$$

Para prevenir un cambio inicial abrupto en la salida, la condición inicial del integrador debe establecerse igual a $(\tau_{lag} - \tau_{lead})/\tau_{lag}$ multiplicada por el valor inicial de la entrada, $x(0)$.

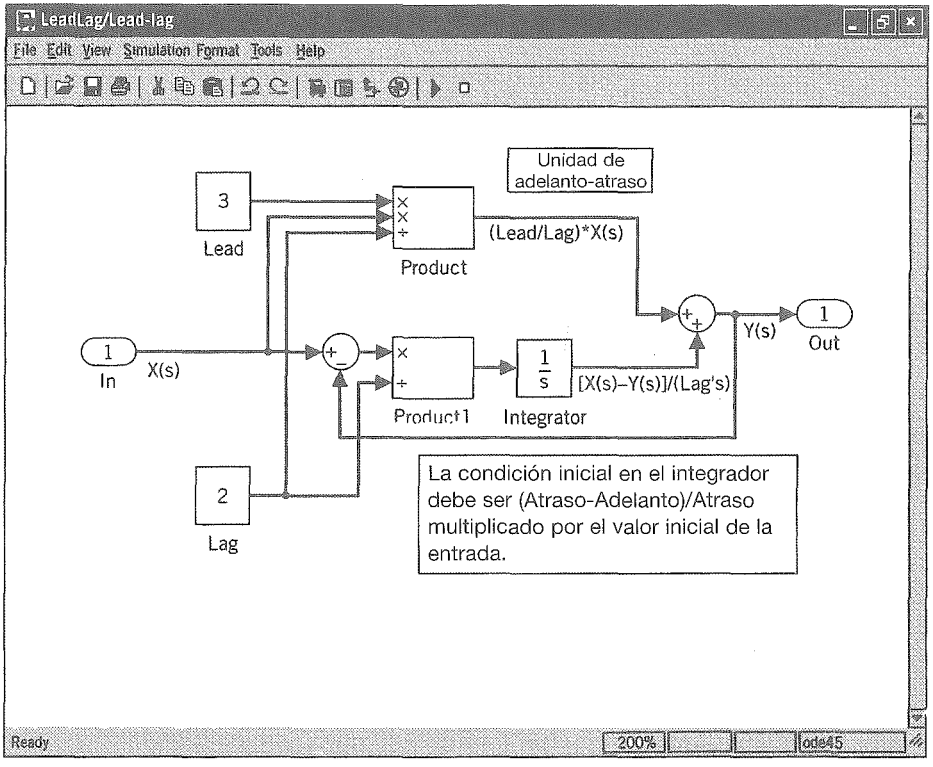


Figura 13-4.8 Diagrama de bloques de Simulink para la unidad de adelanto-atraso.

Simulación del tiempo muerto

Simulink, VisSim y la mayoría de los otros programas de simulación en bloque, proveen un bloque de tiempo muerto con la habilidad de establecer valores iniciales diferentes de cero.

Los siguientes ejemplos muestran cómo utilizar los modelos de los instrumentos presentados aquí para la simulación del control por retroalimentación y del control feedforward de la temperatura del tanque calentador de agitación continua del ejemplo 13-3.1.

Ejemplo 13-4.1 ***Control de temperatura por retroalimentación del tanque calentador de agitación continua.*** Simule el control de temperatura por retroalimentación del tanque calentador de agitación continua del ejemplo 6-1.1. Utilice un controlador PID en serie con los parámetros de sintonización determinados en el ejemplo 7-1.1 y muestre las respuestas a cambios escalón en el flujo del proceso.

Solución La figura 13-4.9 muestra el diagrama de bloques en Simulink del lazo de control. Se utilizan generadores de señales de entrada escalón para las tres entradas, la referencia de la temperatura $T^{SP}(t)$, el flujo del proceso $f(t)$ y la temperatura de entrada al proceso $T_i(t)$. Se emplean bloques de subsistema para el sensor-transmisor de temperatura, K_{sp} y $H(s)$, el controlador PID en serie, la válvula de control $Gv(s)$ y el proceso (STHtr). Los primeros tres bloques se detallan en las figuras 13-4.7, 13-4.5 y 13-4.1, respectivamente, mientras que el bloque del proceso se detalla en la figura 13-3.3. Los parámetros para los bloques de los instrumentos se indican en los ejemplos 6-1.1 y 7-1.1, a saber,

Sensor-transmisor	$\tau_T = 0.75$ min	$T_{low} = 100°F$	$T_{hi} = 200°F$
Controlador PID	$K_c = 6.1$ %CO/% TO	$\tau_I = 2.3$ min	$\tau_D = 0.58$ min
Válvula de control	$\tau_v = 0.20$ min	$f_{máx} = 84.4$ lb/min	

El flujo máximo a través de la válvula se obtiene aquí duplicando el flujo en estado estacionario de 42.2 lb/min determinado en el ejemplo 6-1.1, ya que la válvula está diseñada para una sobrecapacidad de 100%.

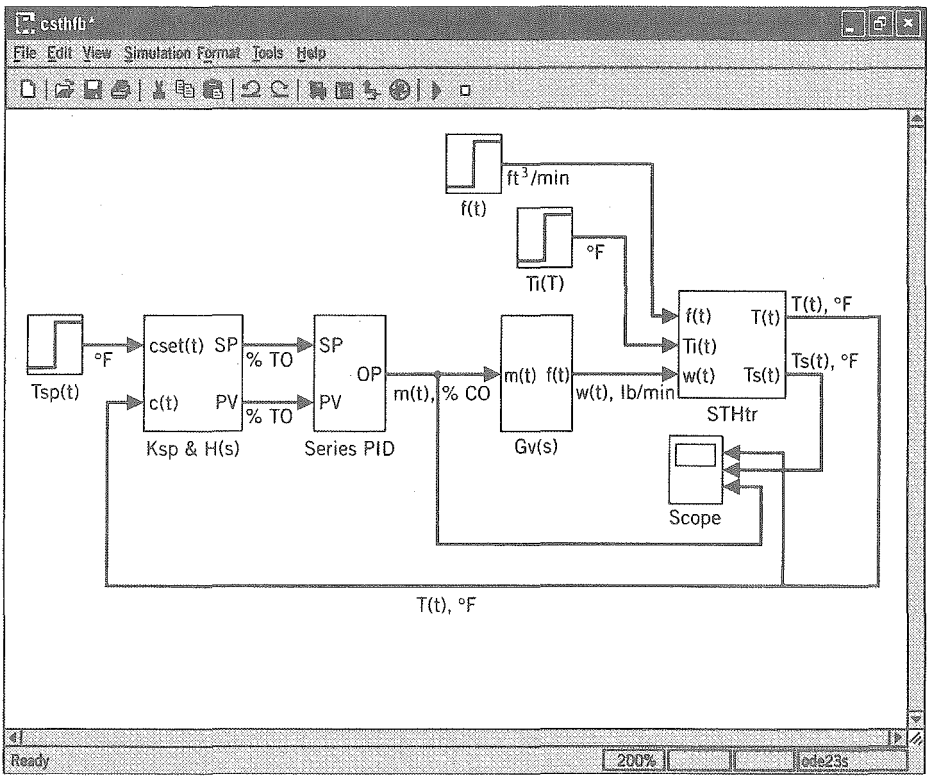


Figura 13-4.9 Diagrama de bloques de Simulink del lazo de control de temperatura para el calentador de tanque con agitación continua.

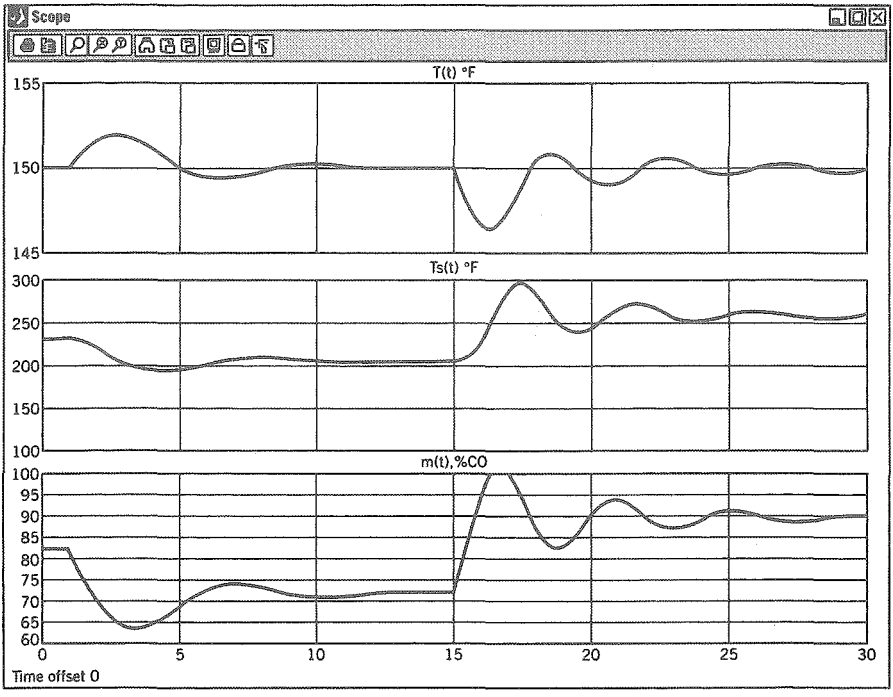


Figura 13-4.10 Respuestas del calentador de tanque de agitación a cambios escalón en el flujo de proceso.

La condición inicial de la posición de la válvula, la cual es también la de la salida del controlador, se calcula de manera que el flujo inicial sea 42.2 lb/min, para una válvula isoporcentual con un parámetro de rangeabilidad de 50,

$$\bar{w} = w_{\text{máx}} \cdot 50^{\overline{vp}-1}$$

$$\overline{vp} = 1 + \frac{\ln(\bar{w} / w_{\text{máx}})}{\ln 50} = 1 + \frac{\ln(42.2/84.4)}{\ln 50} = 0.823$$

o de 82.3 %VP. Las otras condiciones iniciales son las condiciones de diseño del ejemplo 6-1.1, esto es: $T(0) = 150°\text{F}$, $T_s(0) = 230°\text{F}$ y $b(0) = 50$ %TO.

La figura 13-4.10 muestra las respuestas de las temperaturas de salida y del vapor, y la de la salida del controlador, a un cambio escalón en el flujo de proceso de 15 a 10 ft^3/min en el tiempo $t = 1$ min, seguido de otro cambio escalón de 10 a 20 ft^3/min para $t = 15$ min. Nótese que la respuesta al aumento de flujo es mucho más oscilatoria que la respuesta a la disminución del flujo. Esto se debe probablemente al aumento en la ganancia de la válvula isoporcentual, la cual en realidad no se necesita aquí, en virtud de las suposiciones del problema. Nótese también que la salida del controlador se satura brevemente a 100 %CO para el aumento en el flujo de proce-

so. Estos efectos no pueden detectarse cuando se utiliza la simulación de la función de transferencia lineal de la figura 13-2.1. Hay otro efecto que podría requerir una simulación más detallada de la válvula de control. Obsérvese cuánto aumenta la temperatura del vapor con el aumento en el flujo de proceso. A medida que la temperatura del vapor aumenta, la presión en la caja de vapor aumenta, ya que ésta es la presión de vapor del agua a la temperatura de condensación. Esto podría afectar la caída de presión a través de la válvula y reducir la capacidad de la misma, dependiendo de la presión de suministro del vapor. Esta dificultad se considera en uno de los problemas al final de este capítulo.

Ejemplo 13-4.2 ***Control feedforward del tanque calentador de agitación continua.*** Diseñar un controlador feedforward para el tanque calentador de agitación continua del ejemplo 13-4.1. El controlador debe compensar los cambios en el flujo de proceso y la temperatura de entrada. Simular el esquema de control feedforward con y sin compensación dinámica. Suponer que se instala un controlador de flujo para controlar el flujo de vapor y que el controlador feedforward debe determinar el valor de referencia del controlador de flujo. El transmisor de flujo del proceso tiene un rango de 0 a 25 ft^3/min y un retardo despreciable, y el transmisor de temperatura tiene un rango de 50 a 150°F y un retardo de 0.75 min. El

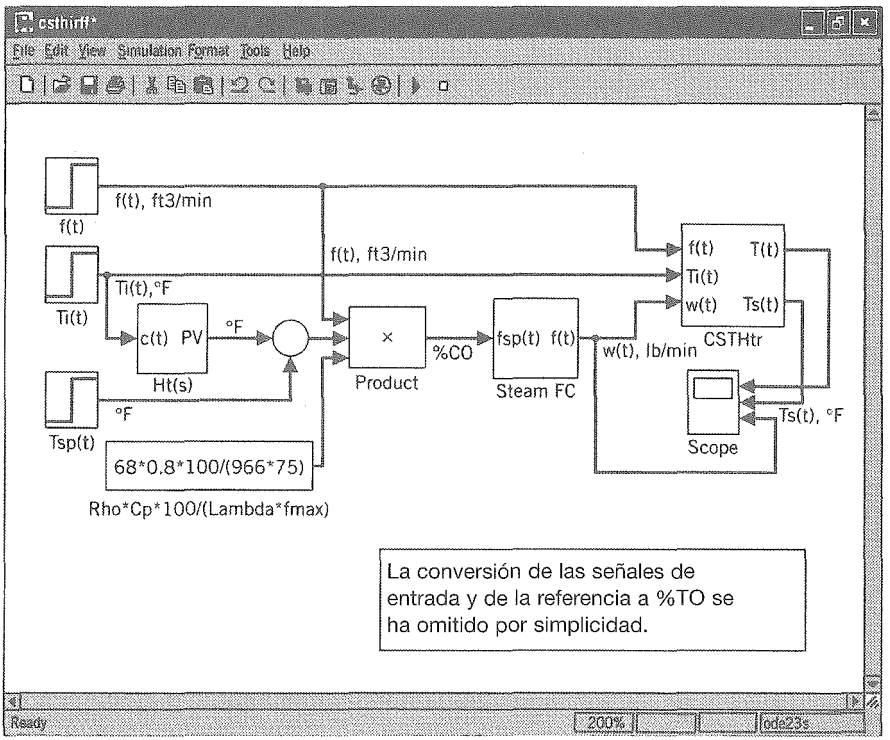


Figura 13-4.11 Diagrama de bloques de Simulink para el control feedforward del calentador de tanque de agitación sin compensación dinámica.

transmisor de flujo de vapor tiene un rango de 0 a 75 lb/min, y la constante de tiempo del lazo de control de flujo es 0.2 min.

Solución Para diseñar el controlador feedforward seguimos el procedimiento delineado en la sección 11-2. El objetivo del control es mantener la temperatura del proceso en el valor de la referencia, $T(t) = T^{set}(t)$. Las perturbaciones son el flujo del proceso $f(t)$ y la temperatura de entrada $T_i(t)$, y la variable manipulada es la referencia del flujo de vapor, $w^{set}(t)$. Un balance de entalpía en estado estacionario en el tanque establece una simple relación entre estas variables:

$$w(t)\lambda = f(t)\rho c_p (T(t) - T_i(t))$$

$$\therefore w^{set}(t) = \frac{\rho c_p}{\lambda} f(t)(T^{set}(t) - T_i(t))$$

donde ρ es la densidad del fluido en lb/ft^3, c_p es el calor específico en Btu/lb-°F y λ es el calor latente de condensación del vapor en Btu/lb.

La figura 13-4.11 muestra el controlador feedforward basado en la ecuación derivada anteriormente. Éste consta de un sumador para calcular el cambio en la temperatura y un multiplicador para obtener el producto del flujo por el cambio de temperatura y por el parámetro constante. Por simplicidad se omite la conversión de escala a la fracción de la salida del transmisor. En la práctica, en el cálculo deben tomarse en cuenta los rangos del transmisor de flujo de proceso y el de la temperatura de entrada. El transmisor de la temperatura de entrada $H_t(s)$ se simula como un retardo de primer orden con ganancia unitaria, y el controlador de flujo de vapor como una válvula lineal.

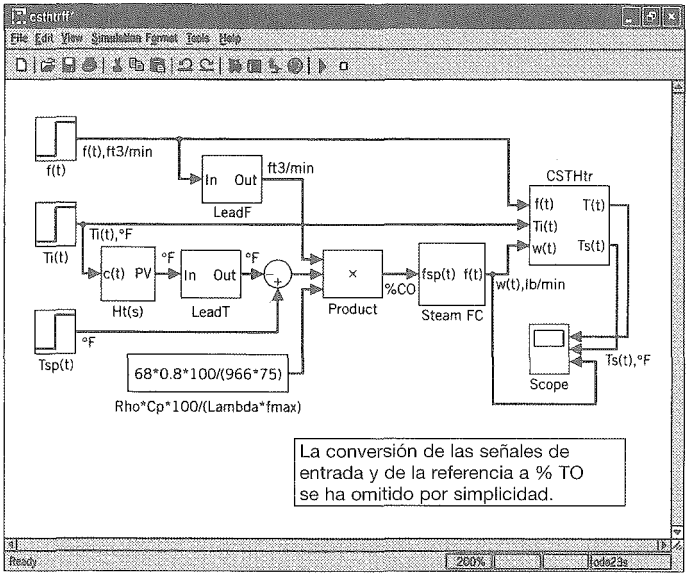


Figura 13-4.12 Diagrama de bloques del controlador feedforward con compensación dinámica.

La figura 13-4.12 muestra el controlador feedforward con compensación dinámica. Los bloques de adelanto se simularon como la unidad PD de la figura 13-4.4. Luego de un proceso de sintonización, el adelanto neto para la perturbación del flujo se establece en 1.0 min con α = 1/1.5 (esto es equivalente a un adelanto de 1.67 min con un retardo de 0.67 min). Se empleó un adelanto neto de 1.7 min con α = 1/4 en la perturbación de la temperatura de entrada, equivalente a un adelanto de 2.12 min con un retardo de 0.42 min. El requerimiento de un adelanto mayor en la temperatura es para compensar el retardo en el transmisor.

La figura 13-4.13 muestra las respuestas de las variables del calentador a un cambio escalón en el flujo del proceso de 15 a 10 ft^3/min a t = 1 min, seguido de un cambio escalón en la temperatura de entrada de 100° a 110°F a t = 30 min. Las respuestas mostradas son para control por retroalimentación y control feedforward con y sin compensación dinámica. Comparado con la respuesta por retroalimentación, el controlador feedforward estático reduce la desviación inicial en la temperatura aproximadamente a la mitad y la compensación dinámica reduce otra mitad aproximadamente la desviación inicial. Esto se debe a que el controlador feedforward estático actúa tan pronto el flujo de proceso cambia, mientras que el controlador por retroalimentación debe esperar la desviación en la temperatura para actuar. Las unidades de adelanto dinámico proporcionan aún más corrección inicial, como muestra la figura 13-4.13.

Aunque más lentamente que el controlador por retroalimentación, los controladores feedforward regresan la temperatura del proceso a su referencia de 150°F luego del estado transito-

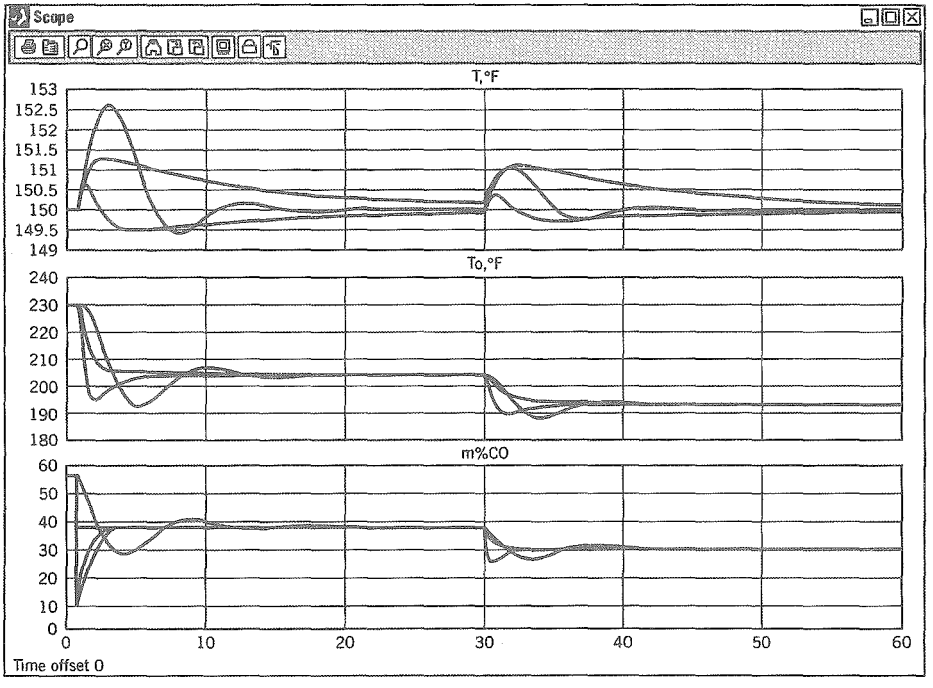


Figura 13-4.13 Comparación de las respuestas del calentador de tanque de agitación para el control por retroalimentación y el control feedforward con y sin compensación dinámica.

rio inicial. Esto se debe a que en esta situación de simulación ideal, los valores de los parámetros de proceso –densidad, calor específico y calor latente– se conocen con exactitud. En la práctica, debe instalarse un controlador por retroalimentación junto con el controlador feedforward para compensar los errores en el modelo feedforward. Cuando se hace esto, la salida del controlador por retroalimentación puede conectarse a la referencia del controlador feedforward.

Los ejemplos anteriores muestran cómo integrar los modelos presentados en las secciones 13-3 y 13-4 para simular sistemas de control de procesos completos. Una ventaja de expresar los modelos en forma de subsistemas es que pueden copiarse y pegarse fácilmente de una simulación a otra.

13-5 OTROS ASPECTOS SOBRE SIMULACIÓN

Hasta ahora hemos discutido solamente los aspectos básicos de la simulación dinámica aplicados a sistemas continuos. La mayoría de los simuladores de procesos proporcionan un número de características y bloques especializados que son sumamente útiles para el ingeniero en el modelaje de procesos. Algunas de estas características se examinan en esta sección.

Rigidez

Cuando se resuelve numéricamente un sistema de ecuaciones diferenciales, algunas ecuaciones pueden responder más rápido que otras. Esta característica se conoce como rigidez y requiere métodos de integración numérica especiales. Por ejemplo, en las simulaciones anteriores, las unidades PD y de adelanto introducen la constante de tiempo $\alpha\tau_D$, que es mucho más pequeña que las otras constantes de tiempo en la simulación. Cuando se utiliza un método de integración numérica estándar para resolver un sistema rígido, tal como ODE45 y ODE23 de MATLAB, la respuesta de algunas variables será ruidosa debido a errores de integración. Cuando esto sucede, se selecciona un método diseñado para manejar la rigidez, tal como ODE23s, en el cual la "s" al final del nombre del método en MATLAB indica que el método es apropiado para manejar la rigidez (*stiffness*, en inglés).

Modelos complejos

Algunos modelos dinámicos son demasiado complejos para simularlos utilizando bloques de cálculo. Ejemplos de esto son los modelos de columnas de destilación de platos y los sistemas de parámetros distribuidos, esto es, sistemas en los cuales las variables son funciones de espacio y tiempo. Para programar tantas ecuaciones, los programas orientados a procedimientos como C++, Pascal, Basic o archivos *m* de MATLAB, son mucho más convenientes que programar utilizando bloques. Sin embargo, la programación por bloques sigue siendo deseable para simular los componentes de control e instrumentación y para agrupar el sistema de control. Por lo tanto, es conveniente ser capaz de crear bloques hechos a la medida para resolver las ecuaciones en un lenguaje procedural, aceptando entradas desde los componentes de control y gene-

rando salidas hacia ellos. Muchos programas orientados a bloques tienen tal característica. En MATLAB, el bloque de la función S provee esta característica.

El bloque de la función S acepta un vector de variables de entrada y genera un vector de variables de salida. Los enunciados procedurales contenidos en una función guardada en un archivo *m*, el cual está asociado con el bloque, realizan los cálculos.

Operaciones en tiempo discreto

En algunos sistemas de control, las variables de proceso no están disponibles de manera continua para el controlador. Por ejemplo, cuando se utiliza un cromatógrafo de gases para medir la composición de una corriente de proceso, el analizador toma una muestra y la analiza, tomando cierto tiempo para hacerlo, el tiempo de ciclo. El controlador no observa la composición hasta el final del tiempo de ciclo. El controlador tampoco puede saber si la composición cambió durante el ciclo.

Para simular operaciones en tiempo discreto, los programas de simulación cuentan con un conjunto de bloques conocidos como *bloques discretos*. Dos de los bloques más utilizados son el de *muestreo y retención* y el de *retraso*. El bloque de muestreo y retención muestrea la variable de entrada y la mantiene constante durante un tiempo de muestra, exactamente igual que el analizador. Sin embargo, para simular completamente el analizador, un bloque de retraso con duración de una muestra debe conectarse luego del bloque de muestreo y retención para simular el hecho de que la composición no está disponible hasta el fin del ciclo.

Otras características

Los programas de simulación modernos poseen muchas otras características, como el almacenamiento de los datos de respuestas en archivos que pueden utilizarse con otros programas, la manipulación de vectores y matrices, bloques para la simulación de efectos especiales como histéresis y bandas muertas, etcétera. El usuario de estos programas debe revisar cuidadosamente la ayuda en línea que proveen éstos para aprender a utilizar estas características cuando así lo requiera.

Ejemplo 13-5.1 ***Modelo simple de una columna de destilación.*** Aunque las columnas de destilación son una de las operaciones más complejas que se modelan, aquí se presenta un modelo sencillo para demostrar el uso de la función S en Simulink. La figura 13-5.1 representa un diagrama de la columna.

Una corriente de alimentación líquida saturada, consistente en 55% molar de benceno (x_F) y el resto de tolueno, fluye a una columna de destilación a una tasa F de 3500 lbmol/h. Para los fines de este modelo, se puede suponer que la volatilidad relativa, α, es constante e igual a 2.46, y que el calor latente de la mezcla, λ, es también constante e igual a 13 860 Btu/lbmol. La columna puede representarse mediante 6 platos ideales, con la alimentación entrando entre el plato 3 y el 4. Cada plato tiene una retención constante de 450 lbmol. Podemos asumir que se utiliza un condensador para condensar todos los vapores que salen de la columna a fin de mantener la presión constante, y que el condensado sale del condensador cuando está en su punto de burbuja.

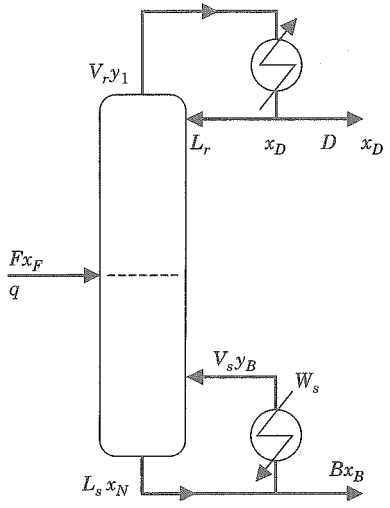


Figura 13-5.1 Esquema de la columna de destilación para el ejemplo 13-5.1.

En el tanque acumulador del condensador, la retención varía de 50 a 550 lbmol ya que la señal del transmisor de nivel varía de 0 a 100 %TO. Se puede suponer que la tasa de los vapores que salen del rehervidor, V_s, es proporcional al flujo de vapor W_s. Se utiliza vapor saturado a 15 psig. A esta presión, el calor latente de condensación del vapor λ_s es 952 Btu/lb. El rehervidor parcial se comporta como una etapa adicional de equilibrio. El fondo de la columna tiene una retención de 100 lbmol cuando el nivel está en el mínimo del rango del transmisor y de 1100 lbmol cuando el nivel está en el máximo del rango.

En las condiciones de diseño, la composición del destilado, x_D, es 92% molar de benceno y la composición del fondo, x_B, es 10% molar. La relación de reflujo L_r/D es 2.5 aproximadamente.

Modelar la columna suponiendo un sobreflujo equimolar, esto es, que las tasas de líquido y vapor no varían de etapa en etapa, y que el líquido en cada plato, el acumulador y el rehervidor está perfectamente mezclado.

Solución Al modelar procesos es una buena idea definir primero las variables de entrada al proceso. Para las columnas, éstas son la tasa de flujo F, la fracción molar del benceno x_F y la condición de entalpía q, esto es, la fracción en estado líquido en las condiciones del plato de alimentación. Para una alimentación líquida saturada $q = 1$. Las variables que debe manipular el sistema de control son el reflujo L_r, el flujo de vapor al rehervidor W_s, el flujo del destilado D y el flujo del producto del fondo B.

Suponiendo un sobreflujo equimolar, el líquido que sale de cada plato es igual a L_r en la sección de rectificación –arriba del plato de alimentación– y L_s en la sección de agotamiento –abajo del plato de alimentación–. Asimismo, las tasas de los vapores son V_r y V_s en las secciones de rectificación y agotamiento, respectivamente.

A partir de un balance de entalpía en el rehervidor, despreciando los efectos de calor sensible, se obtiene la proporcionalidad entre la tasa de vapor del agua y la tasa del vapor ascendente:

$$V_s(t) = \frac{\lambda_s}{\lambda} W_s(t) = \frac{952 \text{ Btu/lb}}{13{,}860 \text{ Btu/lbmole}} W_s(t) = 0.0687 W_s(t)$$

De la definición de la condición de entalpía de la alimentación, los balances de materia total en el plato de alimentación dan:

$$L_s(t) = L_r(t) + qF(t)$$
$$V_r(t) = V_s(t) + (1-q)F(t)$$

Un balance de benceno en cada etapa, asumiendo retenciones constantes y mezcla perfecta, produce lo siguiente:

$$M_i \frac{dx_1(t)}{dt} = L_r(t)[x_D(t) - x_1(t)] + V_r(t)[y_2(t) - y_1(t)]$$
$$M_i \frac{dx_2(t)}{dt} = L_r(t)[x_1(t) - x_2(t)] + V_r(t)[y_3(t) - y_2(t)]$$
$$M_i \frac{dx_3(t)}{dt} = L_r(t)[x_2(t) - x_3(t)] + V_r(t)[y_4(t) - y_3(t)]$$
$$M_i \frac{dx_4(t)}{dt} = L_r(t)x_3(t) + Fx_F(t) + V_s(t)y_5(t) - V_r(t)y_4(t) - L_s(t)x_4(t)$$
$$M_i \frac{dx_5(t)}{dt} = L_s(t)[x_4(t) - x_5(t)] + V_s(t)[y_6(t) - y_5(t)]$$
$$M_i \frac{dx_6(t)}{dt} = L_s(t)[x_5(t) - x_6(t)] + V_s(t)[y_B(t) - y_6(t)]$$

6 ec., 14 incóg. ($6x_i$, $6y_i$, x_D, y_B)

Las relaciones de equilibrio, basadas en la volatilidad relativa, dan las composiciones de los vapores:

$$y_i(t) = \frac{\alpha x_i(t)}{1 + (\alpha - 1)x_i(t)} \qquad i = 1,\ldots,6$$

12 ec., 14 incóg.

La relación de equilibrio también se aplica al rehervidor, ya que se supuso como una etapa de equilibrio.

$$y_B(t) = \frac{\alpha x_B(t)}{1+(\alpha-1)x_B(t)}$$

13 ec.,15 incóg. (x_B)

Entonces se llevan a cabo los balances molares de benceno y totales en el acumulador del condensador.

$$\frac{dM_D(t)}{dt} = V_r(t) - L_r(t) - D(t)$$
$$\frac{d[M_D(t)x_D(t)]}{dt} = V_r(t)y_1(t) - [L_r(t) + D(t)]x_D(t)$$

15 ec., 16 incóg. (M_D)

De manera similar, se escriben los balances molares de benceno y totales para el fondo y el rehervidor de la columna, suponiendo mezcla perfecta:

$$\frac{dM_B(t)}{dt} = L_s(t) - B(t) - V_s(t)$$
$$\frac{d[M_B(t)x_B(t)]}{dt} = L_s(t)x_6(t) - B(t)x_B(t) - V_s(t)y_B(t)$$

17 ec., 17 incog. (¡Resuelto!)

Esto completa el modelo simple de la columna. Se debe tener en cuenta que este modelo requiere dos controladores de nivel para mantener los balances de materia en el acumulador y el fondo de la columna.

Debido a que las retenciones no son constantes, los balances de benceno en el acumulador y el fondo no proporcionan directamente las derivadas de las composiciones. Este problema puede resolverse con un poco de algebra. Expandiendo la derivada del acumulador y sustituyendo el balance molar total obtenemos:

$$\frac{d[M_D(t)x_D(t)]}{dt} = M_D(t)\frac{dx_D(t)}{dt} + x_D(t)\frac{dM_D(t)}{dt}$$
$$= M_D(t)\frac{dx_D(t)}{dt} + x_D(t)[V_r(t) - D(t) - L_r(t)]$$
$$= V_r(t)y_1(t) - [D(t) + L_r(t)]x_D(t)$$
$$M_D(t)\frac{dx_D(t)}{dt} = V_r(t)[y_1(t) - x_D(t)]$$

Tabla 13-5.1 Condiciones de la columna de destilación

Condiciones de diseño		Condiciones iniciales
F = 3500 lbmol/h	x_F = 0.55	x_D = 0.9206
D = 1921 lbmol/h	q = 1.00	x_1 = 0.8274
B = 1579 lbmol/h		x_2 = 0.7037
L_r = 4802 lbmol/h	V_r = 6723 lbmol/h	x_3 = 0.5703
L_s = 8302 lbmol/h	V_s = 6723 lbmol/h	x_4 = 0.4524
	W_s = 97873 lb/h	x_5 = 0.3188
		x_6 = 0.1928
		x_B = 0.0993

De manera similar, el balance de benceno en el fondo de la columna se convierte en:

$$M_B(t)\frac{dx_B(t)}{dt} = L_s(t)[x_6(t) - x_B(t)] - V_s(t)[y_B(t) - x_B(t)]$$

El modelo de la columna consiste en 10 ecuaciones diferenciales y 7 relaciones de equilibrio, más los dos balances molares totales en el plato de alimentación. Como en casi todas las simulaciones de sistemas de control, es deseable comenzar a partir de las condiciones iniciales en estado estacionario. Con algunas herramientas de cómputo modernas, tales como MATLAB y MathCAD, es posible resolver simultáneamente las ecuaciones para obtener las condiciones de estado estacionario haciendo las derivadas con respecto al tiempo igual a cero. También es necesario determinar la tasa de alimentación, la composición y la condición de entalpía en sus valores de diseño, así como la composición del fondo y la relación de reflujo L_r/D. La solución de las 19 ecuaciones con las 19 incógnitas que quedan produce la condición de estado estacionario que se muestra en la tabla 13-5.1. Obsérvese que los valores iniciales de la retención en el acumulador del condensador y el fondo de la columna no pueden calcularse a partir de las ecuaciones de estado estacionario de la columna, por lo que aquí se supone que corresponden al 50% de las salidas de los transmisores de nivel. El valor inicial de la tasa de flujo de vapor se obtiene a partir de un balance de entalpía en el fondo de la columna, como se describió antes.

La simulación del modelo de la columna de destilación utilizando los bloques de cálculo de Simulink sería muy compleja y difícil de manejar. Un método más sencillo es utilizar el bloque de la *función S* de Simulink, el cual es algo similar a construir un bloque personalizado para simular la columna. La figura 13-5.2 muestra el diagrama de bloques de Simulink para la columna utilizando el bloque de la función S. El bloque se refiere a un archivo *m* llamado Distillation.*m*, el cual contiene las ecuaciones para la simulación de la columna. La figura 13-5.3 muestra el contenido del archivo *m* para el modelo de destilación. Este programa tiene las siguientes características:

- Comienza definiendo los parámetros del problema.
- Almacena siete variables de entrada de la función S en variables con nombres que son fáciles de reconocer como variables del modelo. Nótese que se supone que los flujos se

indican en lbmol/h y lb/h, pero éstos se dividen entre 60 para convertirlos en lbmol/min y lb/min. Entonces, las unidades de la variable independiente de la simulación estarán en minutos.

- Mueve las variables de estado, contenidas en el vector x, a variables cuyos nombres son más fáciles de identificar como variables de modelo, como se hizo para las variables de entrada.
- Calcula las derivadas de las variables de estado.
- Produce las cuatro variables de salida: x_D, x_B y los niveles en el acumulador y en el fondo de la columna.
- Establece las condiciones iniciales para las 10 variables de estado.

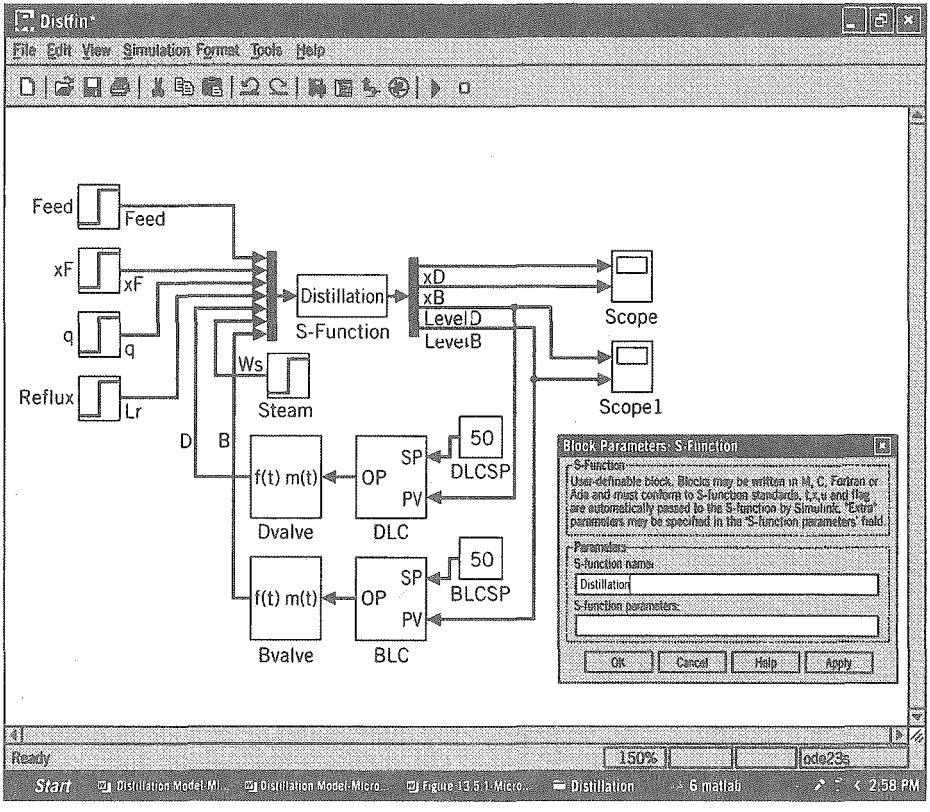


Figura 13-5.2 Esquema de Simulink para la columna de destilación usando una función S.

```
función [sys, xo] = Destilación (t, x, flag)

%   t = variable de tiempo (independiente); x = vector de variable de estado
%   u = vector de variable de entrada
%   flag (Véase abajo. Determinado por Simulink de acuerdo con la etapa del problema)
%
%   Columna de destilación binaria con seis etapas de equilibrio, alimentadas en la etapa 4
%   Sobreflujo equimolar, volatilidad relativa constante, presión constante

xL = ceros (1, 6);
y  = ceros (1, 6);

        %                       Establecer aquí las constantes del problema

Alfa      = 2.46;               % de volatilidad relativa
LambdaV   = 13860;              % Calor de vapores latente, BTU/lbmol
LambdaS   = 952;                % Calor de vapor latente, BTU/lb (sat. 15 psig de vapor)
Mi        = 450;                % Retención del plato, lbmol
MDmín     =  50;                % retención mínima del acumulador, lbmol
MDmáx     = 550;                % retención máxima del acumulador, lbmol
MBmín     = 100;                % retención mínima del fondo, lbmol
MBmáx     = 1100;               % retención máxima del fondo, lbmol

Si flag = =   1       %     Cálculo de las derivadas de las variables de estado

                      %     Variables de entrada

Alimentación (Feed) = u(1)/60;  % Tasa de alimentación, lbmol/min
xF                  = u(2);     % Fracción molar de alimentación
q                   = u(3);     % Líquido de fracción de alimentación
Lr                  = u(4)/60;  % Reflujo, lbmol/min
D                   = u(5)/60;  % Tasa de destilación, lbmol/min
Ws                  = u(6)/60;  % Flujo de vapor al recalentador, lb/min
B                   = u(7)/60;  % Flujo del fondo, lbmol/min

                      %     Cálculos iniciales

Ls  = Lr + q* Feed;             % flujo del líquido de separación, lbmol/min
Vs  = Ws*LambdaS/LambdaV;       % tasa de vapor de separación, lbmol/min
Vr  = Vs + (1-q)*Feed;          % tasa de vapor de rectificación, lbmol/min
```

Figura 13-5.3 Archivo *m* para el modelo de destilación de la función S.

```
                    %          Variables de estado

para i    = 1:6
     xL(i) = x(i);
     y(i)  = Alfa*xL(i)/(1 + (Alfa – 1)*xL(i));
fin
xD = x(7);
xB = x(8);
MD = x(9);
MB = x(10);
yB = Alfa*xB/(1 + (Alfa – 1)*xB);

%  Cálculo de las derivadas sys(i) = dx(i)/dt de las variables de estado

sys (1)  = (Lr* (xD – xL(1)) + Vr*(y(2) – y(1)))/Mi;                    %  Etapa 1
sys (2)  = (Lr* (xL(1) – xL(2) + Vr*(y(3) – y(2)))/Mi;                  %  Etapa 2
sys (3)  = Lr* (xL(2) – xL(3) + Vr*(y(4) – y(3)))/Mi;                   %  Etapa 3
sys (4)  = (Lr* xL(3) + Feed*xF – Ls*xL(4) + Vs*y(5) – Vr*y(4))/Mi;     %  Alimentación
sys (5)  = (Ls* (xL(4) – xL(5) + Vs*(y(6) – y(5)))/mi;                  %  Etapa 5
sys (6)  = (Ls* (xL(5) – xL(6) + Vs*(yB – y(6)))/mi;                    %  Etapa 6

sys (7)  = Vr*(y(1) – xD)/MD;                  % Fracción molar del destilado
sys (8)  = (Ls*(xL(6) – xB) – Vs*(yB – xB))/MB;  % Fracción molar del fondo
sys (9)  = Vr – Lr – D;                        % Retención del acumulador
sys (10) = Ls – Vs – B;                        % Retención de fondo

o bien, si flag = = 3   % Cálculo de salidas
    sys (1) = x(7);                                % Fracción molar del destilado
    sys (2) = x(8);                                % Fracción molar del fondo
    Dlevel = (x(9) – MDmín)/(MDmáx – MDmín) *100;  % Al nivel del acumulador
    Dlevel = (mín)([Dlevel 100]);
    sys (3) = máx ([Dlevel 01);
    Blevel = (x(10) – MBmín/(MBmáx – MBmín) *100;  % Al nivel del fondo
    Blevel = mín ( [Blevel 100]);
    sys (4) = máx ( [Blevel 0] );

elseif flag = = 0   % Initialize: [# cont. states, # disc. states = 0,
    sys = [10, 0, 4, 7, 0, 0];   %   # outputs, # inputs]

    MDo = MDmín + 0.5* (MDmáx – MDmín);   % Capacidad de retención inicial a 50 %TO
    MBo = MBmín + 0.5* (MDmáx – MBmín);   % Composiciones iniciales y retenciones
    xo = [0.8274, 0.7037, 0.570, 0.452, 0.3188, 0.1928, 0.9206, 0.0993, MDo, MBo];
    else
    sys = [ ];
end
```

Figura 13-5.3 (*Continuación*)

El resto de los enunciados son requerimientos de la función S descritos en los archivos de ayuda del programa Simulink.

El diagrama de la figura 13-5.2 muestra los controladores de nivel para el tanque acumulador (DLC) y el fondo de la columna (BLC). Es importante darse cuenta de que sin estos controladores de nivel el modelo se alejaría rápidamente de su valor de estado estacionario, tal como sucedería con una columna de destilación en la vida real.

La figura 13-5.4 muestra las respuestas de las composiciones de destilado y fondo a un cambio escalón de 2000 lb/h en el flujo de vapor, seguido de un cambio escalón en el flujo de la corriente de reflujo de 140 lbmol/h. Nótese cómo un incremento en el flujo de reflujo casi cancela exactamente el efecto del flujo de vapor en ambas composiciones. Si se manipularan con un sistema de control los flujos de vapor y de reflujo para controlar las composiciones de ambos productos, la interacción entre ellos ocasionaría que cada controlador contrarrestara las acciones del otro. El concepto de interacción de lazos se estudia en el capítulo 12. La figura 13-5.4 también muestra que la respuesta de la columna es muy lenta. Se requieren aproximadamente 400 minutos, más de 6 horas, para que la columna alcance un nuevo estado estacionario luego de una perturbación.

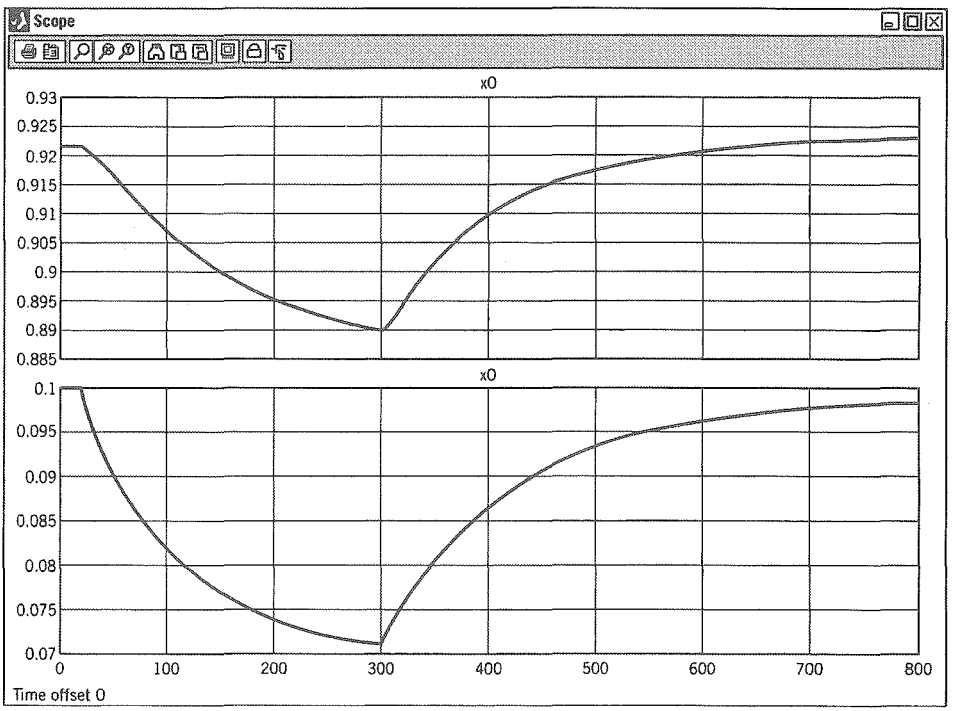


Figura 13-5.4 Respuestas de la composición del destilado y del fondo a un cambio escalón de 2000 lb/h en el flujo de vapor de agua seguido de un cambio escalón de 140 lbmol/h en el flujo de reflujo.

13-6 RESUMEN

La simulación es una herramienta muy importante para analizar, diseñar y sintonizar sistemas de control. Se han visto unos cuantos ejemplos sobre cómo simular procesos simples y sus sistemas de control utilizando un formato de programación orientado a bloques. Aunque la simulación no puede sustituir completamente el conocimiento que ha adquirido el estudiante mediante el análisis matemático de respuestas dinámicas, ésta realmente puede ahorrar tiempo y esfuerzo cuando se analizan sistemas específicos. Si el estudiante está planeando dedicarse al área de ingeniería de sistemas de control, debe esforzarse en adquirir experiencia con algún programa de simulación dinámica. Por experiencia propia, los autores pueden garantizarle que encontrará un futuro muy interesante y gratificante en este campo.

PROBLEMAS

13-1. Simular la respuesta del móvil del pájaro del problema 2-9 y graficar la respuesta. Suponer una condición inicial $y(0) = 0.1$ m, y ninguna fuerza externa, $f(t) = 0$.

13-2. Modelar y simular la respuesta de un péndulo con masa $M = 0.5$ kg, y una longitud –la distancia del fulcro al centro de la masa– $L = 0.8$ m. Demostrar que la respuesta dinámica para pequeñas oscilaciones y una resistencia al aire despreciable está representada por

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{Mg}{L}x(t)$$

donde $g = 9.8$ m/s^2 es la aceleración de la gravedad y $x(t)$ es la desviación horizontal del péndulo con respecto a su posición vertical. Suponer una condición inicial $x(0) = 0.1$ m. *Nota:* construir un péndulo con una cuerda y un peso, o simplemente utilizar un yo-yo, y medir el tiempo de oscilación con un reloj. Confirmar cómo la respuesta obtenida es igual al resultado experimental cuando la longitud de la cuerda es la misma.

13-3. Simular el tanque perforado del problema 2-23 y graficar la respuesta de la presión en el tanque.

13-4. Simular la respuesta de la temperatura del pavo del problema 2-24. Suponer que la temperatura del horno es constante e igual a 800°R, que el pavo pesa 12 lb, que está inicialmente a 535°R y que tiene un área de 3.5 ft^2. Utilizar un calor específico de 0.95 Btu/lb-°R y una emisividad de 0.6.

13-5. Simular el reactor químico de la sección 4-2.3 y graficar las respuestas de la temperatura del reactor a un cambio escalón de 0.25 ft^3/min en el flujo del proceso, y de 0.1 ft^3/min en el flujo del refrigerante. El reactor está inicialmente en las condiciones de diseño. Comparar sus respuestas con las respuestas de las funciones de transferencia lineales dadas en la sección 4-2.3 para esas respuestas, simulando las funciones de transferencia. *Nota:* las diferencias en las respuestas se deberán a la naturaleza no lineal

del reactor. Puede disminuirse el tamaño de los cambios escalón para observar cómo las respuestas del reactor no lineal se aproximan a las respuestas de las funciones de transferencia.

13-6. Simular el proceso de mezclado del problema 3-1 y graficar la respuesta de la concentración de salida a un paso escalón de 5 gpm en el flujo f_1. En las condiciones de estado estacionario iniciales, el flujo del tanque es 100 gpm y su concentración es de 0.025 mol/cm^3. El volumen del tanque es 200 galones, y las composiciones de alimentación son 0.010 y 0.05 mol/cm^3. Suponer que un controlador de nivel bien ajustado mantiene el volumen del tanque constante.

13-7. Agregar un lazo de control para la concentración del tanque del problema 13-6. Usar un transmisor con una constante de tiempo de 1.0 min y un rango de 0 a 0.1 mol/cm^3, y una válvula de control lineal con una constante de tiempo de 0.1 min, diseñada para un flujo máximo de 100 gpm. La válvula está instalada en la corriente de entrada de mayor concentración. Sintonizar un controlador PI y obtener la gráfica de la concentración de salida para un cambio escalón de 5 gpm en el flujo de la otra corriente de entrada.

13-8. Simular el reactor isotérmico del problema 3-2 y graficar la respuesta de la concentración de los reactivos en el punto 3 para un cambio escalón de 5 ft^3/min en el flujo de reactivos. Bajo las condiciones iniciales de estado estacionario, el flujo de reactivos es 50 ft^3/min, la concentración de alimentación es 2 lbmol/ft^3, y la concentración de salida es 0.5 lbmol/ft^3. El volumen del tanque es 150 ft^3 (constante), la longitud de la tubería entre la salida del tanque y el punto 3 es 400 ft, y el diámetro interior de la tubería es 5.500 in. *Nota:* se puede utilizar un bloque de retraso variable para simular el retraso por transporte en la tubería.

13-9. Simular el tanque de separación instantánea del problema 3-11 y graficar la respuesta de las composiciones de líquido y vapor para un cambio escalón de 0.10 fracción molar en la composición de entrada $z(t)$. Suponer que las tasas de flujo son constantes.

13-10. Simular el plato de destilación del problema 3-12 y obtener la respuesta del nivel $h(t)$ y el flujo de salida del plato $f_o(t)$ para los cambios escalón de 10 y 20 ft^3/min en el flujo de entrada $f_i(t)$. Determinar el efecto de la no linealidad comparando las respuestas para los dos cambios escalón.

13-11. Simular el tanque de mezclado del problema 3-18 utilizando los parámetros adicionales dados para este proceso en el problema 6-11. Usar un controlador PID sintonizado para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto y obtener las respuestas de las salidas del transmisor y el controlador a un cambio escalón de 0.1 m^3/min en el flujo de la solución concentrada.

13-12. Simular los tanques de la figura 4-1.1 para obtener las respuestas de los niveles en los tanques y del flujo de salida del segundo tanque, $f_2(t)$, a un cambio escalón en el flujo al primer tanque, $f_i(t)$ de 0.2 m^3/min. En el estado estacionario inicial, el flujo de entrada es 5 m^3/min, el flujo de la bomba $f_o(t)$ es 2 m^3/min, y el nivel en cada tanque es de 2.5 m. Cada tanque tiene un área transversal de 9 m^2. Comparar las ganancias y las constantes de tiempo medidas a partir de las respuestas de las simulaciones con los resultados dados en la sección 4-1.1.

13-13. Resolver el problema 13-12 para los tanques interactivos de la figura 4-2.1. En este caso, los niveles iniciales son 5 m en el primer tanque y 2.5 m en el segundo tanque.

13-14. Simular los tanques térmicos en serie de la figura 4-1.5 para obtener las respuestas de las temperaturas de los tanques para un cambio escalón unitario de 10 K en la temperatura de entrada al primer tanque, $T_1(t)$. Suponer que el flujo al primer tanque f_A es constante e igual a 1.0 m^3/min e ignorar el flujo f_B. Cada tanque tiene un volumen constante de 5.0 m^3 y el líquido es agua. Comparar las ganancias y las constantes de tiempo de las respuestas de simulación con las calculadas a partir de los resultados dados en la sección 4-1.2.

13-15. Resolver el problema 13-14 para los tanques térmicos interactivos de la figura 4-2.4. Obtener las respuestas para los siguientes valores del flujo de reciclado f_R: 0, 1, 5, 20 y 100 m^3/min. Explicar qué sucede con las respuestas de la temperatura a medida que el flujo de reciclado aumenta.

13-16. Simular los reactores del problema 4-9 para obtener las respuestas de las concentraciones de reactivos en cada tanque a un cambio escalón de 0.5 lbmol/ft^3 en la concentración de la alimentación. Usar los parámetros dados para esos reactores en el problema 6-15. Obtener las respuestas para los siguientes valores de flujo de reciclado f_R: 0, 10.0, 50.0 y 500 ft^3/min. Explicar qué sucede con las respuestas de las concentraciones a medida que aumenta el flujo de reciclado.

13-17. Simular el proceso de extracción del problema 4-6 para obtener la respuesta de la concentración de salida del refinado $c_1(t)$ ante un cambio escalón de 2 m^3/min en la tasa de flujo del solvente $f_2(t)$. En las condiciones iniciales de estado estacionario, el flujo de entrada f_1 es 5 m^3/min y la concentración de soluto es 0.4 kmol/m^3. Se desea recuperar 90% del soluto. El volumen total del extractor es 25 m^3, la pendiente de equilibrio es $m = 0.95$ y el coeficiente de transferencia de masa es $K_a = 209$ min^{-1}.

13-18. Simular el lazo de control de temperatura para el refrigerador del tanque de agitación del problema 4-7. Emplear los parámetros dados para este proceso en el problema 6-19. Simular el controlador como un PID sintonizado para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto y obtener las respuestas de las salidas del transmisor y el controlador a un cambio escalón en el flujo de proceso de 0.02 m^3/min, y para un cambio escalón en la referencia de 2°C.

13-19. Simular el tanque del problema 4-5 y graficar las respuestas de la temperatura de salida a cambios escalón de 5 gpm en el flujo de proceso y de 5% en la señal a la válvula de control de vapor.

13-20. Modificar la simulación de la válvula de control descrita en la sección 13-4.1 para calcular el flujo de un gas en la cual tanto la presión de entrada p_1 como la caída de presión a través de la válvula Δp_v pueden variar. Utilizando los datos para la válvula de vapor del ejemplo 5-2.2, obtener una gráfica del flujo contra la caída de presión a medida que la caída de presión asciende en forma de rampa de 5 a 25 psi. Mantener la presión de entrada y la posición de la válvula constantes.

13-21. Simular un lazo de control de temperatura simple para el reactor no isotérmico de la sección 4-2.3 que se simuló en el problema 13-5. Utilizar los datos para el lazo de control del problema 6-12, pero suponer que el transmisor de temperatura tiene una cons-

tante de tiempo de 1.0 min. y que la válvula de control tiene una constante de tiempo de 0.1 min. Sintonizar un controlador PID para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto y obtener las respuestas de las salidas del transmisor y el controlador para un cambio escalón de -0.2 ft^3/min en el flujo de reactivos y para un cambio escalón de 1°R en la referencia.

13-22. En el ejemplo 13-4.1 se simuló la válvula de vapor como una válvula de caída de presión constante. Sin embargo, a medida que la temperatura del vapor condensante T_s varía, también varía la presión en el serpentín de vapor, por lo que la caída de presión a través de la válvula es menor a medida que la temperatura del vapor aumenta. Para simular este efecto es necesario calcular la presión en el serpentín como una función de la temperatura del vapor utilizando la ecuación de Antoine para el agua. Entonces, el modelo de la válvula debe modificarse para calcular el flujo de vapor $w(t)$ usando las ecuaciones 5-2.3 y 5-2.4. Supóngase que el vapor se suministra a 30 psia y 250°F (saturado). Dimensionar la válvula para una sobrecapacidad de 100% y usar $C_f = 0.9$. Simular el calentador con la nueva válvula y obtener las respuestas de las temperaturas y la salida del controlador a un cambio escalón en el flujo de proceso de -5 ft^3/min seguido de un escalón de $+5$ ft^3/min. Comparar las respuestas a este problema con las de la figura 13-4.10.

13-23. Simular el lazo de control de composición del problema 6-17 y obtener las respuestas de las salidas del transmisor y del controlador ante un cambio escalón de 1 lb-gal en la concentración de entrada del reactivo. Usar un controlador PID sintonizado para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto.

13-24. Simular los lazos de control de nivel y de temperatura del problema 6-24 y obtener las respuestas de las salidas del transmisor y del controlador para un lazo de temperatura a un cambio escalón de 5 gpm en el flujo de salida de aceite. Utilizar un controlador de nivel ajustado y un controlador de temperatura PID sintonizado para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto.

13-25. Simular el secador del problema 9-1 y comparar las respuestas del lazo de control por retroalimentación sencillo del inciso (a) y el lazo de control en cascada del inciso (c). Obtener las respuestas de la salida del transmisor y de la señal a la válvula de control para un cambio escalón de 10°F en la temperatura ambiente, y para un cambio escalón de 0.3% en masa en la referencia.

13-26. Simular el lazo del problema 9-3 y comparar las respuestas del lazo de control por retroalimentación simple con el lazo de control en cascada propuesto en el problema. Obtener las respuestas de las salidas del transmisor y el controlador a cambios escalón unitarios en la perturbación y la referencia. Usar un controlador PI para el lazo de control maestro sintonizado para una respuesta de IAE mínima.

13-27. Simular el reactor con camisa del problema 9-4 para comparar las respuestas del lazo de control por retroalimentación simple y el lazo de control en cascada, usando la temperatura de la camisa como variable intermedia. Obtener las respuestas de las salidas del transmisor y del controlador ante un cambio escalón de 5°C en la referencia. Emplear un controlador PID para la temperatura del reactor sintonizado para respuesta de IAE mínima.

13-28. Demostrar que cuando se ignora la perturbación de la temperatura de entrada en el ejemplo 13-4.2, el controlador feedforward se convierte en un simple controlador de relación. Modificar la simulación dada en ese ejemplo y comparar las respuestas de la temperatura de salida con las indicadas en el ejemplo para cambios escalón en el flujo de proceso y la temperatura de entrada.

13-29. Agregar un controlador de relación entre la corriente concentrada y la diluida a la simulación del tanque de mezclado en el problema 13-11 y comparar las respuestas a un cambio escalón en la corriente concentrada. Simular un lazo de control de flujo en la corriente diluida, en vez de una válvula de control, como se muestra en la sección 13-4.1.

13-30. El reactor químico no isotérmico de la sección 4-2.3 se simuló en el problema 13-21 con un controlador por retroalimentación simple. Usando los datos de ese problema, simular y sintonizar un sistema de control en cascada para el reactor usando como variable intermedia la temperatura de salida de la camisa, $T_c(t)$. El transmisor de temperatura de la camisa tiene una constante de tiempo de 1.0 min y un rango de 560°R a 660°R. Usar un controlador PI esclavo sintonizado con las fórmulas de síntesis de la tabla 7-4.1 para un sobrepaso de 5% ante un cambio de la referencia, y un controlador PID maestro sintonizado para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto. Obtener las respuestas de lazo cerrado de la temperatura del reactor y la señal a la válvula para un cambio escalón de -0.2 ft^3/min en los reactivos, y para un cambio escalón de 1°R en la referencia.

13-31. El reactor químico no isotérmico de la sección 4-2.3 se simuló en el problema 13-21 con un controlador por retroalimentación simple. Usando los datos de ese problema, simular y sintonizar un sistema de control feedforward para el reactor con el flujo de proceso, $f(t)$, como la principal perturbación. El transmisor de flujo de proceso tiene una constante de tiempo de 0.1 min y un rango de 0 a 2.0 ft^3/min. En vez de una válvula de control en el refrigerante, simular un lazo de control de flujo (véase la sección 13-4.1). Obtener las respuestas de la temperatura del reactor y la señal a la válvula para un cambio escalón de -0.2 ft^3/min en el flujo de reactivos, con y sin compensación por retroalimentación.

13-32. Resuélvase el problema 13-31 usando un controlador de relación, pero en este caso el controlador por retroalimentación ajusta la relación.

13-33. Diseñar un esquema de control en cascada para los reactores en serie del problema 13-23 utilizando la concentración de salida del primer reactor como variable intermedia. Supóngase que el transmisor tiene un rango de 0 a 4 lb/gal de reactivo con una constante de tiempo de 1.0 min. El controlador esclavo es un controlador PI sintonizado con las fórmulas de síntesis de la tabla 7-4.1. Comparar las respuestas con las del lazo de control por retroalimentación simple obtenidas en el problema 13-23.

13-34. Simular el tanque de mezclado de sosa cáustica del problema 12-2 con controladores PI para el flujo y la composición del producto. Suponer que el tanque tiene una retención constante de 10 000 lb, que el transmisor de flujo tiene un retraso insignificante y un rango de 0 a 60 klb/h, y que el transmisor de composición tiene una constante de tiempo de 1.0 min y un rango de 0 a 50% en masa de NaOH. Los lazos de control de flujo tienen rangos de 0 a 60 klb/h y constantes de tiempo de 0.1 min. Sintonizar los controladores para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto y obtener las

respuestas para un cambio escalón de 10 klb/h en la referencia del flujo de producto. Resolver el problema para:

(a) el apareamiento correcto de las variables controladas y manipuladas.
(b) el otro apareamiento.
(c) utilizar un desacoplador como el del ejemplo 12-3.1.

13-35. *Simulación de un evaporador.*

El evaporador representado en la figura 12-3.4 se utiliza para concentrar una solución de azúcar evaporando el agua mediante vapor de agua. Modelar el evaporador para encontrar la respuesta del nivel y la composición del producto a cambios en la tasa de alimentación, composición de la alimentación, flujo del vapor de agua y flujo de producto. Suponer que el contenido del evaporador está perfectamente mezclado y que la economía es constante. La economía se define como la masa de agua evaporada por unidad de masa de vapor suministrado. Al suponer una economía constante, se evita tener que escribir balances de energía en el evaporador. El nivel es una función lineal de la masa de la solución en el evaporador. Bajo las condiciones de diseño, la alimentación es 50 000 lb/h con una composición de 12% en peso de azúcares. La composición deseada del producto es de 70% en peso de azúcares. La economía es 0.95 lb de agua evaporada por libra de vapor. El evaporador está inicialmente en estado estacionario con el nivel a 50% del transmisor. Cuando el nivel en el evaporador se encuentra en 0% del rango del transmisor, la masa de solución en el evaporador es 394 lb, y cuando el nivel está en 50% la masa es 747 lb. *Sistema de control:* simular un controlador de nivel proporcional con una ganancia de 20%CO/%TO (control de nivel ajustado), y un controlador PI de composición con los flujos de alimentación y de producto como las variables manipuladas. Las válvulas de control deben ser lineales con caídas de presión constantes y diseñadas para el doble del flujo de diseño. Supóngase que el transmisor de nivel tiene una dinámica despreciable, 0.1 min de constante de tiempo en los actuadores de válvulas de control. El transmisor de composición tiene una constante de tiempo de 0.6 min y un rango de 40% a 90% en peso de azúcares. Nótese que hay dos formas de conectar los controladores a las válvulas de control. En el problema 12-4 se desarrolló una estrategia general de apareamiento para un evaporador. Tal vez el lector quiera parear el controlador de las dos formas y ver cuál proporciona un mejor control. Sintonizar los controladores de composición para cada apareamiento y graficar las respuestas para un cambio escalón de 1000 lb/h en la referencia del flujo de alimentación.

13-36. *Control de una columna de destilación.*

Usar la simulación de la columna de destilación del ejemplo 13-5.1 para estudiar el control de la composición. Supóngase que los controladores PI están sintonizados para una IAE mínima. Los transmisores de composición tienen rangos de 0 a 1.0 fracción molar de benceno y constantes de tiempo de 1.0 min, y los lazos de control del reflujo y de flujo de vapor tienen constantes de tiempo de 0.1 min y rangos de 0 a 200% de sus respectivos flujos de diseño. Obtener las respuestas de las salidas del transmisor y del

controlador ante un cambio escalón de 200 lbmol/h en el flujo de alimentación. Resuélvase el problema para los siguientes casos:

(a) Controlar sólo la composición del destilado.
(b) Controlar sólo la composición del fondo.
(c) Controlar ambas composiciones.

13-37. *Mezclado de gasolina.*

Simular el sistema de mezcla de gasolina del ejemplo 12-2.5 con controladores PI para el flujo de producto, octano y presión de vapor Reid (RVP). Supóngase densidades constantes y un volumen de mezclador constante de 450 barriles, en vez de un mezclador en línea. El transmisor de flujo tiene una constante de tiempo de 0.1 min y un rango de 0 a 100 klb/día y los analizadores-transmisores tienen constantes de tiempo de 1.0 min y rangos de 60 a 110 de octano y 0 a 20 RVP. Los lazos de control de flujo en las corrientes de entrada tienen constantes de tiempo de 0.1 min y rangos de 0 a 150% de los valores de diseño. Obtener las respuestas de las salidas del transmisor y el controlador para un cambio escalón de 10 klb/día en la referencia del flujo de producto. Considérense los siguientes casos:

(a) Usar el apareamiento correcto.
(b) Usar un apareamiento alterno.
(c) Usar el desacoplador del ejemplo 12-3.3.

13-38. *El problema de las tres bombas y el tanque.*

Este problema fue desarrollado por ingenieros químicos de duPont a principios de la década de 1960, el apogeo de la simulación de procesos. El tanque que se muestra en la figura P13-1 es alimentado por tres bombas idénticas y realiza su descarga a través de un tubo muy largo. Debido a la inercia del líquido en la tubería, la respuesta del nivel en el tanque está subamortiguada. Esto causa un problema, ya que aunque el tanque es bastante alto en estado estacionario, el sobrepaso de nivel puede causar que el tanque se desborde cuando se encienden las tres bombas. La tarea aquí es simular el tanque y determinar si es posible crear una secuencia de tiempo para encender las bombas que evite que el tanque se desborde. Cada bomba puede simularse como una función escalón, establecido el tiempo escalón como el tiempo en el cual se enciende la bomba. El tiempo escalón para la primera bomba puede suponerse como 1 min, y el problema es encontrar los tiempos escalón para las otras dos bombas, de manera que el nivel del tanque no exceda la altura del tanque. Un balance de fuerzas en la salida de la tubería resulta en la siguiente ecuación:

$$\rho L \frac{df_o(t)}{dt} = \frac{\pi d_p^2}{4}\left(7.48 \frac{\text{gal}}{\text{ft}^3}\right)\rho g[h(t) - 2.22 \times 10^{-3} f_o(t) - 0.5184 \times 10^{-6} f_o^2(t)]$$

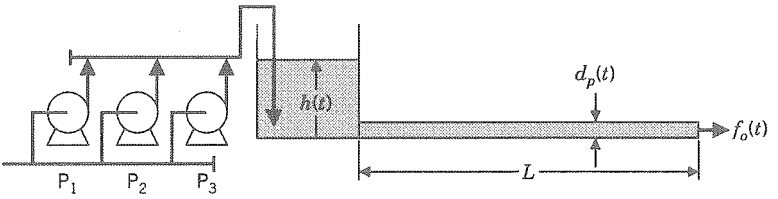


Figura P13-1 Diagrama del problema 13-38.

donde $f_o(t)$ es el flujo de salida del tanque en gal/min, $h(t)$ es el nivel del tanque en ft, L es la longitud de la tubería en ft, d_p es el diámetro interno del tubo en ft, ρ es la densidad del fluido en lb/gal, y g es la aceleración de la gravedad en ft/min^2. El término entre corchetes contiene una correlación para las pérdidas por fricción en el tubo en ft de presión. Cada bomba tiene una capacidad de 750 gal/min, el tanque es un tanque cilíndrico vertical de 9 ft de alto y 3.41 ft de diámetro interior. El tubo tiene una longitud de 3170 ft y 1.19 ft de diámetro interior. Llevar a cabo la simulación del sistema, obtener las respuestas del nivel en el tanque y el flujo de salida, y determinar la secuencia de tiempo del arranque de las bombas que previene que el nivel en el tanque exceda la altura del mismo.

13-39. *Interacción ecológica de poblaciones de parásitos y huéspedes.*

Un problema que ilustra la interacción entre las especies en un sistema ecológico, que también se originó en el apogeo de la simulación dinámica, considera sólo dos especies en el sistema, un huésped (por ejemplo, ratas) y un parásito (por ejemplo, pulgas). Supóngase que la tasa de crecimiento neto de la población de ratas (tasa de nacimientos menos tasa de fallecimientos) es 5 rata/rata-año, en ausencia de pulgas. Las pulgas infectan a las ratas e incrementan su tasa de mortalidad en 0.05 rata/pulga-rata-año. Las pulgas necesitan a las ratas para construir sus nidos, y su tasa de crecimiento es 0.2 pulga/rata-pulga-año, mientras que su tasa de mortalidad normal es de 20 pulga/pulga-año. Establecer las ecuaciones diferenciales y determinar los ciclos de población para ratas y pulgas en función del tiempo. Supóngase que inicialmente hay 100 ratas y 20 pulgas.

13-40. *Impacto ambiental del accidente de una barcaza que transporta cloro.*

En el verano de 1965, una barcaza cargada con cloro líquido se hundió en el río Mississippi, cerca del centro de Baton Rouge, Louisiana. Cuando se estaban preparando para sacarla del río, a uno de los autores le pidieron estimar la tasa de liberación de cloro en caso de que una de las boquillas de 4 pulgadas de la barcaza se rompiese completamente. La barcaza contenía originalmente 136 000 kg de cloro líquido a la temperatura del río, 25°C. El área de contacto entre el tanque y el río es 212 m^2 y, para considerar el peor caso posible, se supone que la boquilla se desprende cuando la barcaza está todavía sumergida en el agua, pero la boquilla está justo sobre la superficie del agua. El calor de radiación desde el Sol es despreciable. El coeficiente de transfe-

rencia de calor total entre el río que fluye y la barcaza se estima en 1000 kjoule/h-m^2-°C. Supóngase que el cloro líquido tiene un calor latente de vaporización constante de 288 kjoule/kg, un calor específico constante de 0.946 kjoule/kg-°C, y que la presión dentro de la barcaza es la presión de vapor del cloro a su temperatura en la barcaza. El flujo del gas cloro a través de la abertura de la boquilla está dado por la siguiente ecuación:

Si está en flujo subcrítico:
$$w_c = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{\frac{2M_w}{RT}[P(P-P_o)]}$$

Si está en flujo crítico:
$$w_c = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{\frac{M_w}{RT}}P$$

donde w_c es el flujo de gas cloro a través de la apertura, D es el diámetro del agujero, M_w es el peso molecular del cloro, R es la constante del gas ideal, T es la temperatura absoluta, P es la presión en el tanque, y P_o es la presión atmosférica. La presión P en el tanque es la presión de vapor del cloro y puede calcularse con la temperatura T y la ecuación de Antoine. Llevar a cabo la simulación del tanque escribiendo balances de materia y entalpía en la barcaza y determinar los flujos inicial y de estado estacionario de cloro que salen de la barcaza. ¿Cuánto tiempo tomará para que se vacíe la barcaza? *Nota:* una forma simple de simular el flujo crítico o subcrítico es calcular el flujo utilizando ambas fórmulas y seleccionar el menor de los dos usando un *bloque mín-máx* o la función *mín.*

13-41. *Control de un reactor semibatch.*

Un reactor semibatch debe producir butilpropionato a partir de 2-butanol y anhídrido propiónico, usando ácido sulfúrico como catalizador. La reacción está dada por

$$(C_2H_5CO)_2O + 2C_4H_9OH \rightarrow 2C_4H_9OOC_3H_5 + H_2O$$

Feliu *et al.* (2003) reportaron el siguiente modelo cinético para esta reacción:

$$r_B = (k_1C_A + k_2C_{Cat1} + k_3C_{Cat2})C_B$$

donde r_B es la tasa de reacción del anhídrido, kmol/min-m^3, C_A, C_B, C_{Cat1} y C_{Cat2} son las concentraciones de butanol, anhídrido y las dos formas de catalizador en kmol/m^3. Se propone una reacción para la conversión de una forma de catalizador en otro, como sigue:

$$Cat_1 \rightarrow Cat_2$$

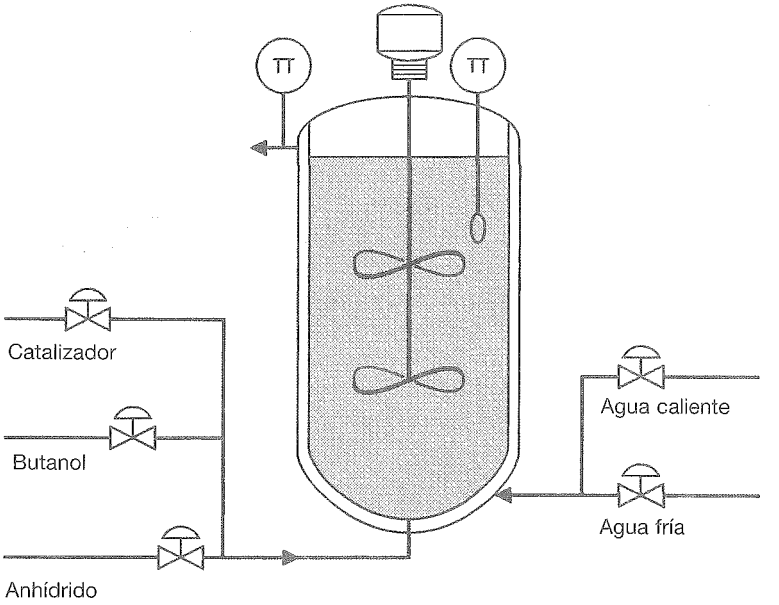


Figura P13-2 Reactor semibatch para el problema 13.41.

con cinética:

$$r_{Cat1} = k_4 10^{-H_r} C_{Cat2} C_B$$

$$H_r = -(p_1 C_{Cat1} + p_2 C_{Cat2}) \left(p_3 + \frac{p_4}{T} \right)$$

donde T es la temperatura del reactor en K. El calor de reacción es –80 000 kJ/kmol y los coeficientes de tasa de reacción están dados por la expresión estándar de Arrhenius:

$$k_i = A_i e^{-E_i/RT}$$

Los parámetros del modelo cinético son:

Subíndice i	P_i	A_i	E_i, kJ/mol
1	0.2002	1.93×10^{11}	80 480
2	0.3205	1.01×10^{14}	79 160
3	–21.38	1.42×10^{14}	69 970
4	1271	5.05×10^{11}	76 620

La figura P13-2 muestra un esquema del reactor con camisa de enfriamiento. Se alimenta agua caliente y fría, a 90°C y 15°C, respectivamente, al reactor a la camisa para poder calentar o enfriar el reactor según sea necesario. Supóngase que el reactor se encuentra lleno inicialmente con 600 kg de 2-butanol esencialmente puro a 20°C y que los flujos de agua caliente y fría se ajustan para producir una temperatura dentro de la camisa de 30°C, la cual es también la temperatura inicial de la camisa. El catalizador, que consta de 70% en peso de 2-butanol, 20% en peso de ácido sulfúrico, y el resto de agua, a 20°C, se alimenta a una tasa de 1200 kg/h por un periodo de 5 minutos. Luego, el anhídrido, que se supone puro y también a 20°C, se añade a una tasa que no debe exceder 1200 kg/h. Una restricción operacional importante es que la temperatura del reactor no debe exceder 60°C. Supóngase que el coeficiente de transferencia de calor entre el reactor y la camisa es constante e igual a 20 kJ/min-m^2-°C y que el área de transferencia de calor es 15 m^2. El volumen total del reactor es 3 m^3 y la camisa contiene 415 kg de agua. Obtener los pesos moleculares, las gravedades específicas y los calores específicos del *Manual del ingeniero químico*, de Perry.

Hacer la simulación del reactor y diseñar un sistema de control y el procedimiento de operación que minimice la duración del ciclo del lote. Referencia: Feliu, J. A., I. Grau, M. A. Alós, y J. J.Macías-Hernández, "Match your Process Constraints Using Dynamic Simulation," Chemical Engineering Progress, New York: AIChE: Dic. 2003, 42-48.

Apéndice A

Símbolos y nomenclatura empleados para la instrumentación

En este apéndice se presentan los símbolos y la nomenclatura que se utilizan en los diagramas de instrumentación de este libro. La mayoría de las compañías tienen sus propios métodos y, aun cuando son muy semejantes entre sí, no son exactamente iguales. Los símbolos y la nomenclatura que se utilizan aquí se apegan a la norma publicada por la Instrumentation, Systems, and Automation Society (ISA). Este apéndice presenta únicamente la información necesaria para este libro, pero si se desea profundizar más, se remite al lector a la norma de la ISA.

En general, la identificación de los instrumentos se conoce también como número de placa, y es de la forma:

	Número de placa característico
LRC 101	Identificación de instrumento o número de placa
L 101	Identificación de lazo
101	Número de lazo
LRC	Identificación funcional
L	Primera letra
RC	Letras siguientes

Número de placa expandido	
20-TAH-6A	Número de placa
20	Prefijo opcional
A	Sufijo opcional

Nota: los guiones separadores son opcionales.

En la tabla A-1 se indica el significado de algunas de las letras.

Los símbolos que se utilizan en este libro para designar la función de los bloques de cómputo, o software, se presentan en la tabla A-2. La tabla A-3 presenta algunos de los símbolos de instrumentos y en la tabla A-4 se presentan algunos símbolos (señales) de líneas de instrumentación.

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

Tabla A-1 Significados de las letras de identificación. (Cortesía de Instrumentation, Systems, and Automation Society.)

Primera letra			Letras siguientes		
	Variable medible o inicial	Modificador	Lectura o función pasiva	Función de salida	Modificador
A	Análisis		Alarma		
B	Quemador, combustión		Elección del usuario	Elección del usuario	Elección del usuario
C	Elección del usuario			Control	
D	Elección del usuario	Diferencial			
E	Voltaje		Sensor (elemento primario)		
F	Tasa de flujo	Relación (fracción)			
G	Elección del usuario		Vidrio, dispositivo visor		
H	Mano				Alto
I	Corriente (eléctrica)		Indicador		
J	Potencia	Rastreo			
K	Tiempo, tiempo programado	Tasa de cambio de tiempo		Estación de control	
L	Nivel		Luz		
M	Elección del usuario	Momentáneo			Medio, intermedio
N	Elección del usuario		Elección del usuario	Elección del usuario	Elección del usuario
O	Elección del usuario		Orificio, restricción		
P	Presión, vacío		Punto de conexión (prueba)		
Q	Cantidad	Integrado, totalizado			
R	Radiación		Registro		
S	Velocidad, frecuencia	Seguridad		Interruptor	
T	Temperatura			Transmisión	
U	Multivariable		Multifunción	Multifunción	Multifunción
V	Vibración, análisis mecánico			Válvula, amortiguador, aliviador	
W	Peso, fuerza		Depósito		
X	Sin clasificar	Eje *X*	Sin clasificar	Sin clasificar	Sin clasificar
Y	Evento, estado, presencia	Eje *Y*		Relevador, convertidor computacional	
Z	Posición dimensión	Eje *Z*		Manejador, actuador, elemento final de control no clasificado	

Tabla A-1 Significados de las letras de identificación (*continuación*)

Primeras letras	Variable inicial o medida	Controladores				Dispositivos de lectura		Interruptores y dispositivos de alarma			Transmisores			Solenoides, relevadores, dispositivos de cálculo	Elemento primario	Punto de prueba	Depósito o sonda	Dispositivo visor, vidrio	Dispositivo de seguridad	Elemento final
		De registro	De indicación	Ciegos	Válvulas de control autoaccionadas	De registro	De indicación	Alto	Bajo	Comb.	De registro	De indicación	Ciegos							
A	Análisis	ARC	AIC	AC		AR	AI	ASH	ASL	ASHL	ART	AIT	AT	AY	AE	AP	AW			AV
B	Quemador, combustión	BRC	BIC	BC		BR	BI	BSH	BSL	BSHL	BRT	BIT	BT	BY	BE		BW	BG		BZ
C	Elección del usuario																			
D	Elección del usuario																			
E	Voltaje	ERC	EIC	EC		ER	EI	ESH	ESL	ESHL	ERT	EIT	ET	EY	EE					EZ
F	Tasa de flujo	FRC	FIC	FC	FCV, FICV	FR	FI	FSH	FSL	FSHL	FRT	FIT	FT	FY	FE	FP		FG		FV
FQ	Cantidad de flujo	FQRC	FQIC			FQR	FQI	FQSH	FQSL			FQIT	FQT	FQY	FQE					FQV
FF	Relación de flujo	FFRC	FFIC	FFC		FFR	FFI	FFSH	FFSL						FE					FFV
G	Elección del usuario																			
H	Mano		HIC	HC						HS										HV
I	Corriente	IRC	IIC			IR	II	ISH	ISL	ISHL	IRT	IIT	IT	IY	IE					IZ
J	Potencia	JRC	JIC			JR	JI	JSH	JSL	JSHL	JRT	JIT	JT	JY	JE					JV
K	Tiempo	KRC	KIC	KC	KCV	KR	KI	KSH	KSL	KSHL	KRT	KIT	KT	KY	KE					KV
L	Nivel	LRC	LIC	LC	LCV	LR	LI	LSH	LSL	LSHL	LRT	LIT	LT	LY	LE		LW	LG		LV
M	Elección del usuario																			
N	Elección del usuario																			
O	Elección del usuario																			
P	Presión, vacío	PRC	PIC	PC	PCV	PR	PI	PSH	PSL	PSHL	PRT	PIT	PT	PY	PE	PP			PSV, PSE	PV
PD	Presión diferencial	PDRC	PDIC	PDC	PDCV	PDR	PDI	PDSH	PDSL		PDRT	PDIT	PDT	PDY	PE	PP				PDV
Q	Cantidad	QRC	QIC			QR	QI	QSH	QSL	QSHL	QRT	QIT	QT	QY	QE					QZ
R	Radiación	RRC	RIC	RC		RR	RI	RSH	RSL	RSHL	RRT	RIT	RT	RY	RE		RW			RZ

(continúa en la página siguiente)

Tabla A-1 Significados de las letras de identificación (*continuación*)

		Controladores				Dispositivos de lectura		Interruptores y dispositivos de alarma			Transmisores									
Primeras letras	Variable inicial o medida	De registro	De indicación	Ciegos	Válvulas de control autoaccionadas	De registro	De indicación	Alto	Bajo	Comb.	De registro	De indicación	Ciegos	Solenoides, relevadores, dispositivos de cálculo	Elemento primario	Punto de prueba	Depósito o sonda	Dispositivo visor, vidrio	Dispositivo de seguridad	Elemento final
S	Velocidad, frecuencia	SCR	SIC	SC	SCV	SR	SI	SSH	SSL	SSHL	SRT	SIT	ST	SY	SE					SV
T	Temperatura	TRC	TIC	TC	TCV	TR	TI	TSH	TSL	TSHL	TRT	TIT	TT	TY	TE	TP	TW		TSE	TV
TD	Diferencial de temperatura	TDRC	TDIC	TDC	TDCV	TDR	TDI	TDSH	TDSL		TDRT	TDIT	TDT	TDY	TE	TP	TW			TDV
U	Multivariable					UR	UI							UY						UV
V	Vibración, análisis de maquinaria					VR	VI	VSH	VSL	VSHL	VRT	VIT	VT	VY	VE					VZ
W	Peso, fuerza	WRC	WIC	WC	WCV	WR	WI	WSH	WSL	WSHL	WRT	WIT	WT	WY	WE					WZ
WD	Peso, fuerza; diferencial	WDRC	WDIC	WDC	WDCV	WDR	WDI	WDSH	WDSL		WDRT	WDIT	WDT	WDY	WE					WDZ
X	Sin clasificación																			
Y	Evento, estado, presencia		YIC	YC		YR	YI	YSH	YSL				YT	YY	YE					YZ
Z	Posición, dimensión	ZRC	ZIC	ZC	ZCV	ZR	ZI	ZSH	ZSL	ZSHL	ZRT	ZIT	ZT	ZY	ZE					ZV
ZD	Calibre, desviación	ZDRC	ZDIC	ZDC	ZDCV	ZDR	ZDI	ZDSH	ZDSL		ZDRT	ZDIT	ZDT	ZDY	ZDE					ZDV

Tabla A-2 Funciones y símbolos de los bloques de cálculo o de software

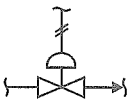
Función	Símbolo	Función	Símbolo
Suma	Σ	Integral	$\int$
Multiplicación	× o *	División	÷
Raíz cuadrada	$\sqrt{\ }$	Función	f(x)
Selector de alta	> o HS	Selector de baja	< o LS
Limitador de alta	> o HL	Limitador de baja	< o LL
Bias	B_0	Adelanto-atraso	L/L

Tabla A-3 Símbolos generales de los instrumentos

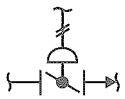
Algoritmo basado en computadora

Instrumento analógico, accesible montado en tablero

Instrumento analógico, montado detrás del tablero

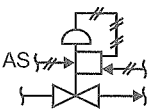


Válvula de globo neumática



Válvula mariposa, amortiguador o aliviador operados neumáticamente

Válvula de control manual



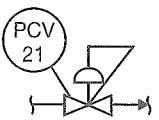
Válvula de control con posicionador

Motor

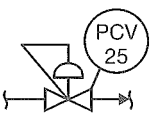
Solenoide

Cilindro de acción simple

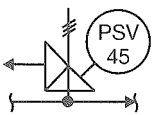
Cilindro de doble acción



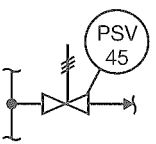
Regulador reductor de presión, independiente



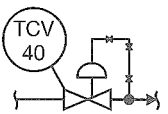
Regulador reductor de presión anterior independiente



Alivio de presión o válvula de seguridad, patrón de ángulo



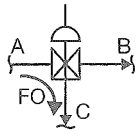
Alivio de presión o válvula de seguridad, patrón de línea directa



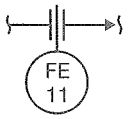
Regulador de temperatura del tipo sistema lleno

(continúa en la página siguiente)

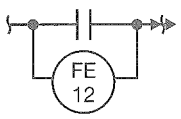
Tabla A-3 (*Continuación*)



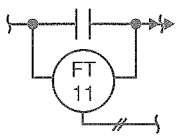
Válvula de tres vías FO en la ruta A-C



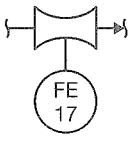
Placa de orificio con espitas en el borde o las esquinas



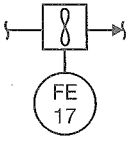
Placa de orificio con espitas de vena contracta, radiales o de tubo



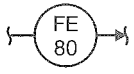
Placa de orificio con espitas de vena contracta, radiales o de tubo conectada a un transmisor de presión diferencial



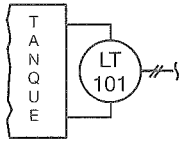
Tubo venturi o boquilla de flujo



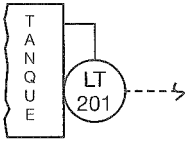
Medidor de flujo de turbina



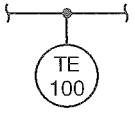
Medidor de flujo magnético



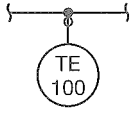
Transmisor de nivel, con elemento flotador externo o elemento desplazador del tipo externo



Transmisor de nivel, elemento de tipo presión diferencial

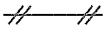
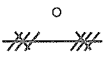


Elemento de temperatura sin depósito



Elemento de temperatura con depósito

Tabla A-4 Símbolos de la línea (señales) de instrumentación

Señal neumática		Señal eléctrica		Señal genérica	
Software o conexión de datos		Conexión de datos mecánicos		Señal binaria eléctrica	

En la figura A-1 se ilustra el ejemplo de un sistema de control, en particular de un lazo de control de flujo. La figura A-1*a* muestra el elemento de flujo, FE-10, que es una placa perforada con espitas en el borde. El elemento se conecta a un transmisor electrónico de flujo, FT-10; la

salida del transmisor se envía a un bloque de cálculo de raíz cuadrada, FY-10A, y de ahí la señal pasa a un controlador-indicador de flujo, FIC-10. La salida desde el controlador se envía hacia un transductor I/P, FY-10B, para convertir la señal eléctrica en neumática; entonces, la señal del transductor se envía a la válvula de flujo, FV-10. Comúnmente, los símbolos para los elementos y válvulas de flujo se omiten en favor de la simplicidad; el diagrama resultante se muestra en la figura A-1*b*. Las señales dibujadas en la figura A-1*b* indican que el sistema de control usado es eléctrico. La figura A-1*c* muestra el sistema de control cuando se usa un sistema de control por computadora; nótese la diferencia en las señales. La figura A-1*d* muestra los símbolos utilizados en este libro. Dicha figura muestra el concepto de control sin preocuparse por el hardware específico.

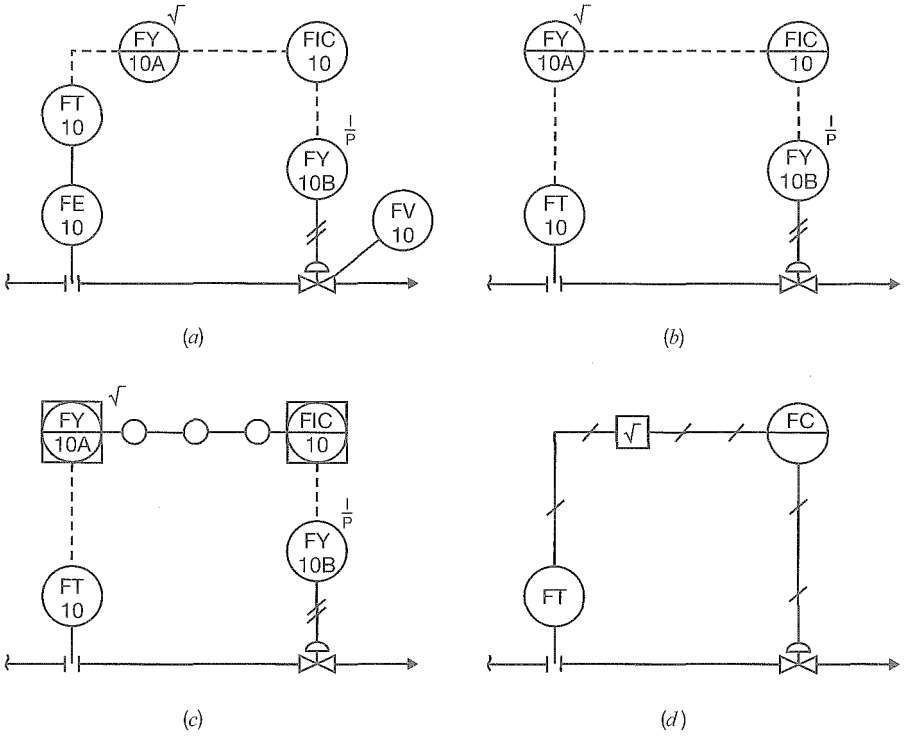


Figura A-1 Sistema de control de flujo.

REFERENCIAS

1. "Instrumentation Symbols and Identification," Instrument Society of America, Standard ISA-S5.1-1984. Research Triangle Park, NC: Instrumentation, Systems, and Automation Society.

Apéndice B

Diseño: estudio de casos

En este apéndice se presenta una serie de casos de diseño para su estudio con los cuales se da al lector la oportunidad de diseñar sistemas de control de procesos a partir de cero. Cabe aclarar que el primer paso en el diseño de sistemas de control para plantas de proceso es decidir cuáles de las variables del proceso se deben controlar; tal decisión la deben tomar, conjuntamente, el ingeniero de procesos que diseña el proceso y el ingeniero de control o de instrumentación que diseña el sistema de control y especifica la instrumentación y el personal operativo que ejecutará el proceso. Esto implica un verdadero desafío y requiere un trabajo de equipo. El segundo paso es el diseño del sistema de control propiamente dicho; en los casos para estudio que siguen ya se realizó el primer paso, y el segundo es el tema de los presentes casos de estudio. El lector debe tener en cuenta que puede existir más de una forma para diseñar un sistema de control.

En la sección 12-6 se considera el tema del control a nivel de planta y se presentan algunos lineamientos para facilitar el diseño de sistemas de control. En este apéndice se describe otro ejemplo y luego se presentan otros casos de estudio.

Ejemplo B-1 El hipoclorito de sodio (NaOCl) se forma a partir de la siguiente reacción:

$$2NaOH + Cl_2 \longrightarrow NaOCl + H_2O + NaCl$$

En el diagrama de flujo de la figura B-1 se ilustra el proceso para su manufactura.

Constantemente se prepara sosa cáustica diluida (NaOH), a una concentración fija (30% solución), mediante dilución en agua de una solución de sosa cáustica al 50%. La solución de sosa diluida se almacena en un tanque intermedio, y desde éste se bombea hasta el reactor de hipoclorito. Para la reacción se inyecta cloro en forma de gas en el reactor.

A. ¿Cómo se puede fijar la tasa de producción de esta unidad?

B. Debe diseñarse el sistema de control para que cumpla lo siguiente:

1. Controlar el nivel en el tanque de dilución.
2. Controlar el nivel en el tanque de depósito del blanqueador.
3. Controlar el proceso de dilución de la solución de sosa cáustica al 50%; la concentración de esta corriente se puede medir mediante una celda de conductividad. Cuando disminuye la dilución en esta solución, aumenta la salida de la celda.

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

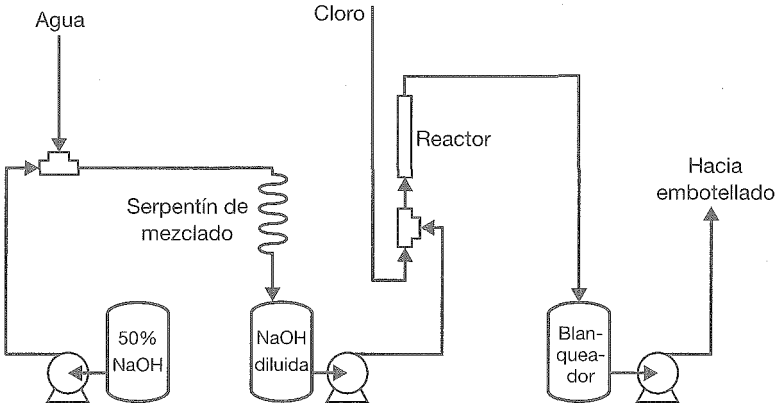


Figura B-1 Proceso de hipoclorito de sodio.

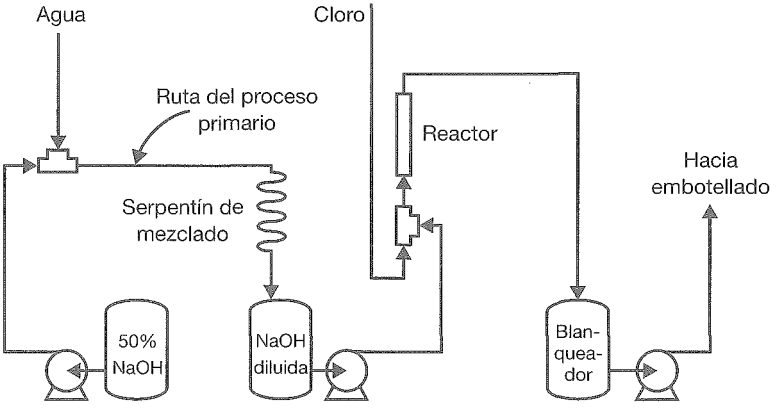


Figura B-2 Ruta del proceso primario.

4. Controlar la relación de exceso de $NaOH/Cl_2$ disponible en la corriente que sale del reactor de hipoclorito. Esta relación se mide mediante una técnica POR (potencial de oxidación-reducción); a medida que esta relación se incrementa, también se incrementa la señal POR.

Siguiendo las instrucciones presentadas en la sección 12-6, se debe decidir primero dónde localizar la variable manipulada de rendimiento o tasa de producción. Debido a que hay tres tanques en el proceso que proveen suficiente capacidad de suministro, existen muchas localizaciones posibles para esta variable manipulada. El primer lineamiento establece que la TPM debe localizarse en la ruta del proceso primario. La figura B-2 muestra esta ruta. La figura B-3 muestra tres localizaciones posibles para controlar la tasa de producción. Las instrucciones indican que la localización preferida se encuentra sobre la corriente de alimentación a la unidad más sensible y, siempre que sea posible, interna al proceso. Si el ingeniero considera que el reactor es la unidad más sensible, entonces la ubicación B es la indicada; de hecho, esta

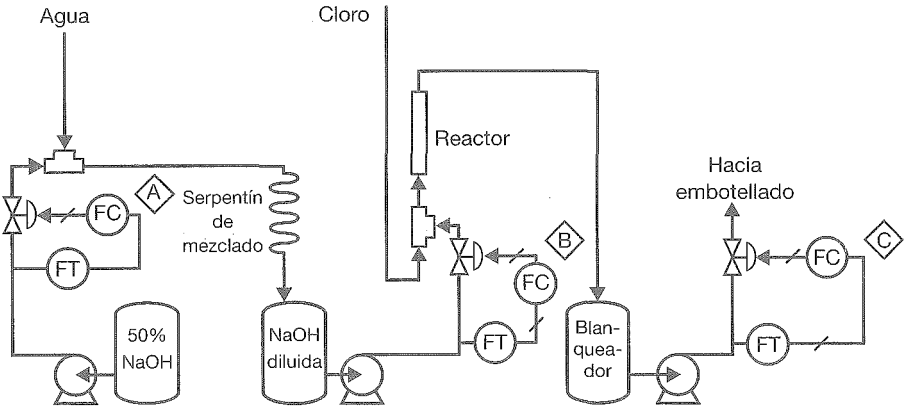


Figura B-3 Localizaciones posibles para el control de la tasa de producción.

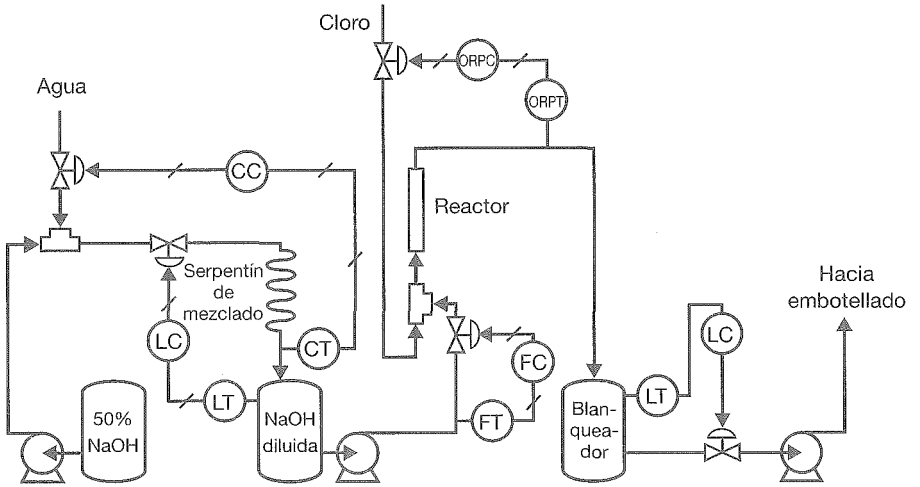


Figura B-4 Primeros esquemas propuestos.

ubicación también es interna en el proceso. Sin embargo, si el proceso de embotellado (no mostrado) es la unidad más sensible, entonces la ubicación C es el sitio apropiado para la tasa de producción. La localización A es otra ubicación posible, y tal vez existan razones para instalar la tasa de producción ahí; más adelante se considera una de estas razones.

Suponiendo que la localización B es la selección del ingeniero, la figura B-4 muestra las localizaciones de los controladores del inventario (niveles en este proceso) y los dos controladores de calidad de producto (la dilución de NaOH al 50% y la NaOH/Cl_2 disponible en la salida del reactor). De acuerdo con la primera ley de plomería de Luyben (Luyben, 2002), el control de nivel del tanque de almacenamiento de cloro está incorrecto. De hecho, esta localización de la válvula es incorrecta; la válvula no debe estar localizada en la entrada de la

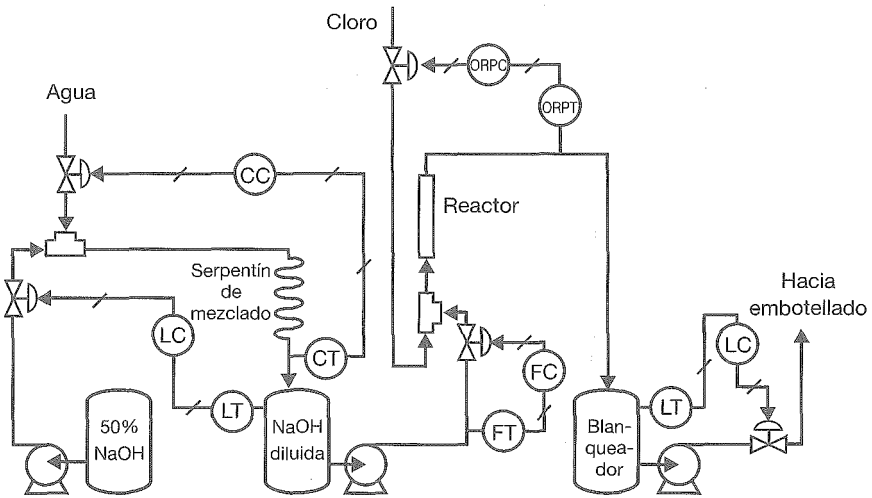


Figura B-5 Control de producción manipulando la alimentación hacia el reactor.

bomba. Esto se puede solucionar fácilmente instalando la válvula corriente abajo de la bomba, como se muestra en la figura B-5. Además, de acuerdo con la segunda ley de plomería de Luyben (Luyben, 2002), la localización del control de nivel en la dilución de NaOH en el tanque, mostrada en la figura B-4, es incorrecta; en este caso, de nuevo, hay una válvula localizada incorrectamente. Nótese que hay dos válvulas de control en la ruta de agua al tanque. Una válvula es manipulada por el controlador de nivel y la otra es manipulada con el controlador de conductividad. Existe la posibilidad en este caso de que un controlador quiera cerrar su válvula, mientras el otro controlador quiera abrir la suya. Ciertamente, ésta es una situación indeseable y puede solucionarse muy fácilmente instalando la válvula de nivel corriente arriba de la T de mezclado, como se muestra en la figura B-5. Nótese que el control del inventario (el nivel en el tanque de dilución de NaOH) que se encuentra corriente arriba del control de producción se controla manipulando el flujo de entrada, y el control del inventario (el nivel del tanque de blanqueador) corriente abajo del control de producción se regula manipulando el flujo de salida. Este control del inventario tiene una base lógica.

La figura B-6 muestra el esquema de control si el ingeniero decidiera que el proceso de embotellado es el cuello de botella —sin malinterpretar— debido a que no puede sortear muchas perturbaciones. En este caso, todos los controles de inventario manipularán los flujos de entrada.

La atención se enfocará ahora en el control del nivel en el tanque de dilución de NaOH y en el control de la dilución de NaOH concentrada; estos controles son los mismos en las figuras B-5 y B-6. Nótese que cualquier perturbación o cambio en la referencia que afecte cualquiera de estas variables controladas en algún momento afectará la otra variable. Por ejemplo, supóngase que se decide disminuir la dilución de NaOH concentrada, y, en consecuencia, se incrementa la referencia del controlador de conductividad. En el momento en que el controlador se da cuenta de que la NaOH se encuentra más diluida de lo requerido, éste cierra un poco la válvula de agua. A medida que el flujo de agua se reduce, el nivel en el tanque de dilución disminuye y el controlador de nivel abre la válvula de NaOH concentrada. Esta acción resulta

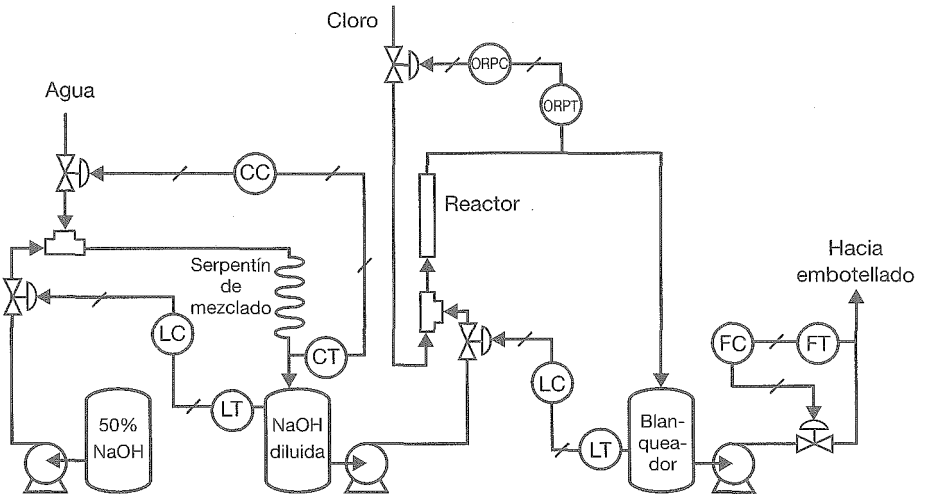


Figura B-6 Control de producción manipulando la alimentación hacia el proceso de embotellado.

un aumento de la concentración de NaOH diluida y el controlador de conductividad hace cambios a su vez en la válvula de agua. Obviamente, éste es un ejemplo clásico de un sistema de control multivariable totalmente acoplado; en el capítulo 12 se analiza este importante tema.

Si el ingeniero decide que esta interacción afecta el desempeño del controlador de conductividad y que este control es el más importante para el desempeño del proceso, entonces controlar la tasa de producción desde la ubicación A en la figura B-3 es lo apropiado. La figura

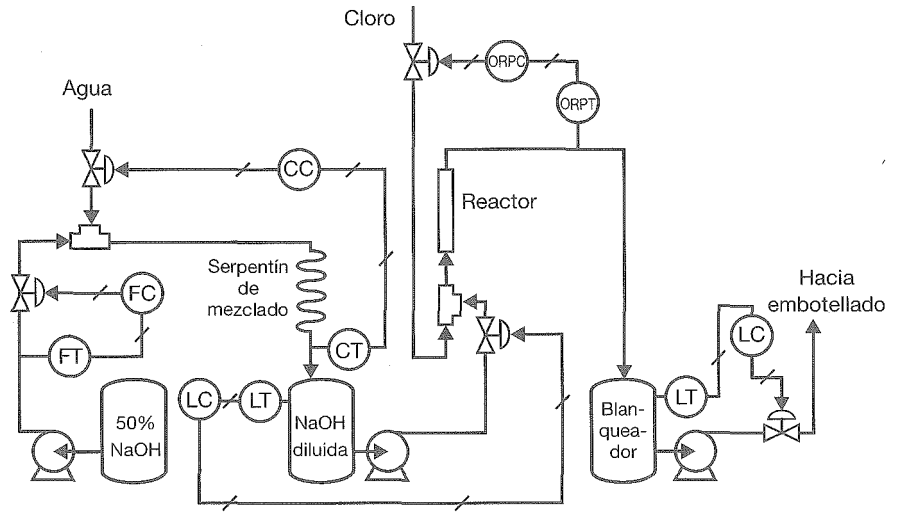


Figura B-7 Control de producción manipulando el flujo de NaOH concentrada.

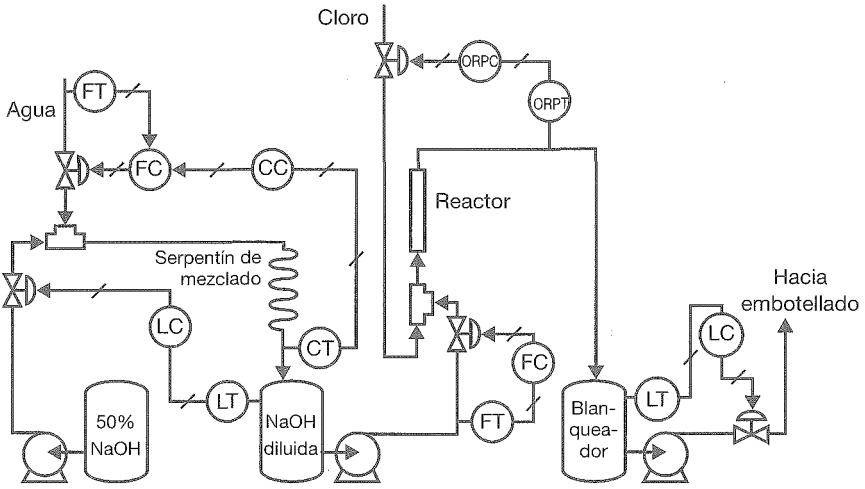


Figura B-8 Control en cascada sobre la corriente de dilución de agua.

B-7 muestra el esquema de control. En este caso, el conjunto de control del inventario manipula los flujos de salida.

Hasta ahora se han diseñado estrictamente lazos de retroalimentación para cada variable controlada. Supóngase que la experiencia previa indica que la presión de suministro de agua puede variar y que esta perturbación afecta el desempeño de la estrategia de control de dilución. El control en cascada mostrado en la figura B-8 constituye una manera simple y eficiente de

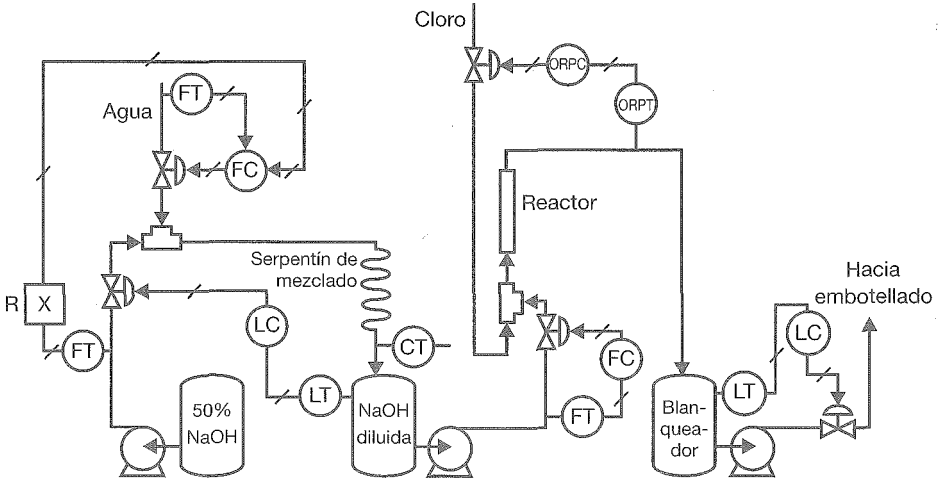


Figura B-9 Control de relación para mejorar el desempeño del control de dilución.

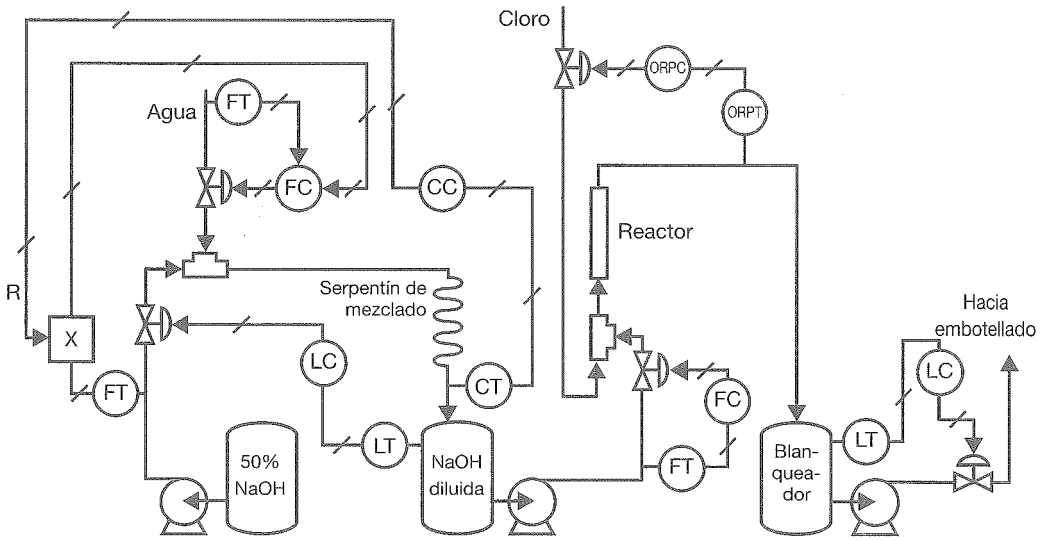


Figura B-10 Control feedforward para mejorar el desempeño del control de dilución.

compensar esta perturbación. Obviamente, pueden instalarse lazos en cascada similares en los otros lazos donde se necesiten.

Supóngase también que la experiencia previa indica que el control de relación entre la NaOH concentrada y el agua para dilución puede ser favorable; la figura B-9 muestra este control. Este control de relación funciona bien y mantendrá el flujo de agua en la proporción correcta con el flujo de NaOH concentrada. Pero por ahora el control de dilución está fuera del cuadro y tal vez no se encuentre en el valor deseado. Los cambios en la concentración de NaOH entrante afectan la dilución pero no hay control que compense estos cambios. Si aún se requiere el control de la dilución, se debe incorporar de alguna manera el controlador de conductividad en la estrategia; esto se muestra en la figura B-10. En esta estrategia, el controlador de conductividad decide la relación de agua en la solución de NaOH, R, requerida para mantener la dilución en la referencia. El lector tal vez reconozca este "control de relación con compensación por retroalimentación" como un controlador feedforward y, de hecho, esto es lo que es. Este control feedforward es un compensador de estado estacionario simple (relacionador), sin compensación dinámica. Puede implementarse una estrategia similar cerca del reactor si se requiere un mejor control.

Por simplicidad, la figura B-10 muestra los controladores de nivel y el controlador POR manipulando directamente las válvulas. Como se señaló en el capítulo 9, con frecuencia un lazo de flujo manipula la válvula que recibe el valor de la referencia de estos otros controladores en un arreglo en cascada. Esta estrategia compensa las perturbaciones, usualmente caídas de presión a través de la válvula, que afectan el flujo. Los transmisores de flujo también son útiles para balances de materia y algunos otros procesos.

CASO 1. PROCESO DE SÍNTESIS DE METANOL

Una empresa petroquímica produce un residuo de hidrocarburo como subproducto. El residuo se utilizaba originalmente como combustible dentro de la misma planta; sin embargo, con el *incremento de las regulaciones ambientales*, la empresa ha incorporado un proceso adicional capaz de obtener metanol crudo a través de la oxidación parcial de este residuo (referencia bibliográfica 2). El metanol crudo se refina todavía más por medio de una destilación adicional y se almacena para su uso posterior, y los remanentes indeseables del proceso se envían a una unidad de tratamiento de desechos acuosos: la figura B-11 ilustra el proceso.

Los residuos se oxidan en un reactor de oxidación parcial de donde se obtiene hidrógeno y monóxido de carbono en presencia de oxígeno a alta presión, el cual es suministrado a través de una planta de oxígeno. Se agrega vapor a alta presión al reactor para mantener una temperatura de 1125°C. A esta temperatura parte del CO reacciona con el vapor para formar CO_2 y H_2, como se muestra en la reacción al inicio de la página siguiente.

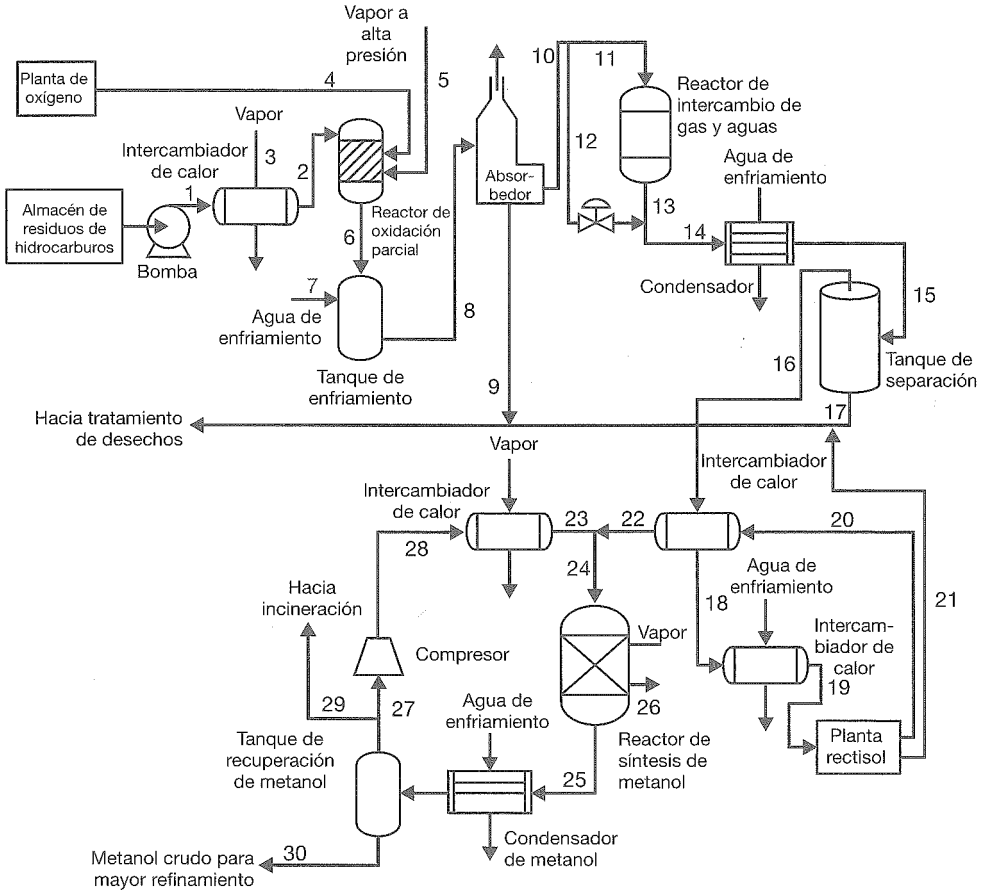


Figura B-11 Proceso de producción de metanol.

$$CO + H_2O \leftrightarrow H_2 + CO_2$$

Los gases que salen del reactor se enfrían a 301°C por inyección directa de agua de enfriamiento. El hollín y las cenizas presentes en el gas se remueven por medio de un lavador venturi y se envían a la planta de tratamiento de aguas de desecho. El gas que sale de la torre de lavado se divide en dos corrientes, una de ellas fluye a través de un reactor catalizador de lecho empaquetado de Co/Mo donde 96% de Co se convierte con agua en CO_2 y H_2 por medio de la reacción arriba mencionada, y la otra corriente evita el reactor a través de una derivación. Los efluentes del reactor se combinan con la corriente de derivación resultante para dar como resultado una corriente única con una relación H_2:CO de 2.5:1; un analizador se encuentra disponible para medir esta relación. El agua en la corriente resultante es removida del gas por condensación dentro de un condensador y luego se saca de la corriente haciéndola pasar por un tanque de separación o ciclón. El gas que sale del ciclón fluye a través de dos intercambiadores de calor que enfrían el gas a 50°C antes de entrar a un proceso de rectisol. En el proceso de rectisol se remueven de la corriente de gas los subproductos COS, H_2S y CO_2, que se envían a la unidad de tratamiento de desechos acuosos, con el fin de evitar el envenenamiento del catalizador en el reactor de síntesis de metanol. La otra corriente de productos proveniente del proceso de rectisol contiene CO, H_2 y trazas de Ar y N_2. Esta corriente es calentada por el gas caliente que proviene del ciclón y se combina con una corriente de reciclado antes de entrar al reactor de síntesis de metanol. La alimentación combinada que entra al reactor debe estar a 200°C. El reactor de síntesis se parece a un intercambiador de calor; la reacción ocurre dentro de los tubos, los cuales están llenos con catalizador, y el vapor se condensa en la carcasa. El gas de H_2 y CO se convierte en metanol y en trazas de agua y dimetiléter; la conversión de CO dentro del reactor es de 12.7%. El gas que sale del reactor va hacia un condensador con el fin de condensar el metanol, y luego hacia un tanque de separación; el metanol líquido se envía hacia un tren de destilación para una purificación posterior. El gas que sale del tanque es principalmente gas sin convertir que contiene CO, H_2 y trazas de Ar y N_2. Parte de esta corriente se hace pasar por una llama para liberar los gases no reactivos, y la otra porción se recicla hacia el reactor.

Diseñar y dibujar el sistema a controlar:

A. Tasa de producción.
B. La temperatura de los residuos que entran al reactor de oxidación parcial.
C. El flujo de O_2 que entra al reactor de oxidación parcial.
D. La temperatura en el reactor de oxidación parcial.
E. La temperatura en el tanque de refrigeración.
F. La relación H_2:CO de 2.5:1 en la corriente combinada que sale del reactor cambiador de gas y agua.
G. La temperatura en la corriente que entra al ciclón.
H. El nivel en el ciclón.
I. La temperatura de la corriente que entra al proceso de rectisol
J. La temperatura de la corriente que entra al reactor de síntesis de metanol.
K. La temperatura de la corriente que sale del condensador de metanol.
L. El nivel del tanque de metanol.
M. La presión del tanque de metanol.

Especificar la acción de falla segura de cada válvula y la acción de cada controlador.

CASO 2. PROCESO DE HIDROCARBURO

Una planta procesadora de hidrocarburos purifica una corriente de entrada que contiene hidrocarburos ligeros (cadenas de 2 a 6 carbones) utilizando una serie de intercambiadores de calor y columnas de destilación, las cuales aprovechan las volatilidades relativas de los siguientes tres productos finales: propano, butano y pentano (referencia bibliográfica 2). La figura B-12 ilustra el proceso.

La alimentación al proceso se calienta primero en un intercambiador de calor (HEAT1), luego se bombea a un segundo intercambiador de calor (HEAT2), y fluye a través de una válvula, donde se reduce la presión a 253 psi, hasta entrar en una columna de destilación (COLUMN1). Esta columna es responsable de la separación del propano en la corriente de alimentación como un destilado. Ambos líquidos que salen de la columna están a 253.1 psi, con los destilados a 119.9°F y los fondos a 229.5°F. El destilado pasa a través de una válvula hacia un separador Flash que opera a 100°F y 196.5 psi, para purgar el etano que se encuentra presente en la corriente; la corriente purgada se encuentra en forma de vapor. La corriente de líquido residual es bombeada a 450 psi, lo cual resulta en una corriente de producto con una temperatura de 104.7°F.

La corriente de los fondos proveniente de COLUMN1 se dispersa a través de una válvula a una presión de 89 psi y a una temperatura de 146.8°F; esta corriente es alimentada a otra columna de destilación (COLUMN2). Las corrientes resultantes de esta columna son ambas productos deseados. Ambas salen a 89 psi, con los destilados a 120.7°F y los fondos a 222.7°F. Para cumplir con las especificaciones de entrada estas corrientes de producto deben enfriarse hasta

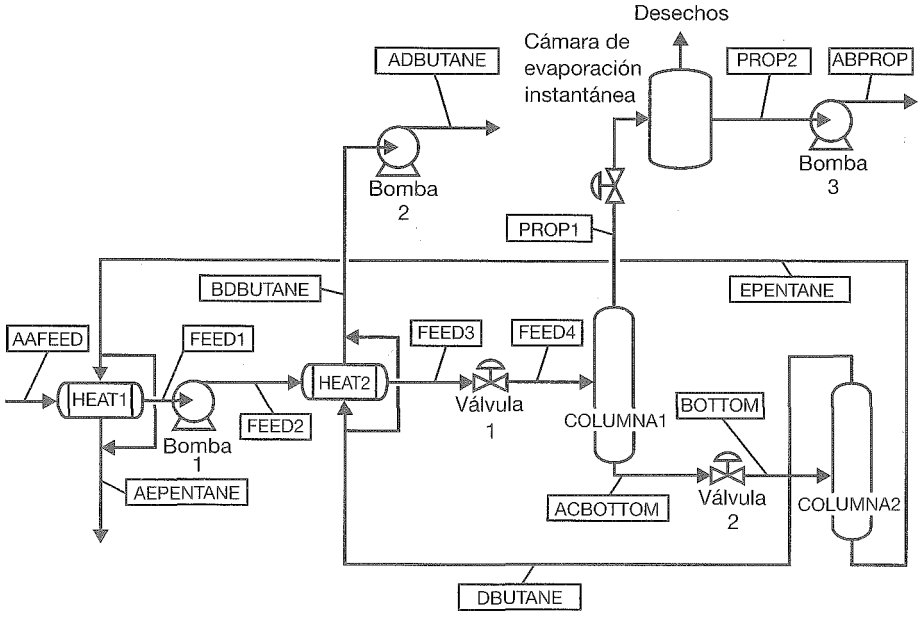


Figura B-12 Proceso para el caso 2.

105°F. Para enfriar las dos corrientes de producto se hacen pasar concurrentemente por la alimentación en los dos intercambiadores de calor previamente mencionados (HEAT1 y HEAT2).

Diseñar y dibujar el sistema a controlar:

A. Tasa de producción.
B. La presión de la corriente FFED4.
C. La temperatura de la corriente AEPENTANE.
D. La presión de la corriente ADBUTANE.
E. La temperatura de la corriente BDBUTANE.
F. La presión en la cámara FLASH.
G. El nivel en la cámara FLASH.
H. El nivel en la base de COLUMN1.
I. El nivel en la base de COLUMN2.
J. La presión en la corriente BOTTOM.

Especificar la acción de falla segura de cada válvula y la acción de cada controlador.

CASO 3. PROCESO DE ÁCIDOS GRASOS

Considere el proceso mostrado en la figura B-13. El proceso hidroliza grasas crudas en ácidos grasos crudos (AGC) y diluye glicerina utilizando una columna de separación de grasas que funciona de manera continua a alta presión (C-17). El producto principal es AGC de alta calidad.

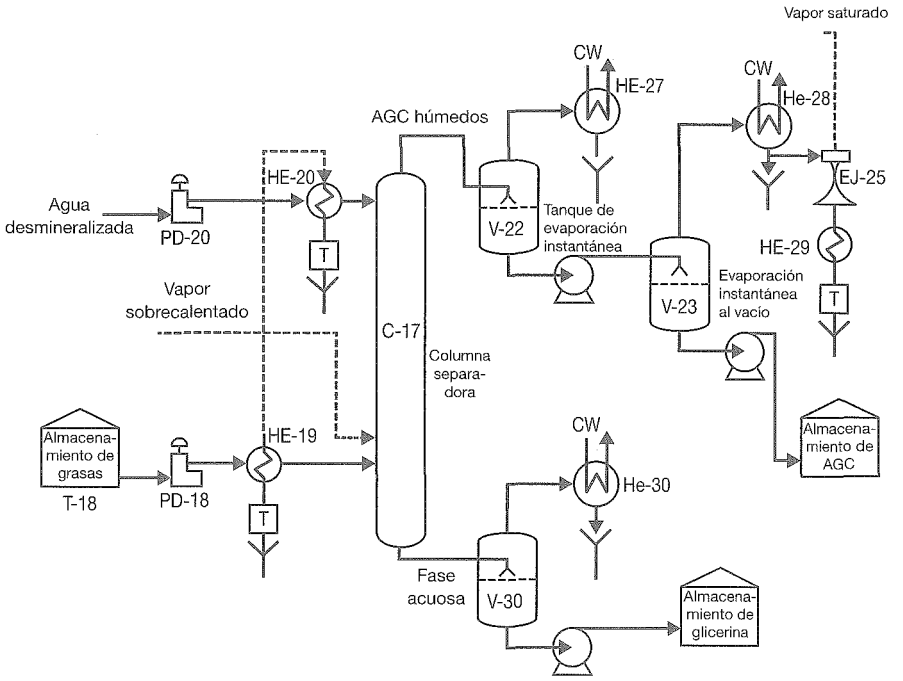


Figura B-13 Proceso de ácidos grasos.

La calidad de los AGC está principalmente en función del valor de ácido. En la columna tiene lugar la siguiente reacción:

$$\begin{array}{l} CH_2OCOR \\ | \\ CHOCOR' + 3H_2O \\ | \\ CH_2OCOR'' \\ \text{Triglicérido} \quad \text{Agua} \end{array} \xrightarrow[\text{presión altas}]{\text{Temperatura y}} \begin{array}{l} CH_2OH \\ | \\ CHOH \\ | \\ CH_2OH \\ \text{Glicerina} \end{array} + \begin{array}{l} RCH{=}O{-}OH \\ \\ R'CH{=}O{-}OH \\ \\ R''CH{=}O{-}OH \\ \text{Ácidos grasos mezclados} \end{array}$$

La grasa se almacena (T-18) a 120°F y es bombeada a la columna por medio de una bomba de desplazamiento positivo (PD-18). La grasa se precalienta (HE-19) hasta 400°F con vapor sobrecalentado antes de entrar a la columna. La columna opera continuamente a una presión de 700 psig y una temperatura de 500°F con una tasa de alimentación de grasa cruda de 25 000 lb/h.

Se bombea agua desmineralizada a la columna utilizando otra bomba de desplazamiento positivo (PD-20). Esta agua se precalienta (HE-21) hasta 500°F. Este exceso de agua es necesario para asegurar la hidrólisis completa de la grasa cruda.

Se introduce vapor sobrecalentado a la columna a 800 psig y 700°F. El vapor aporta calor y favorece el mezclado para romper la grasa.

El separador es básicamente un contactor en contracorriente. La alimentación de agua en la parte superior tiene una gravedad específica mayor que los AGC. La alimentación de grasa cruda en el fondo es insoluble en agua y se eleva cuando el agua emigra hacia el fondo de la columna. La glicerina producida por la reacción es soluble en agua e incrementa la gravedad específica de la fase acuosa.

Dentro de la columna se forma una interfase. Por encima de la interfase el material es en su mayoría grasa y AGC. Por abajo de la interfase es en su mayoría una fase acuosa de agua y glicerina. La mejor operación de la columna se alcanza cuando esta interfase se localiza cerca de la entrada de vapor. Si el nivel de la interfase es bajo, entonces la cantidad de AGC en la fase acuosa se incrementa. Si el nivel es muy alto, la dispersión de grasas dentro del agua se pierde y ocurre hidrólisis incompleta. Para producir la reacción de hidrólisis se requiere alta temperatura, pero se debe evitar la ebullición, ya que esta condición causa que la fase acuosa suba y desborde la columna.

El material removido en la parte superior de la columna contiene AGC y una pequeña cantidad de agua. Este AGC húmedo es un material lechoso de color café claro. El producto de la parte superior se seca por medio de un proceso flash de dos etapas. El calor sensible del material es suficiente para secarlo sin necesidad de calentar. El material se esparce dentro de la primera vasija (V-22) y la mayoría del agua se evapora. El agua que sale por la parte superior se condensa (HE-27). Los AGC resultantes se envían a un evaporador instantáneo al vacío (V-23) para secar completamente el material. Se usa un eyector de chorro de vapor (EJ-25) para generar vacío. El agua que sale por la parte superior en el evaporador instantáneo al vacío se condensa en el pre-condensador (HE-28) y se envía al alcantarillado. Los elementos no condensables que salen del pre-condensador se halan a través del eyector de chorro de vapor y el vapor condensado se moviliza en el condensador barométrico (HE-29). El tanque de evaporación instantánea al vacío debe operarse a 100 mm Hg. El eyector está sobredimensionado significativamente para

carga normal y consume 2500 lb/h de vapor saturado a 150 psig. Una presión muy baja causará que los elementos con bajo peso molecular de los AGC se evaporen y dañen el pre-condensador. Si ocurre pérdida de vacío se permitirá que los AGC húmedos se almacenen en el tanque, lo cual causará problemas en los procesos corriente abajo.

La fase acuosa se remueve del fondo de la columna y debe contener 20% en peso de glicerina disuelta en el agua. Así como los AGC, la fase acuosa se evapora instantáneamente a presión atmosférica (V-30). Cualquier pequeña cantidad de grasa en la fase acuosa hará que la purificación de la glicerina sea muy difícil. El exceso de agua en la fase acuosa requerirá energía adicional en la purificación de glicerina. La glicerina es un líquido transparente e incoloro.

A. ¿Cómo establecería el lector la tasa de producción para esta planta?
B. Prepare un diagrama de instrumentación detallado para controlar:
   1. El nivel en la columna de separación.
   2. El nivel en todos los tanques de evaporación instantánea.

CASO 4. SISTEMAS DE CONTROL EN EL PROCESO DE REFINACIÓN DE AZÚCAR

Las unidades de proceso que se muestran en la figura B-14 forman parte del proceso para refinar azúcar. El azúcar cruda se alimenta al proceso a través de un transportador de tornillo y se rocía

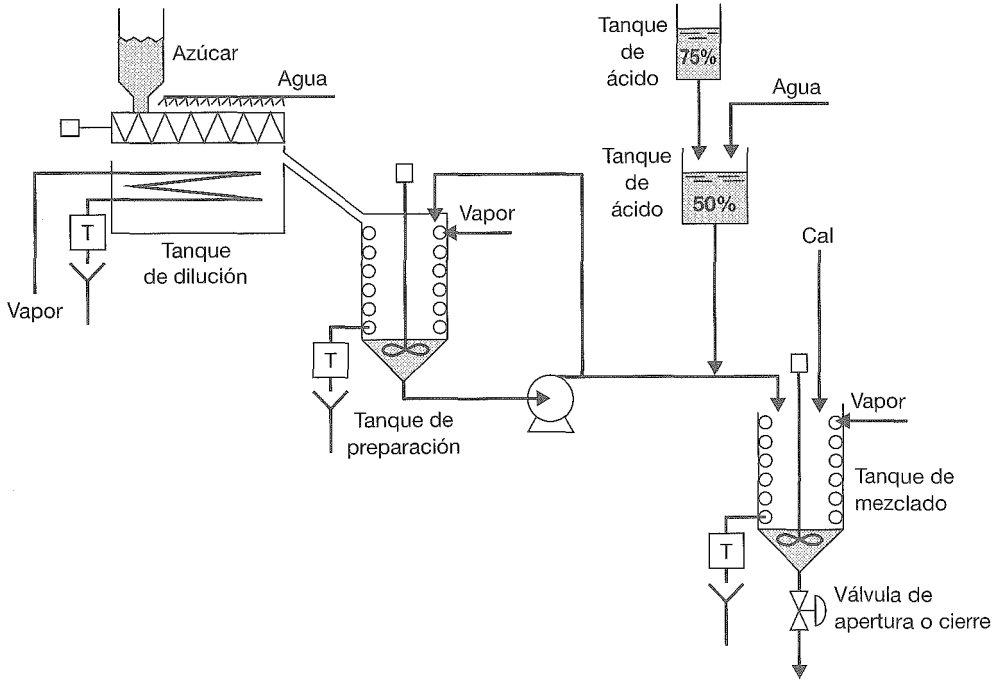


Figura B-14 Proceso para la refinación de azúcar.

agua sobre ésta para formar un jarabe, el cual se calienta en el tanque de disolución, de donde fluye al tanque de preparación, en el cual se realiza un mayor calentamiento y se mezcla. Del tanque de preparación el jarabe se envía al tanque de mezclado. Conforme el jarabe fluye hacia el tanque de mezclado, se le añade ácido fosfórico y, ya en el tanque, cal. Este tratamiento con ácido, cal y calor tiene dos objetivos: el primero es la clarificación, es decir, con el tratamiento se coagulan y precipitan los productos orgánicos que no son azúcar cruda. El segundo propósito es eliminar la coloración del azúcar cruda. Después del tanque de mezclado se continúa el proceso del jarabe.

A. ¿Cómo se controlaría la tasa de producción?
B. Se piensa que es importante controlar las siguientes variables:
   1. Temperatura en el tanque de disolución.
   2. Temperatura en el tanque de preparación.
   3. Densidad del jarabe que sale del tanque de preparación.
   4. Nivel en el tanque de preparación.
   5. Nivel en el tanque de ácido al 50%; el nivel en el tanque de ácido al 75% se puede suponer constante.
   6. La potencia del ácido al 50%. La potencia del ácido al 75% se puede suponer constante.
   7. El flujo de jarabe y ácido al 50% que entran al tanque de mezclado.
   8. El pH de la solución en el tanque de mezclado.
   9. La temperatura en el tanque de mezclado.
   10. En el tanque de mezclado se requiere únicamente una alarma de nivel alto.

Los medidores de flujo que se utilizan en el proceso son magnéticos. La unidad de densidad que se utiliza en la industria azucarera es el °Brix, la cual equivale aproximadamente al porcentaje, por peso, de sólidos de azúcar en la solución.

Se deben diseñar los sistemas de control necesarios para controlar todas las variables mencionadas anteriormente. Mostrar la acción de las válvulas de control y controladores.

CASO 5. PROCESO DEL ÁCIDO SULFÚRICO

En la figura B-15 se ilustra el diagrama de flujo simplificado para la manufactura de ácido sulfúrico (H_2SO_4).

El azufre se carga en un tanque de fundición donde se mantiene en estado líquido; de ahí pasa a un quemador, donde reacciona con el oxígeno del aire y se produce SO_2 mediante la siguiente reacción:

$$S_{(l)} + O_{2(g)} \longrightarrow SO_{2(g)}$$

Del quemador, los gases pasan a través de una caldera de vapor residual, donde se produce vapor mediante la recuperación del calor de la reacción anterior. De la caldera, los gases pasan a través

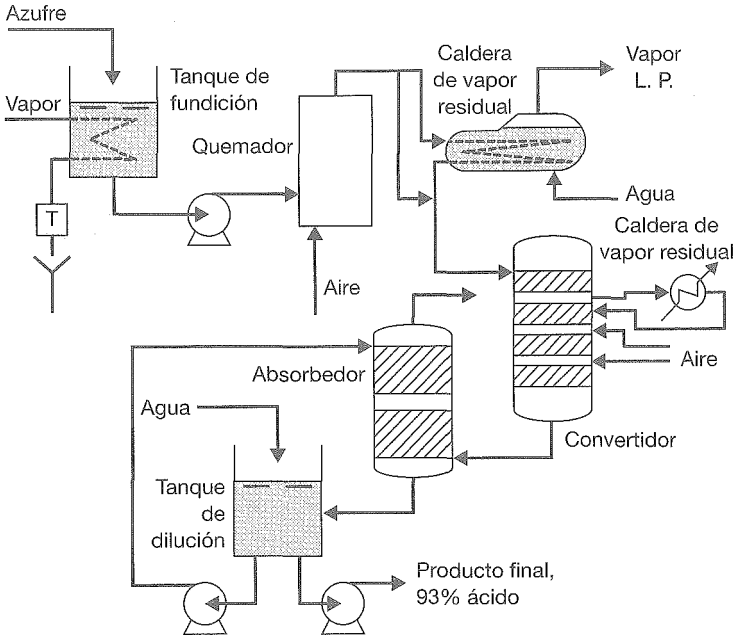


Figura B-15 Proceso para producir ácido sulfúrico.

de un convertidor catalítico de cuatro etapas (reactor), en el cual tiene lugar la siguiente reacción:

$$SO_{2(g)} + \frac{1}{2}O_{2(g)} \rightleftharpoons SO_{3(g)}$$

Del convertidor, los gases son enviados a una columna de absorción, donde los gases de SO_3 se absorben con H_2SO_4 diluido (93%). El agua del H_2SO_4 diluido reacciona con el SO_3 gaseoso y se produce H_2SO_4.

$$H_2O_{(l)} + SO_{3(g)} \longrightarrow H_2SO_{4(l)}$$

El líquido que sale del absorbedor, H_2SO_4 concentrado (98%), pasa a un tanque de circulación, donde se diluye de nuevo al 93% con H_2O. Parte del líquido de este tanque se utiliza entonces como medio de absorción en el absorbedor.

A. ¿Cómo se podría fijar la tasa de producción en esta planta?

B. Se piensa que es importante controlar las siguientes variables:

1. Nivel en el tanque de fundición.
2. Temperatura del azufre en el tanque de fundición.
3. Aire que entra al quemador.
4. Nivel de agua en la caldera de calor residual.
5. Concentración de SO_3 en el gas que sale del absorbedor.

6. Concentración de H_2SO_4 en el tanque de disolución.
7. Nivel en el tanque de disolución.
8. Temperatura de los gases que entran a la primera etapa del convertidor.

Se deben diseñar los sistemas de control necesarios para lograr lo anterior. Es importante especificar la acción de las válvulas y los controladores. Comentar brevemente el diseño obtenido.

CASO 6. SISTEMA DE CONTROL PARA UNA PLANTA DE GRANULACIÓN DE NITRATO DE AMONIO

El nitrato de amonio es uno de los principales fertilizantes; en la figura B-16 se aprecia el proceso para su manufactura (referencia bibliográfica 3). Desde un tanque de alimentación se bombea una solución débil de nitrato de amonio (NH_4NO_3) a un evaporador. En la parte superior del evaporador hay un sistema de expulsión por vacío; el vacío se controla con el aire que entra al sistema. La solución concentrada se bombea a un tanque de agitación y de ahí se alimenta a la parte superior de una torre de granulación (pulverización). En esta torre, la solución concentrada de NH_4NO_3 se lanza desde la parte superior contra una corriente de aire que se eleva. El aire es suministrado mediante un ventilador situado en el fondo de la torre. Con el aire se enfrían las gotas de forma esférica y se elimina parte de la humedad, con lo cual quedan gránulos húmedos. Después, los gránulos se llevan a un secador rotatorio, donde se secan; luego

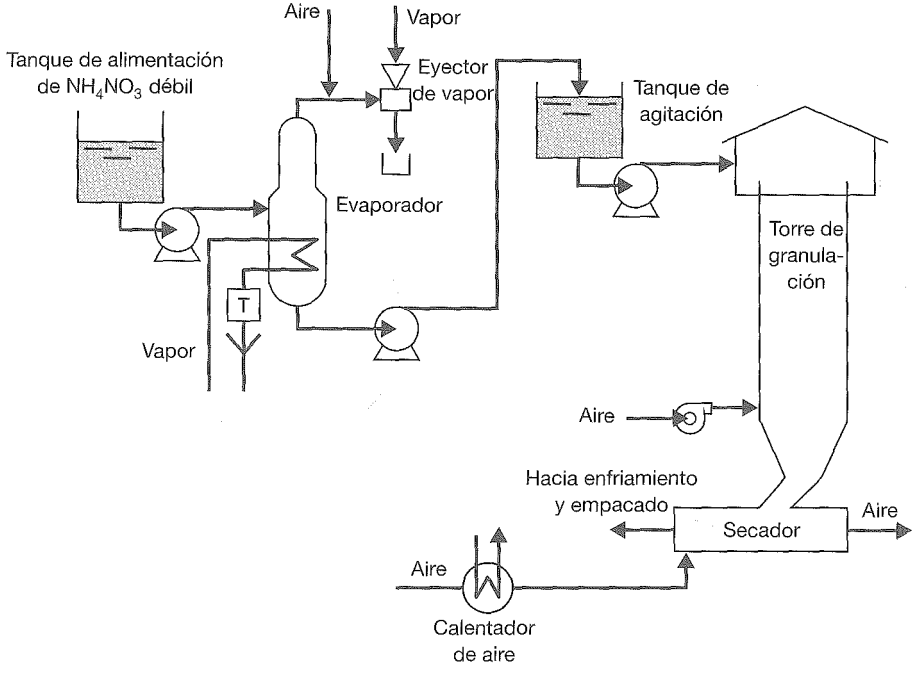


Figura B-16 Proceso del nitrato de amonio.

se enfrían y se llevan a un mezclador, donde se les añade un agente antiadherente (arcilla o tierra diatomácea) y se empacan para su embarque.

A. ¿Cómo se puede controlar la tasa de producción de esta unidad?
B. Diseñar el sistema para llevar a cabo lo siguiente:
   1. Controlar el nivel en el evaporador.
   2. Controlar la presión en el evaporador, lo cual se puede lograr mediante el control del flujo de aire que va al tubo de salida del evaporador.
   3. Controlar el nivel en el tanque de agitación.
   4. Controlar la temperatura de los gránulos secos que salen del secador.
   5. Controlar la densidad de la solución fuerte que sale del evaporador.

   Debe especificarse la acción de todas las válvulas y controladores.

C. Si la producción de esta unidad varía frecuentemente, tal vez también sea conveniente variar el flujo de aire que pasa por la torre de granulación. ¿Cómo se puede lograr esto?

CASO 7. SISTEMA DE CONTROL PARA LA DESHIDRATACIÓN DE GAS NATURAL

Ahora se considera el proceso que aparece en la figura B-17. El objetivo de este proceso es deshidratar el gas natural que entra al absorbedor mediante el empleo de un deshidratante

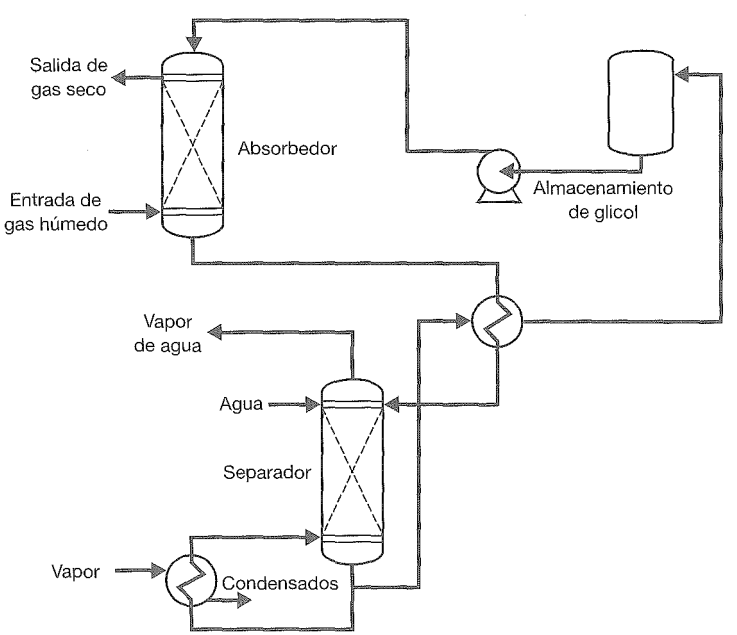


Figura B-17 Sistema para la deshidratación de gas natural.

líquido (glicol). El glicol se introduce por la parte superior del absorbedor y fluye hacia abajo, en sentido contrario al gas, a la vez que recoge la humedad del gas. El glicol pasa del absorbedor a un intercambiador de calor y al separador. En el rehervidor, que se encuentra en la base del separador, se extrae la humedad del glicol, la cual se elimina en forma de vapor (de agua). Este vapor sale por la parte superior del separador, se condensa y se utiliza como reflujo de agua, el cual se usa para condensar los vapores de glicol que de otra manera saldrían junto con el vapor de agua.

El ingeniero que diseñó el proceso decidió que se debe controlar lo siguiente:

1. El nivel del líquido en el fondo del absorbedor.
2. El reflujo de agua en el separador.
3. La presión en el separador.
4. La temperatura en el tercio superior del separador.
5. El nivel de líquido en el fondo del separador.
6. La operación eficiente del absorbedor con diferentes cargas de producción.

Diseñar el sistema de control para lograr el control deseado.

REFERENCIAS

1. Luyben, William L., *Plantwide Dynamic Simulators in Chemical Processing and Control.* Nueva York: Marcel Dekker.
2. Colaboración del Dr. Aydin K. Sunol y Ms. Renee Dockendorf, de la University of South Florida, Tampa.
3. The Foxboro Co., Application Engineering Data.

Apéndice C

Sensores, transmisores y válvulas de control

En este apéndice se presenta parte del equipo físico necesario para la implementación de sistemas de control y se relaciona estrechamente con el capítulo 5. Se examinan algunos de los sensores más comunes –de presión, de flujo, de nivel y de temperatura–, así como dos tipos diferentes de transmisores; uno neumático y otro electrónico. Al final del apéndice se presentan los diferentes tipos de válvulas de control y consideraciones adicionales para el dimensionamiento de las mismas.

C-1 SENSORES DE PRESIÓN

Existen muchos tipos de sensores de presión (véase las referencias bibliográficas 1-4). El sensor de presión más común es el *tubo de Bourdon*, desarrollado por el ingeniero francés Eugene Bourdon, que se ilustra en la figura C-1.1. El tubo de Bourdon consiste básicamente en un tramo de tubo en forma de herradura, con un extremo sellado y el otro conectado a la fuente de presión. Debido a que la sección transversal del tubo es elíptica o plana, al aplicar presión el tubo tiende a enderezarse, y al quitarla el tubo recupera su forma original, siempre y cuando no se rebase el límite de elasticidad del material con que está hecho éste. La cantidad de enderezamiento que sufre el tubo es proporcional a la presión que se aplica. De este modo, si el extremo abierto del tubo está fijo, entonces el extremo cerrado se puede conectar a un indicador para señalar la presión, o a un transmisor para generar una señal.

El rango de presión que se puede medir con el tubo de Bourdon depende del espesor de las paredes y del material con que esté fabricado. Posteriormente se desarrolló una versión extendida del tubo de Bourdon en forma de espiral helicoidal para dar más movimiento al extremo sellado; este elemento se denomina *hélice*. Con la hélice se pueden manejar rangos de presión de aproximadamente 10:1, con una exactitud de ±1% de la escala calibrada (Ryan, 1975). Otro tipo común de tubo de Bourdon es el elemento *espiral*.

Otro tipo de sensor de presión es el *de fuelle*, el cual asemeja a una cápsula corrugada hecha de algún material elástico, por ejemplo, acero inoxidable o latón. Al aumentar la presión, el fuelle se expande, y cuando disminuye se contrae. La cantidad de expansión o contracción es proporcional a la presión que se aplica. Un sensor semejante al de fuelle es el *de diafragma*. Cuando

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

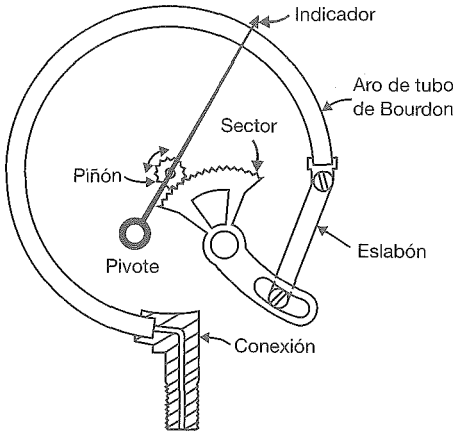


Figura C-1.1 Tubo simple de Bourdon. (Cortesía de Instrumentation Systems, and Automation Society.)

se incrementa la presión en el proceso, el centro del diafragma se comprime; la cantidad de movimiento es proporcional a la presión que se aplica.

C-2 SENSORES DE FLUJO

El flujo es una de las dos variables de proceso que se miden más frecuentemente, la otra es la temperatura; en consecuencia, se han desarrollado muchos tipos de sensores de flujo (véase las referencias bibliográficas 2 y 4-7). En esta sección se tratan los sensores de flujo más utilizados y se mencionan algunos otros. En la tabla C-2.1 (Zientara, 1972) se indican algunas características de los sensores comunes.

Probablemente el sensor de flujo más popular es el *medidor de orificio*, que es un disco plano con un agujero maquinado, como se muestra en la figura C-2.1. El disco se inserta en la línea de proceso, perpendicular al movimiento del fluido, con objeto de producir una caída de presión, Δp_o. Esta caída de presión a través del orificio es una función no lineal de la tasa de flujo volumétrico a través del orificio. Las ecuaciones para los medidores de flujo de orificio de precisión son complejas y se presentan en diversas referencias bibliográficas (véase las referencias 8, 9 y 10); sin embargo, probablemente en la mayoría de las instalaciones se utiliza la siguiente ecuación simple:

$$f = C_O A_O \sqrt{\frac{\Delta p_O}{\rho(1-\beta^4)}} \qquad \text{(C-2.1)}$$

donde:

f = tasa de flujo volumétrico
Δp_o = caída de presión a través del orificio
A_o = área del orificio
C_o = coeficiente del orificio
ρ = densidad del fluido
β = relación adimensional del diámetro del orificio, d, al diámetro del tubo, D.

La ecuación C-2.1 proviene de la aplicación de un balance de masa y de un balance de energía mecánica (Bernoulli). Las referencias citadas anteriormente también muestran cómo

Tabla C-2.1 Características de sensores de flujo típico

Elemento primario	Tipo de fluido	Pérdida de presión[a]	Rangeabilidad del flujo	Error	Tubería corriente arriba[b]	Efecto de la viscosidad	Lectura
Orificio concéntrico	Líquidos, gases y vapor	50-90%	3:1	3-4%	10-30*D*	Alto	Raíz cuadrada
Orificio en segmentos	Líquidos consolidados con agua	60-100%	3:1	2.5%	10-30*D*	Alto	Raíz cuadrada
Orificio excéntrico	Combinaciones líquido-gas	60-100%	3:1	2%	10-30*D*	Alto	Raíz cuadrada
Orifico con arista en cuadrante	Líquidos viscosos	45-85%	3:1	1%	20-50*D*	Bajo	Raíz cuadrada
Cuña en segmentos	Líquidos viscosos y consolidados con agua	30-80%	3:1	1%	10-30*D*	Bajo	Raíz cuadrada
Tubo de Venturi	Líquidos y gases	10-20%	3:1	1%	5-10*D*	Muy alto	Raíz cuadrada
Tubo de Dall	Líquidos	5-10%	3:1	1%	5-10*D*	Alto	Raíz cuadrada
Boquilla de flujo	Líquidos, gases y vapor	30-70%	3:1	1.5%	10-30*D*	Alto	Raíz cuadrada
Medidor de codo	Líquido	Ninguna	3:1	1%	30*D*	Despreciable	Raíz cuadrada
Rotámetro	Todos los fluidos	1-200″ WG	10:1	2%	Ninguna	Mediano	Lineal
Vertedero con muesca V	Líquidos	Ninguna	30:1	4%	Ninguna	Despreciable	5/2
Vertedero trapezoidal	Líquidos	Ninguna	10:1	4%	Ninguna	Despreciable	3/2
Garganta de Parshall	Líquidos consolidados con agua	Ninguna	10:1	3%	Ninguna	Despreciable	3/2
Medidor de flujo magnético	Líquidos consolidados con agua	Ninguna	30:1	1%	Ninguna	Ninguno	Lineal
Medidor de turbina	Líquidos limpios	0-7 psi	14:1	0.5%	5-10*D*	Alto	Lineal
Tubo de Pitot	Líquidos	Ninguna	3:1	1%	20-30*D*	Bajo	Raíz cuadrada
Venturi Pitot	Líquidos y gases	Ninguna	3:1	1%	20-30*D*	Alto	Raíz cuadrada
Desplazamiento positivo	Líquidos	0-15 psi	10:1	0.5-2%	Ninguna	Ninguno	Totalización lineal
Medidor de remolino	Gases	0-2 psi	10:1-100:1	1%	10*D*	Ninguno	Lineal
Vertiente de vórtice	Líquidos y gases	0-6 psi 0-5″ WG	30:1-100:1	0.25%	15-30*D*	Número de Reynolds mínimo 10 000	Lineal
Ultrasónico	Líquidos	Ninguna			Ninguna	Ninguno	Lineal

[a]Los porcentajes de pérdidas de presión se presentan como porcentajes de presión diferencial producida.

[b]La tubería corriente arriba de la válvula se establece de acuerdo con el número de diámetros en línea recta requeridos antes del elemento primario.

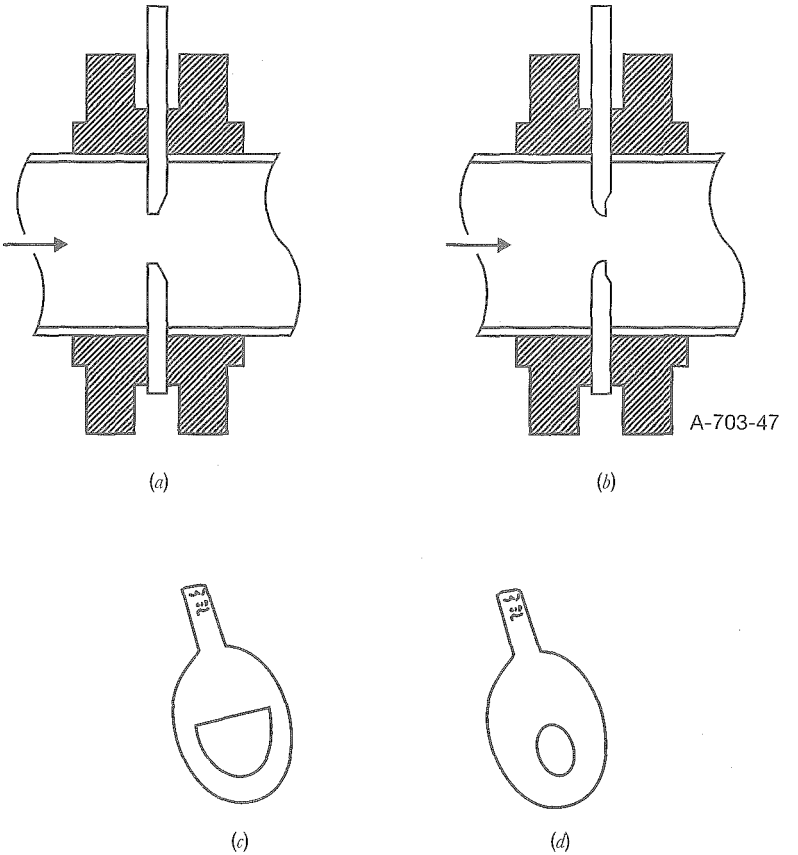


Figura C-2.1 Esquema de medidores de orificios. (*a*) De aristas vivas. (*b*) Aristas de cuadrante. (Cortesía de ABB Kent-Taylor.) (*c*) Arista segmentada. (*d*) Arista excéntrica. (Cortesía Foxboro Co.)

dimensionar el diámetro del orificio requerido. La mayoría de los diámetros de orificio varían entre 10% y 75% del diámetro del tubo, $0.1 < \beta < 0.75$.

Generalmente, la caída de presión a través del orificio se mide con espitas:

1. Espitas laterales son las más comunes. La técnica consiste en medir la caída de presión en las cejas con que se sostiene al orificio en la línea de proceso.
2. Espitas de vena contracta, de radio, de esquina y de línea. Éstas no son tan populares como las espitas laterales.

La que se coloca corriente arriba del orificio se conoce como espita de alta presión, y la que se coloca corriente abajo del orificio se denomina espita de baja presión. En la mayor parte de las espitas su diámetro varía entre ¼ y ¾ pulg. La caída de presión que se mide está en función

de la ubicación de la espita así como de la tasa de flujo. Para medir la caída de presión a través del orificio se utiliza un sensor diferencial de presión.

Se deben enfatizar varios puntos acerca de la utilización de los medidores de orificio para medir flujos. El primero es que la señal que sale de la combinación orificio/transmisor es la caída de presión a través del orificio, no el flujo. En la ecuación C-2.1 se observa que la caída de presión se relaciona con el cuadrado de la tasa del flujo volumétrico, o

$$\Delta p_o \propto \rho f^2 \qquad \text{(C-2.2)}$$

En consecuencia, si se desea el flujo, entonces se debe obtener la raíz cuadrada de la caída de presión; en el capítulo 10 se presentan los bloques de cálculo de raíz cuadrada, sin embargo muchos fabricantes ofrecen la opción de instalar una unidad de extracción de raíz cuadrada junto con el transmisor. En este caso, la señal que sale del transmisor se relaciona de manera lineal con el flujo volumétrico. En los sistemas de control distribuido (DCS, por sus siglas en inglés) y otros sistemas basados en microprocesador, el bloque de cálculo de raíz cuadrada no se necesita porque la raíz cuadrada es una opción de entrada. Esto es, el sistema de control se puede configurar de tal manera que cuando se lea una señal éste calcule la raíz cuadrada automáticamente y mantenga ese resultado en la memoria. Lo segundo que se debe tener en cuenta es que no toda la caída de presión medida por las espitas se pierde por el fluido de proceso. El fluido recupera una cierta cantidad en los siguientes diámetros del tubo a medida que éste restablece su régimen de flujo. Finalmente, la rangeabilidad del orificio, la relación entre el flujo máximo que se puede medir y el flujo mínimo que se puede medir, es 3:1 aproximadamente, como se muestra en la tabla C-2.1. Conocer esto es importante pues indica la precisión esperada cuando se ejecuta el proceso a cargas bajas o altas.

Existen varias causas que pueden impedir la utilización de los sensores de orificio, una de ellas es que no exista suficiente presión para crear una caída de presión, como en el caso del flujo por gravedad, el flujo de fluidos corrosivos, los fluidos con sólidos en suspensión que puedan bloquear el orificio, y fluidos cercanos a la presión de vapor saturado que puedan evaporarse instantáneamente cuando estén sujetos a una caída de presión. En todos estos casos se requiere otro tipo de sensor para medir el flujo.

Otro tipo común de sensor es el *medidor magnético de flujo*. El principio de operación de este elemento es la ley de Faraday; es decir, cuando un material conductor (un fluido) se mueve en ángulo recto a través de un campo magnético se induce un voltaje. El voltaje creado es proporcional a la intensidad del campo magnético y a la velocidad del fluido. Si la intensidad del campo magnético es constante, entonces el voltaje es proporcional a la velocidad del fluido. Además, la velocidad que se mide es la velocidad promedio y, por lo tanto, este sensor se puede utilizar para los dos regímenes: laminar y turbulento. En la calibración de este medidor de flujo se debe tomar en cuenta el área de la sección transversal del tubo, de manera que con la electrónica que se asocia al medidor sea posible calcular el flujo volumétrico. Por lo tanto, la salida se asocia linealmente con la tasa de flujo volumétrico.

Como el medidor magnético de flujo no restringe el flujo, es un dispositivo con caída de presión cero que se puede utilizar para medir flujo por gravedad, flujos con variaciones rápidas y flujo de fluidos próximos a su presión de vapor. Sin embargo, el fluido debe tener una

conductividad mínima de aproximadamente 10 μohm/cm^2, con lo cual el medidor no es apropiado para medir gases ni hidrocarburos líquidos.

En la tabla C-2.1 se observa que la rangeabilidad del medidor magnético de flujo es de 30:1, la cual es significativamente mayor que la de los medidores de orificio, pero su costo también es mayor. La diferencia en costo aumenta conforme se incrementa el tamaño de la tubería que se utiliza en el proceso.

Una consideración importante en la aplicación y mantenimiento de los medidores magnéticos de flujo es el recubrimiento de los electrodos. Éste representa otra resistencia eléctrica, de la que resultan lecturas erróneas. Los fabricantes ofrecen técnicas tales como los limpiadores ultrasónicos para mantener los electrodos limpios.

Otro medidor de flujo importante es el *medidor de turbina*. Es uno de los sensores más precisos disponibles comercialmente. Su principio de funcionamiento se basa en un rotor que se hace girar con la velocidad del fluido. La rotación de las aspas se detecta mediante una bobina de exploración magnética, la cual emite pulsos a una frecuencia que es proporcional a la tasa de flujo volumétrico; este pulso se convierte en una señal equivalente de 4 a 20 mA. Uno de los problemas que más comúnmente se asocia con los medidores de turbina es el de los cojinetes (rodamientos), por lo que se requiere que los líquidos sean limpios y con algunas propiedades lubricantes.

La medición de la tasa de flujo másico de líquidos utilizando el *efecto Coriolis* es muy común en los procesos industriales. La precisión de la medición utilizando este efecto no se ve afectada por cambios de temperatura, densidad, presión y viscosidad del fluido, o por cambios en el perfil de velocidad. Debido a que el principio de medición se basa únicamente en el flujo másico, una vez que la calibración del medidor de flujo haya sido establecida con un fluido convencional como el agua, ésta se aplica de igual manera a los otros fluidos. El medidor tiene un error máximo de $\pm$ 0.15% de la lectura sobre un rango dinámico de 10:1, y es adecuado para la mayoría de los fluidos en un rango de 100:1 con una precisión de $\pm$1.5% de la lectura.

Hasta aquí se han considerado cuatro de los medidores de flujo que se utilizan más comúnmente en la industria de procesos, aunque existen muchos otros tipos, que van desde el rotámetro, toberas de flujo, tubos de venturi, tubos pitot y anubares, los cuales se han utilizado durante muchos años, hasta los desarrollos más recientes, como son los medidores de vórtice, los medidores ultrasónicos, los medidores de conductividad térmica de masa y los medidores de remolino. Las limitaciones de espacio impiden considerar estos medidores con mayor detalle. Pero si el lector desea ahondar en el tema, se le remite a las referencias bibliográficas indicadas al principio de esta sección.

C-3 SENSORES DE NIVEL

Los tres medidores de nivel más importantes son el sensor diferencial de presión, el sensor de flotador y el sensor de burbujeo (véase las referencias bibliográficas 2, 5, 6 y 11). El *método diferencial de presión* consiste en detectar la diferencia de presión entre la presión en el fondo del líquido y en la parte superior del nivel de líquido, como se muestra en la figura C-3.1. Esta diferencia de presión es ocasionada por la cabeza hidrostática desarrollada por el nivel del líquido. El extremo con que se detecta la presión en el fondo del líquido se conoce como extremo de alta presión, y el que se utiliza para detectar la presión en la parte superior del líquido como extremo de baja presión. Una vez que se conoce el diferencial de presión y la densidad del líquido, se puede obtener el nivel. En la figura C-3.1 se muestra la instalación del sensor

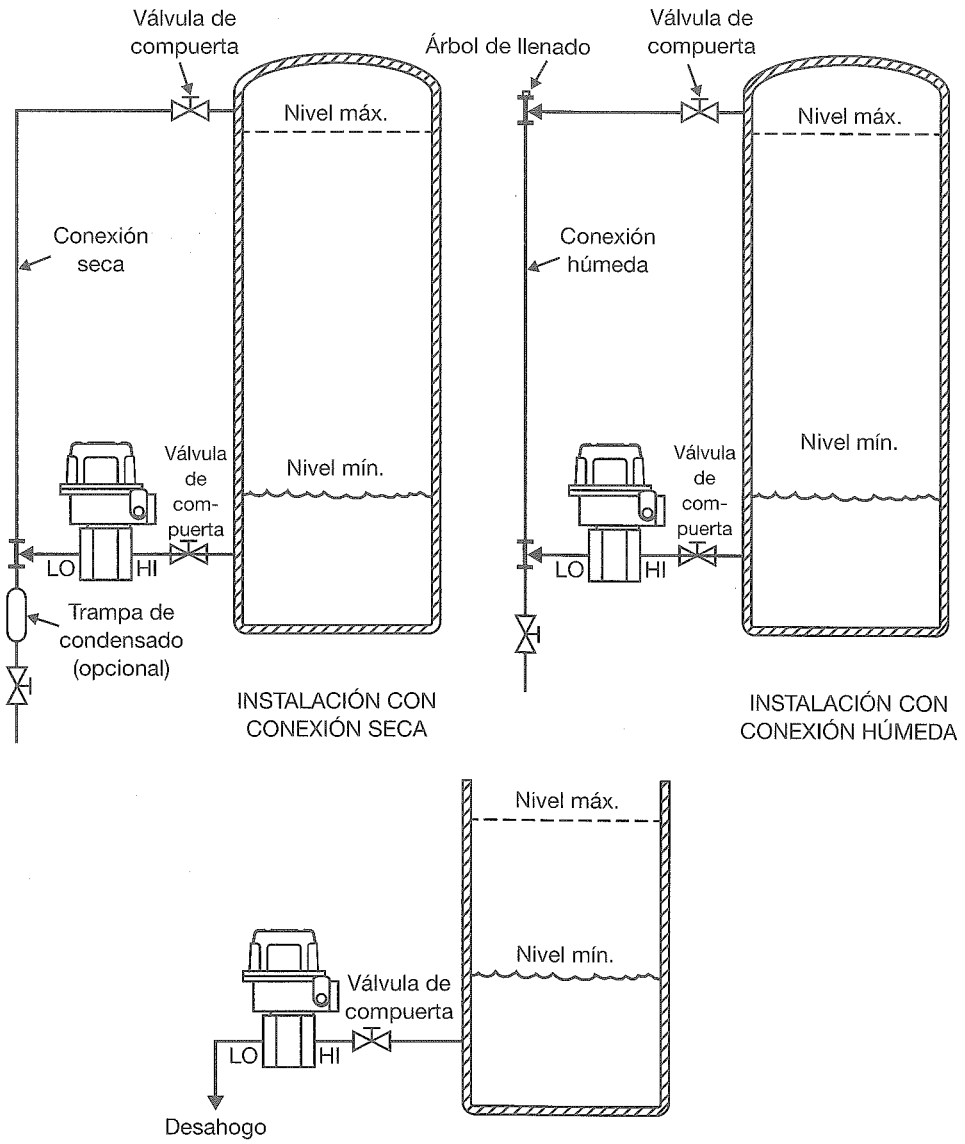


Figura C-3.1 Transmisores del diferencial de presión instalados en tanques cerrados y abiertos. (Cortesía de ABB Kent-Taylor.)

diferencial de presión en recipientes abiertos y cerrados. Si los vapores en la parte superior del líquido no son condensables, entonces la tubería de baja presión, que también se conoce como derivación húmeda, puede estar vacía. Sin embargo, si los vapores pueden condensarse, entonces la derivación húmeda se debe llenar con un líquido sellador apropiado. Si la densidad del líquido varía, entonces se debe utilizar alguna técnica de compensación.

Con el *sensor de flotador* se detecta el cambio en la fuerza boyante sobre un cuerpo sumergido en el líquido. Este sensor generalmente se instala en un ensamble que se monta de manera externa al recipiente. La fuerza que se requiere para mantener el flotador en su lugar, la cual es proporcional al nivel del líquido, es entonces convertida en una señal por el transmisor. Este tipo de sensor es más barato que la mayoría de los otros sensores de nivel; sin embargo, su mayor desventaja estriba en la incapacidad para cambiar el cero y la escala. Para cambiar el cero se requiere la reubicación de la cápsula completa.

El *sensor de burbujeo* es otro tipo de sensor de presión hidrostática. Consiste en un tubo con gas inerte o aire que se sumerge en el líquido. El aire o gas inerte que fluye a través del tubo se regula para producir una corriente continua de burbujas, y la presión que se requiere para producir esta corriente continua es una medida de la presión hidrostática o nivel del líquido.

Existen otros métodos nuevos para medir el nivel en los tanques, algunos de éstos son calibradores de capacitancia, sistemas ultrasónicos y sistemas de radiación nuclear. Los dos últimos sensores también se utilizan para medir el nivel en materiales sólidos. Para profundizar en el tema se recomienda consultar las referencias bibliográficas que se citan al principio de esta sección.

C-4 SENSORES DE TEMPERATURA

La temperatura, junto con el flujo, es la variable que se mide con mayor frecuencia en la industria de procesos. Una razón simple de ello es que casi todos los fenómenos físicos se ven afectados por ésta. La temperatura también se utiliza frecuentemente para inferir otras variables del proceso. Dos de los ejemplos más comunes son las columnas de destilación y los reactores químicos. Comúnmente, en las columnas de destilación se utiliza la temperatura para inferir la pureza de una de las corrientes salientes; en los reactores químicos la temperatura se utiliza como un indicador del grado de conversión o de reacción.

A causa de los múltiples efectos que se producen con la temperatura, se han desarrollado numerosos dispositivos para medirla (véase las referencias bibliográficas 2, 3 y 6). Con muy pocas excepciones, los dispositivos caen en cuatro clasificaciones generales, como se observa en la tabla C-4.1. Los termómetros de cuarzo, los conos pirométricos y las pinturas especializadas son algunos de los sensores que no entran en la clasificación de la tabla C-4.1. En la tabla C-4.2 (Zientara, 1972) se indican algunas características de los sensores más comunes.

Con los *termómetros de vidrio con líquido* se indica el cambio de temperatura ocasionado por la diferencia entre el coeficiente de expansión del vidrio y del líquido que se utiliza. Los líquidos que se utilizan más ampliamente son mercurio y alcohol. Los termómetros de mercurio que se fabrican con vidrio ordinario son útiles entre –35° y 600°F. El límite inferior se debe al punto de congelación del mercurio y el superior a su punto de ebullición. Si el espacio que queda arriba del mercurio se llena con un gas inerte (generalmente nitrógeno), para evitar la ebullición, el rango útil se puede extender hasta los 950°F. Tales termómetros llevan la inscripción de "lleno con nitrógeno" ("*nitrogen filled*"). Para temperaturas por abajo del punto de congelación del mercurio (–38°F) se debe emplear otro líquido. El alcohol se usa ampliamente para temperaturas por abajo de –80°F, para temperaturas hasta de –200°F se utiliza pentano, y tolueno para temperaturas por abajo de –230°F.

Los *termómetros de tira bimetálica* funcionan con base en el principio de que los metales se expanden con la temperatura y que los coeficientes de expansión no son los mismos para todos

Tabla C-4.1 Sensores más comunes para la medición de temperatura

I.	Termómetro de expansión
	A. Termómetro de vidrio con líquido
	B. Termómetros de expansión sólida (tira bimetálica)
	C. Termómetros de sistema lleno (termómetros de presión)
	1. Lleno de gas
	2. Lleno de líquido
	3. Lleno de vapor
II.	Detectores sensibles a la resistencia
	A. Termómetros de resistencia
	B. Termómetros
III.	Termopares
IV.	Métodos sin contacto
	A. Pirómetros ópticos
	B. Pirómetros de radiación
	C. Técnicas infrarrojas

los metales. El elemento sensible a la temperatura es un compuesto de dos metales diferentes unidos en una tira. El coeficiente de expansión térmica de uno de los metales es alto, y el del otro metal es bajo. Una combinación común es el invar (64% Fe, 36% Ni), cuyo coeficiente es bajo, y otra aleación de níquel-hierro, cuyo coeficiente es alto. Generalmente la expansión con la temperatura es baja, y por esta razón la tira bimetálica se enrolla en forma de espiral. Conforme la temperatura se incrementa, la espiral tiende a combarse hacia el lado del metal con bajo coeficiente térmico.

Otro sensor de temperatura común es el *termómetro de sistema lleno*. Las variaciones de temperatura expanden o contraen el fluido en el sistema, lo cual se detecta mediante el resorte de Bourdon y se transmite a un indicador o transmisor. Debido a la simplicidad del diseño, confiabilidad, bajo costo relativo y seguridad inherente, estos elementos son muy aceptados en la industria de procesos. Para una descripción más amplia de estos sistemas se remite al lector a las referencias bibliográficas 2 y 3.

Los *detectores de temperatura resistivos* (RTD, por sus siglas en inglés) son dispositivos que operan con base en el principio de que la resistencia eléctrica de los metales puros se incrementa con la temperatura. Ya que la resistencia eléctrica se puede medir con bastante precisión, esto proporciona un medio para medir la temperatura con mucha exactitud. Los metales que se utilizan más comúnmente son platino, níquel, tungsteno y cobre. Para la lectura de la resistencia y, en consecuencia, también de la temperatura, generalmente se utiliza un puente de Wheatstone.

Con los *elementos termistores* se detectan cambios muy leves de la temperatura. Los termistores se fabrican con una combinación sinterizada de material cerámico y alguna clase de óxido metálico semiconductor, como níquel, manganeso, cobre, titanio o hierro. Los termistores tienen un coeficiente de resistividad térmica muy negativo, o algunas veces positivo. Entre sus ventajas están un tamaño pequeño y bajo costo. Sus principales desventajas estriban en que la relación temperatura-resistencia no es lineal, así como el hecho de que generalmente se requieren líneas de fuerza blindadas. Los puentes de Wheatstone se utilizan comúnmente para medir la resistencia y, por tanto, la temperatura.

Tabla C-4.2 Características de los sensores de temperatura comunes

Sensores	Rango, °F	Precisión, °F	Ventajas	Desventajas
Termómetro de vástago de vidrio	Práctico: –200 a 600 Extremo: –321 a 1100	0.1–2.0	Bajo costo, simplicidad, larga vida	Lectura difícil, medición únicamente local, sin control automático o capacidad de registro
Termómetro bimetálico	Práctico: –80 a 800 Extremo: –100 a 1000	1.0–20	Menos propenso a ruptura, lectura en carátula, de menor costo que el térmico o el eléctrico	Menor precisión que el termómetro con vástago de vidrio, cambia la calibración con el manejo brusco
Elementos térmicos de relleno	Práctico: –300 a 1000 Extremo: –450 a 1400	0.5–2% de la escala completa	Simplicidad, no necesita energía auxiliar, tiempos de respuesta suficientes	Mayor tamaño de bulbo que en los sistemas eléctricos y mayor rango mínimo, la distancia entre el bulbo y el punto de lectura es máxima de 50-200 ft, sólo se puede reparar en fábrica
Termómetro de resistencia	–430 a 1800	0.1 (mejor de)	Precisión del sistema, bajo rango disponible (10 °F), respuesta rápida, tamaño pequeño	El autocalentamiento puede ser un problema, la desviación a largo plazo excede la del termopar, algunos modelos son muy costosos o difíciles de ensamblar
Termopares	–440 a 5000	0.2 (mejor de)	Tamaño pequeño, bajo costo, ensamble práctico, rango amplio	No es tan simple como el termómetro de lectura directa, el trabajo en frío de los cables puede afectar la calibración, rango mínimo nominal de 70°F
Pirómetro de radiación	0 a 7000	0.5–1.0% de la escala completa	Sin contacto físico, rango amplio, respuesta rápida, objetivo de medición pequeño o promedio en un área grande	Más frágil que otros dispositivos eléctricos, escala no lineal, requiere un rango relativamente amplio
Termistores	–150 a 600	0.1 (mejor de)	Tamaño pequeño, respuesta rápida, bueno para rangos estrechos, bajo costo y estable, sin unión fría	Respuesta escasamente lineal, la estabilidad sobre 600°F es un problema, no es adecuado para rango amplio, su alta resistencia hace al sistema propenso a inducción de ruido de las líneas de energía

El último elemento de temperatura que se estudiará es el *termopar*, que probablemente es el sensor de temperatura industrial más conocido. El principio de funcionamiento del termopar lo descubrió T. J. Seebeck, en 1821. En el efecto Seebeck, o principio de Seebeck, se establece que en un circuito de dos metales diferentes existe un flujo de corriente eléctrica si las dos uniones están a temperaturas diferentes. El voltaje que se produce con este efecto termoeléctrico depende de la diferencia de temperatura entre las dos uniones y de los metales que se utilicen. Los tipos más comunes de termopares son aleación platino-platino/rodio, cobre-constantán, hierro-constantán, cromel-alumel y cromel-constantán. Para un estudio más detallado de los termopares se recomienda consultar las referencias bibliográficas 2 y 3.

C-5 SENSORES DE COMPOSICIÓN

Otra clase importante de sensores son los sensores de composición, los cuales se utilizan en las mediciones y control de calidad de producto y del ambiente. Existen muchos tipos diferentes de sensores de composición, por ejemplo, sensores de densidad, viscosidad, cromatografía, pH y POR. Debido a las limitaciones de espacio no se profundizará en la discusión de estos sensores; sin embargo, es necesario que el lector esté consciente de su importancia (véase las referencias bibliográficas 2 y 25-28).

C-6 TRANSMISORES

En esta sección se presentan los ejemplos de un transmisor neumático y de un transmisor eléctrico. El objetivo es mostrar al lector los principios de funcionamiento de estos transmisores típicos. El propósito del transmisor es convertir la salida de un sensor en una señal lo suficientemente intensa como para que se pueda transmitir a un controlador o a cualquier otro dispositivo receptor. En general, la mayoría de los transmisores se pueden dividir en dos tipos: de balance de fuerzas y de balance de movimiento.

C-6.1 Transmisores neumáticos

En todos los transmisores neumáticos se utiliza un arreglo de mariposa y boquilla para producir una señal de salida proporcional a la salida del sensor. Para poder ilustrar los principios de funcionamiento se utilizará un transmisor de presión diferencial neumático (véase la referencia bibliográfica 12), que es un transmisor del tipo balance de fuerzas y se ilustra en la figura C-6.1.

La cápsula de diafragma gemelo es el sensor. Éste detecta la diferencia de presión entre el lado de presión alta y el lado de presión baja. Ya antes se vio que este tipo de sensor se utiliza para medir el nivel de un líquido y el flujo. El diafragma se une a una barra de fuerza mediante una conexión flexible. La barra de fuerza se conecta al cuerpo del transmisor mediante un diafragma de acero inoxidable. El diafragma sirve como sello de la cavidad de medición y también como un punto de apoyo firme para la barra de fuerza. La parte superior de la barra de fuerza se conecta a la barra de rango mediante un retén flexible. La barra de rango tiene una rodaja de rango que también sirve de apoyo. En la parte inferior de la barra de rango se encuentra un fuelle de retroalimentación y un ajuste a cero. Arriba de dicha barra hay un arreglo

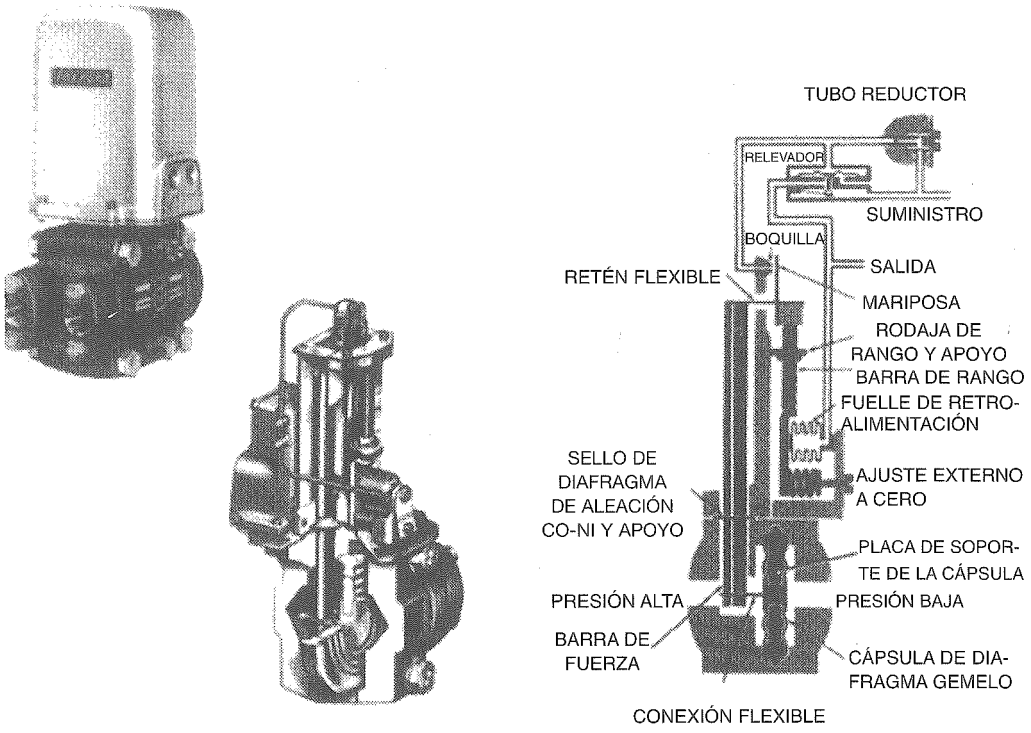


Figura C-6.1 Transmisor neumático de presión diferencial. (Cortesía de Foxboro Co.)

de mariposa y boquilla y un relevador neumático. Como se muestra en la figura, la mariposa se conecta a la combinación barra de fuerza-barra de rango.

Cuando en la cápsula del diafragma se detecta una diferencia de presión, se crea una tensión o fuerza en la parte inferior de la barra de fuerza. Más específicamente, se puede suponer que la presión en la parte superior se incrementa, con lo que se crea una fuerza que tira de la barra de fuerza, de lo cual resulta un movimiento en el extremo externo de la barra, con lo que la mariposa se acerca a la boquilla. En este caso se incrementa la salida del relevador y con ello se incrementa la fuerza que ejerce el fuelle de retroalimentación sobre la barra de rango. Con esta fuerza se balancea la fuerza de la presión diferencial presente en la cápsula del diafragma. Del balance de esta fuerza resulta la señal de salida del transmisor, la cual es proporcional a la diferencia de presión.

La presión que se recomienda para la mayoría de los instrumentos neumáticos está entre 20 y 25 psig. Ésta asegura el funcionamiento adecuado con un nivel de salida de 15 psig. Para calibrar estos instrumentos se requiere ajustar el cero y la escala (o rango). En el instrumento de la figura C-6.1 esto se hace mediante un tornillo externo de ajuste a cero y con la rodaja de rango.

En los párrafos precedentes se describe el principio de funcionamiento de un instrumento neumático típico. Como se menciona al principio, en todos los instrumentos neumáticos se utiliza alguna clase de arreglo de boquilla y mariposa para producir una señal de salida, la cual es una técnica confiable y simple con la que se ha tenido éxito durante muchos años.

C-6.2 Transmisores electrónicos

En la figura C-6.2 se muestra el diagrama simplificado de un transmisor electrónico de presión diferencial (véase la referencia bibliográfica 13). Este transmisor es del tipo de balance de movimiento y se utilizará para ilustrar los principios de funcionamiento de la instrumentación electrónica típica.

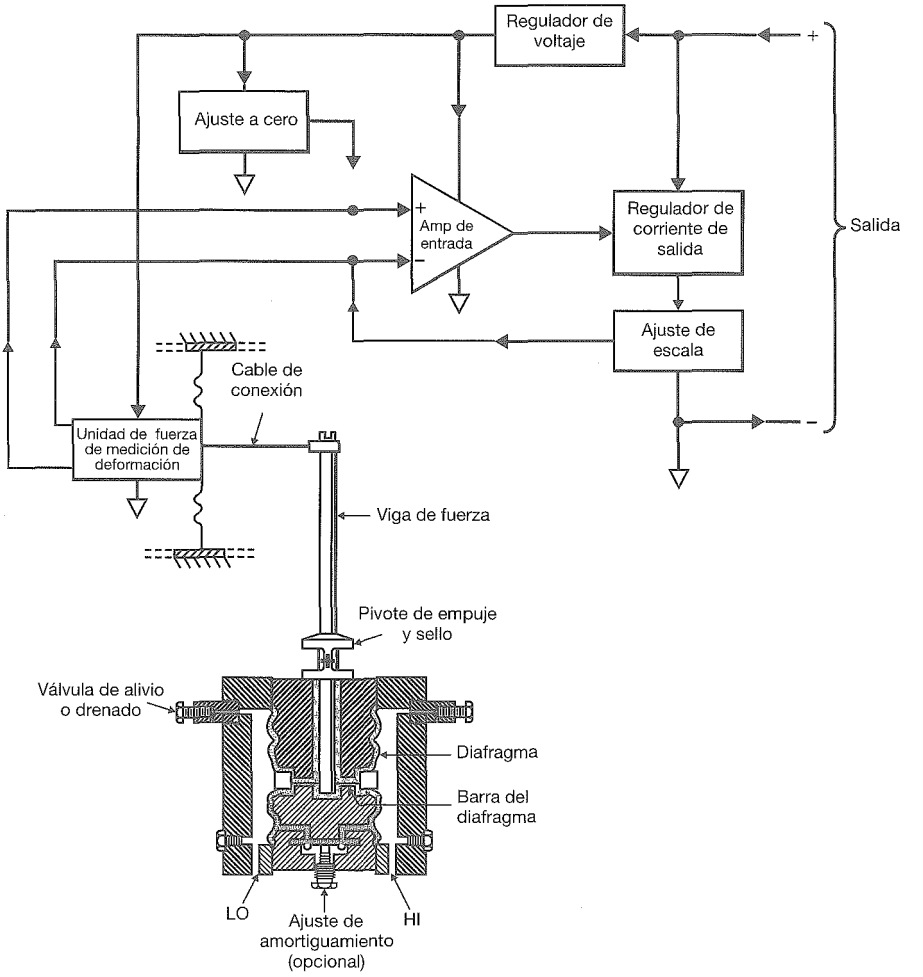


Figura C-6.2 Transmisor electrónico de presión diferencial. (Cortesía de ABB Kent-Taylor.)

Con un incremento en la presión diferencial se accionan los diafragmas del elemento de medición y se desarrolla una fuerza con la que se mueve la parte inferior de la barra de fuerza hacia la izquierda. Este movimiento de la barra de fuerza se transfiere a la unidad de medición de la fuerza de deformación a través de un alambre de conexión. En la unidad de medición de la fuerza de deformación se tienen cuatro medidores de fuerza que se conectan en una configuración puente. Con el movimiento de la barra de fuerza se causa un cambio de resistencia en los medidores de fuerza. Este cambio produce una señal diferencial proporcional al diferencial de presión que entra. Esta señal se aplica a las entradas del amplificador de entrada. Un lado de la señal se aplica directamente a la entrada del amplificador con inversión y el otro a la entrada sin inversión, a través de una red de cero, con la cual se obtiene el ajuste a cero del transmisor.

Con la señal que sale del amplificador de entrada se maneja al regulador de corriente de salida. El regulador de corriente controla la corriente de salida del transmisor a través de la red de escala y el circuito sensor de corriente de salida. Con la red de escala se obtiene el ajuste de escala del transmisor. La señal de esta red se retroalimenta al circuito de entrada mediante un amplificador con amortiguamiento (buffer) y se utiliza para controlar la ganancia del circuito de entrada. Si la corriente de salida del transmisor se incrementa por arriba de 20 mA C.D., el voltaje que pasa a través de la resistencia de detección de corriente activa el limitador de corriente de salida, con el cual se limita la salida.

C-7 TIPOS DE VÁLVULAS DE CONTROL

Existen muchos tipos diferentes de válvulas de control en el mercado (véase las referencias bibliográficas 14-20). En consecuencia, es difícil clasificarlas; sin embargo, aquí se clasificarán en dos categorías principales: de vástago recíproco y de vástago rotatorio.

C-7.1 Vástago recíproco

En la figura C-7.1 se muestra una válvula de control de vástago recíproco típica. Esta válvula en particular se conoce como *válvula de globo con asiento sencillo y vástago deslizable*. Las *válvulas de globo* son una familia de válvulas que se caracterizan por un elemento de cierre que viaja en una línea perpendicular al asiento de la válvula. Se utilizan principalmente para propósitos de estrangulamiento y control de flujo en general. En la figura C-7.1 también se muestran en detalle los diferentes componentes de la válvula. Como puede observarse, la válvula se divide en dos áreas generales: actuador y cuerpo. El actuador es la parte de la válvula con que convierte en movimiento mecánico la energía que entra a la válvula para aumentar o disminuir la restricción de flujo. En la figura C-7.2 se muestra una *válvula de globo con asiento doble y vástago deslizable*. Estas válvulas pueden manejar presiones de proceso altas con un actuador estándar. Sin embargo, si se requiere un cierre extremo, generalmente se utilizan válvulas de asiento sencillo, ya que con las de doble asiento cerradas se tiende a tener mayor escurrimiento que con las de asiento sencillo.

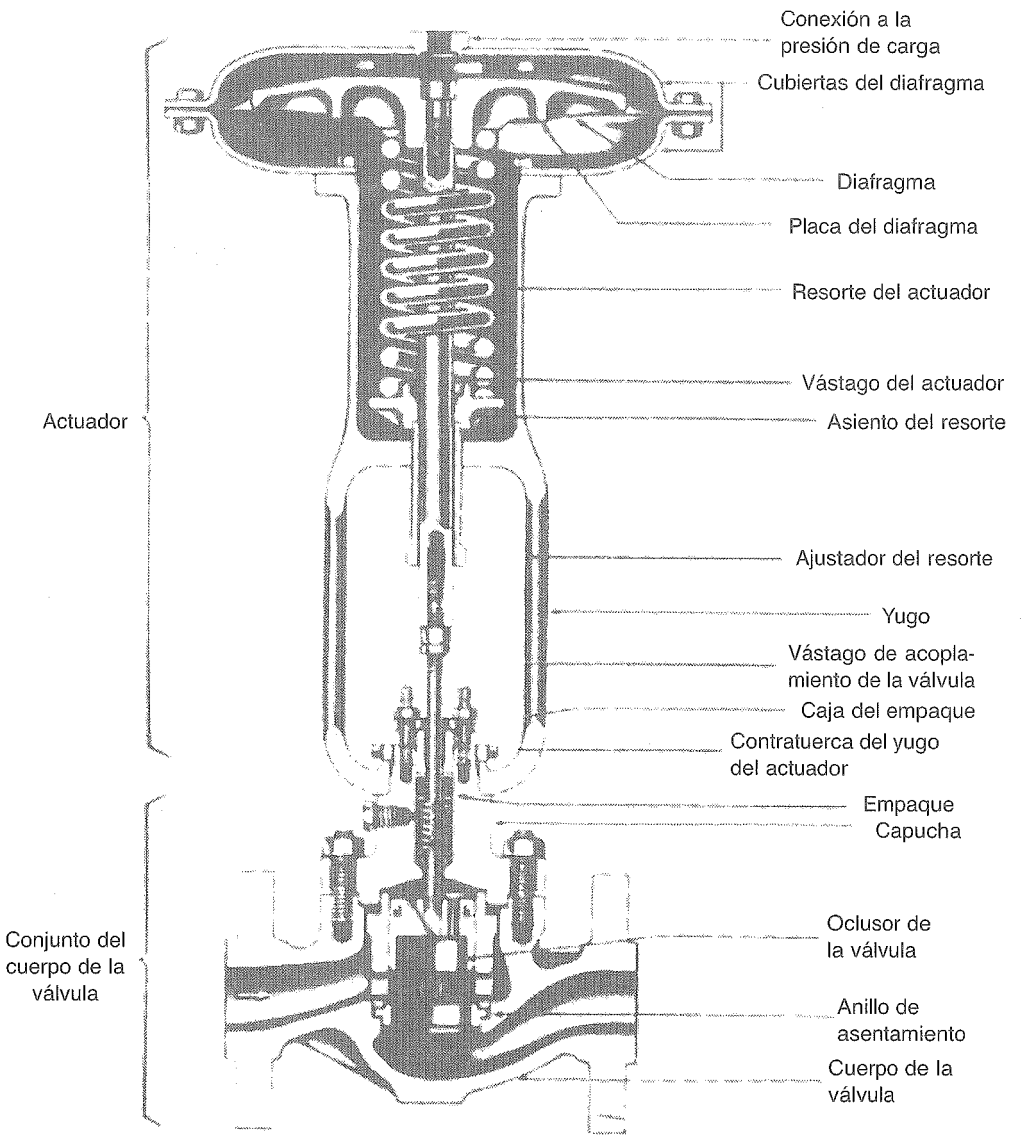


Figura C-7.1 Válvula de globo con asiento sencillo y vástago deslizable. (Cortesía de Fisher Controls.)

Otro tipo de válvula que se utiliza comúnmente es la *válvula de cuerpo separado*. Generalmente se emplea en líneas de proceso donde se requiere cambiar con frecuencia el oclusor y el asiento para evitar la corrosión.

Las *válvulas de jaula* tienen un oclusor con pasajes internos.

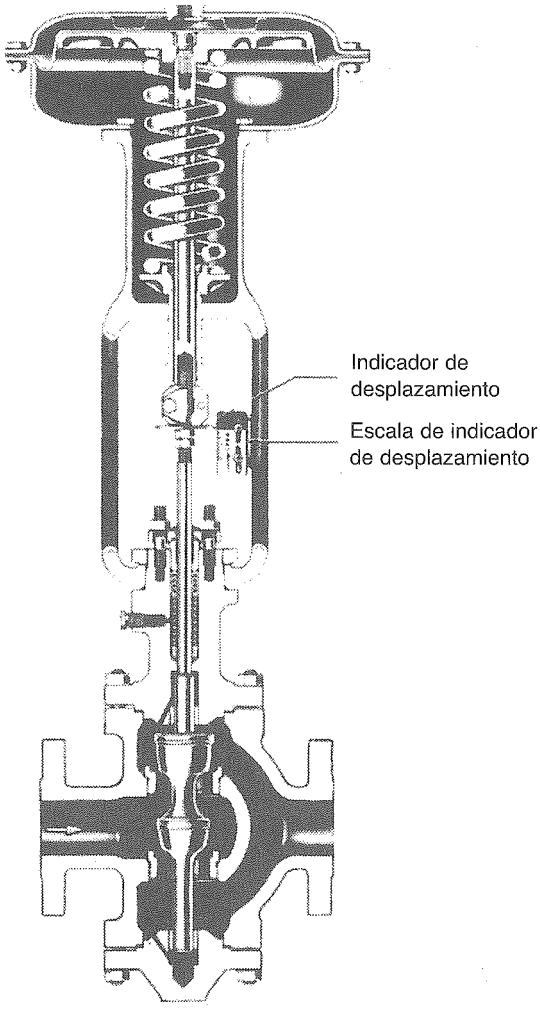
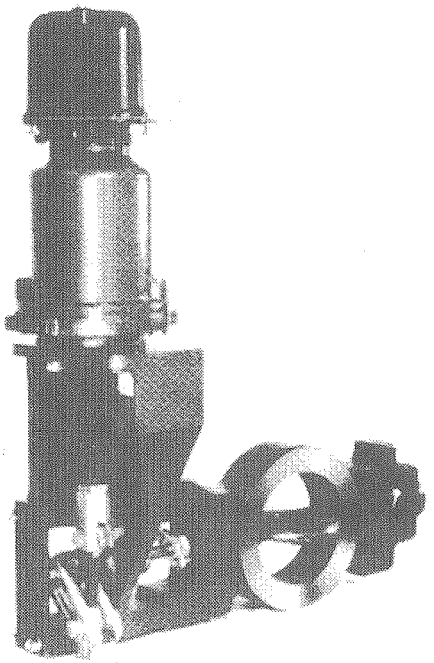


Figura C-7.2 Válvula de globo con asiento doble y vástago deslizable. (Cortesía de Fisher Controls.)

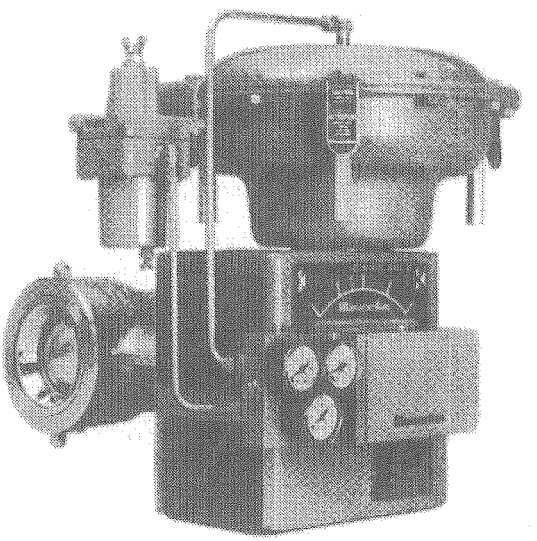
Las *válvulas de tres vías* también son válvulas de tipo recíproco. Las válvulas de tres vías pueden ser convergentes o divergentes y, en consecuencia, con ellas se puede separar una corriente en dos o se pueden mezclar dos corrientes en una sola. Algunas veces se utilizan para propósito de control.

Existen algunos otros tipos de válvulas de control con vástago recíproco. La mayoría de ellas se utiliza en servicios especializados. Entre ellas se encuentra la *válvula estilo Y*, la cual se utiliza comúnmente en el servicio de fundición de metales o criogénico. La *válvula de apriete o diafragma*, que posee una parte flexible, por ejemplo un diafragma que se puede mover junto con, o abrir, o cerrar el área de flujo. Se utilizan comúnmente para fluidos altamente corrosivos, suspensiones y líquidos de alta viscosidad, así como en operaciones de procesamiento de alimentos. La *válvula de compuerta* es otro tipo de válvula de vástago recíproco. Se usa

principalmente como válvula de bloqueo en servicios en donde se necesita una abertura o un cierre completos. Sin embargo, por lo regular no se emplea como válvula automática en servicios de estrangulamiento.



(*a*)



(*b*)

Figura C-7.3 *(a)* Válvula de mariposa. (Cortesía de Fisher Controls.) *(b)* Válvula de esfera con posicionador. (Cortesía de Masoneilan Division, McGraw-Edison Co.)

C-7.2 Vástago rotatorio

Existen varios tipos muy comunes de válvulas de vástago rotatorio. Uno de los más comunes es la *válvula de mariposa* que se ilustra en la figura C-7.3*a*. Estas válvulas constan de un disco que gira alrededor de un eje. Estas válvulas requieren mínimo espacio para su instalación y tienen alta capacidad de flujo con bajo costo.

Otra válvula común de vástago rotatorio es la *válvula de esfera* que se ilustra en la figura C-7.3*b*. Con estas válvulas también se logra una alta capacidad de flujo a bajo costo. Se utilizan comúnmente para manejar suspensiones o materiales fibrosos. Su tendencia al escurrimiento es baja y su tamaño es pequeño.

Hasta aquí se ha presentado una breve introducción a varios tipos de válvulas de control. Sin embargo, éstas no son las únicas válvulas de control y tampoco son los únicos tipos. En el mercado existe un gran número de válvulas para cubrir los requerimientos de servicios especializados, así como de seguridad y de otros tipos de regulaciones.

C-8 ACTUADORES DE LA VÁLVULA DE CONTROL

Como se señaló previamente, el accionador (o actuador) es la parte de la válvula de control que convierte la energía de entrada, ya sea neumática o eléctrica, en movimiento mecánico para abrir o cerrar la válvula.

C-8.1 Actuadores de diafragma con operación neumática

Éstos son los actuadores más usuales en la industria de procesos. En la figura C-8.1 se muestra un actuador de diafragma típico. Estos actuadores consisten en un diafragma flexible que se coloca entre dos compartimientos. Una de las cámaras resultantes de este arreglo debe ser hermética. La fuerza que se genera con el actuador es contrarrestada con un resorte de "rango". La señal neumática del controlador entra a la cámara hermética y con el incremento o decremento de la presión de aire se produce una fuerza que se utiliza para vencer la fuerza del resorte de rango del actuador así como las fuerzas al interior del cuerpo de la válvula.

La acción de la válvula, FC o FO, está determinada por el actuador. En la figura C-8.1*a* se muestra una válvula cerrada en falla o de aire para abrir. En la figura C-8.1*b* se muestra una válvula abierta en falla o de aire para cerrar. Algunas válvulas también tienen la acción especificada en el cuerpo (conexión inversa o jaula) de manera que el vástago siempre se mueve hacia abajo. Esto es, en estos casos la válvula es del tipo FC o FO cuando el vástago se mueve hacia abajo.

El tamaño del actuador depende de la presión del proceso contra la cual se debe mover el vástago y de la presión de aire disponible. El rango de presión de aire más común es de 3 a 15 psig, pero también se utilizan rangos de 6 a 30 psig y de 3 a 27 psig. Estos actuadores de diafragma son de construcción sencilla, confiables y económicos. El fabricante proporciona las ecuaciones para dimensionar los actuadores.

C-8.2 Actuadores de pistón

Normalmente los actuadores de pistón se utilizan cuando se requiere máxima confiabilidad junto con una respuesta rápida, lo que generalmente ocurre cuando es alta la presión de proceso contra la que se trabaja. Estos actuadores siempre operan con un suministro de aire a alta presión, hasta

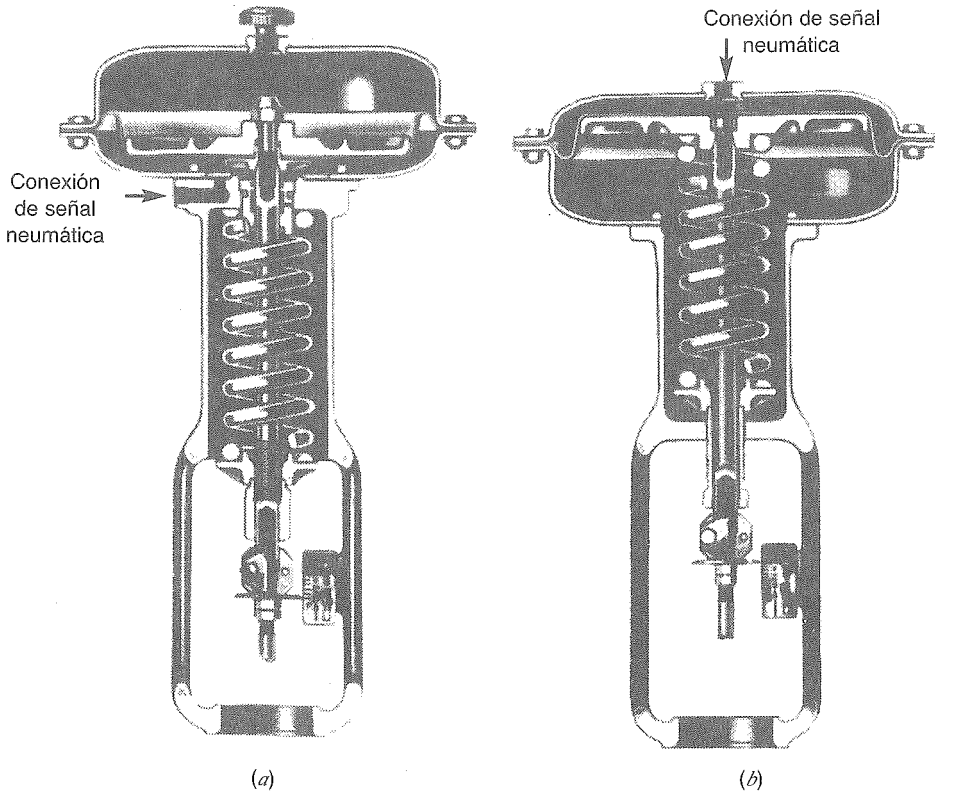


Figura C-8.1 *(a)* Actuador de diafragma: cerrado en falla, aire para abrir. *(b)* Actuador de diafragma: abierto en falla, aire para cerrar. (Cortesía de Fisher Controls.)

de 150 psig. Los mejores diseños son de doble acción, con el fin de proporcionar máxima confiabilidad en ambos sentidos.

C-8.3 Actuadores electrohidráulicos y electromecánicos

Dentro de esta familia de actuadores, probablemente el más común es el *de solenoide*. Se puede utilizar una válvula de solenoide para accionar un actuador de pistón de doble acción. Mediante la generación o ruptura de una señal de corriente eléctrica, el solenoide conmuta la salida de una bomba hidráulica para que se conecte a la parte superior o inferior del actuador de pistón. Con esta unidad se obtiene un control preciso sobre la posición de la válvula. Esto requiere potencia eléctrica al motor y una señal eléctrica desde el controlador.

C-8.4 Actuadores manuales con volante

Estos actuadores se utilizan cuando no se requiere control automático. En el mercado existen modelos tanto para vástago recíproco como para vástago rotatorio.

C-9 ACCESORIOS DE LA VÁLVULA DE CONTROL

Existen varios dispositivos que se conocen como accesorios y que generalmente se asocian con las válvulas de control. En esta sección se presenta una breve introducción a algunos de los accesorios más comunes.

C-9.1 Posicionadores

Un posicionador es un dispositivo cuya acción es muy semejante a la de un controlador proporcional con una ganancia muy alta. Su función es comparar la señal del controlador con la posición del vástago de la válvula. Si el vástago no está en la posición que requiere el controlador, con el posicionador se añade o elimina aire de la válvula hasta que se logra la posición

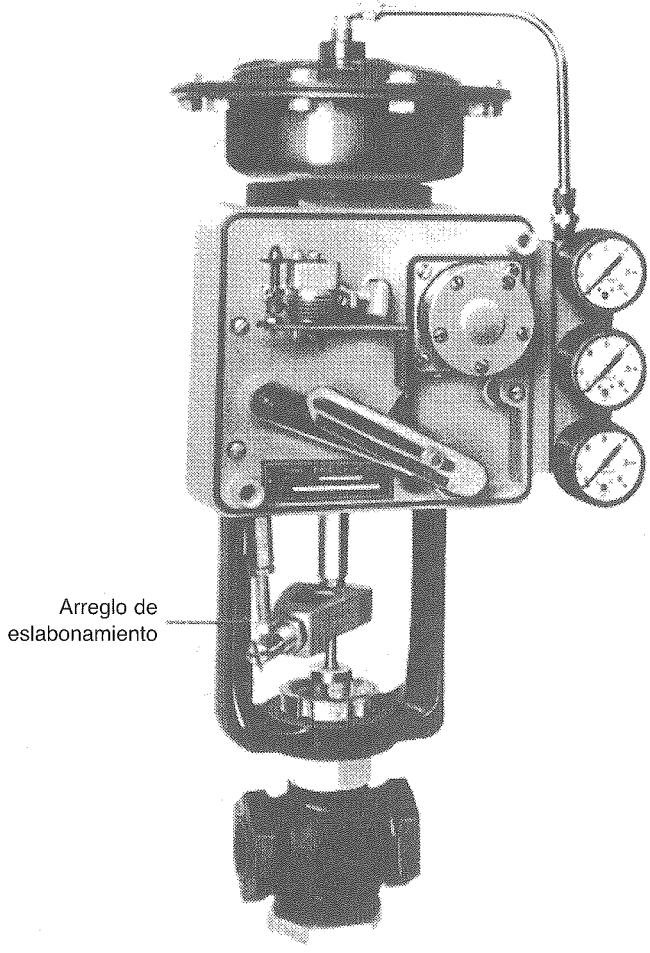


Figura C-9.1 Posicionador instalado en una válvula. (Cortesía de ABB Kent-Taylor.)

correcta. Esto es, cuando es importante posicionar el vástago de la válvula con precisión, normalmente se utiliza un posicionador. En la figura C-9.1 se muestra una válvula con un posicionador. La figura muestra el arreglo de barra de acoplamiento mediante el cual se detecta la posición del vástago en el posicionador. En la figura C-7.3*b* se muestra otro posicionador.

Con la utilización de los posicionadores se tiende a minimizar los efectos de:

1. Retardo en los actuadores de gran capacidad.
2. Fricción del vástago debida a cajas de empaque justas.
3. Fricción debida a fluidos viscosos o pegajosos.
4. Cambios de presión en la línea de proceso.
5. Histéresis.

Algunos lazos de control comunes para los posicionadores son los de nivel de líquido, de temperatura, de concentración y de flujo de gas.

C-9.2 Multiplicadores

Los multiplicadores (*boosters*), que también se conocen como relevadores de aire, se utilizan con los actuadores de las válvulas para acelerar la respuesta de la válvula a un cambio de señal proveniente de un controlador o transductor neumático con baja capacidad de salida. También se debe hacer notar que para los lazos de control de respuesta rápida, tales como los de flujo o presión de líquidos, en los cuales no se indica la utilización de posicionadores, el empleo de multiplicadores puede ser la elección adecuada (referencia bibliográfica 14).

Los multiplicadores tienen otros usos posibles:

1. Amplificación de una señal neumática. Algunas razones de amplificación típicas son 1:2 y 1:3.
2. Reducción de una señal neumática, cuyas razones típicas son 5:1, 3:1 y 2:1.

C-9.3 Interruptores de límite

Estos interruptores se montan a un lado de las válvulas y se disparan mediante la posición del vástago. Con estos interruptores generalmente se manejan alarmas, válvulas de solenoide, luces o cualquier otro dispositivo.

C-10 VÁLVULAS DE CONTROL: CONSIDERACIONES ADICIONALES

En esta sección se presentan varias consideraciones adicionales que se deben tener en cuenta cuando se dimensiona y elige la válvula de control. Por lo tanto, con esta sección se complementa la sección 5-2.

En la figura C-10.1 se muestra un ejemplo de catálogo de un fabricante (Masoneilan). Una vez que se calcula el coeficiente C_v mediante las ecuaciones descritas en el capítulo 5, se utilizan esas cantidades para determinar las dimensiones de la válvula.

20000 Series

ANSI Class 150-600 (Sch. 40)

Nominal Trim Size	½	⅞	¼	¾	1	1½	2	3	4	6	8	10
Orifice Dia. (in.)	.250	.375	.500	.750	.812	1.250	1.625	2.625	3.600	5.000	6.250	8.000

Valve Size (in.)	Reduced Trim			Full Capacity Trim								
½	1.7	3.7	6.4	11								
1	1.7	3.7	6.4	11	12							
1½	1.7	3.8	6.6	12	13	25						
2	1.7	3.8	6.7	13	19*	26	46					
3				14		31	47	110				
4						32	49	113	195			
6							53	126	208	400		
8								133	224	415	640	
10									233	442	648	1000

Orifice Diameter .994 Refer to Bulletin 334E

(*a*)

Figura C-10.1 Ejemplo del catálogo de válvulas Masoneilan. (Cortesía de Masoneilan Division, McGraw-Edison Co.)

C-10.1 Correcciones de viscosidad

La ecuación de dimensionamiento de válvulas presentada en el capítulo 5 no tiene en cuenta el efecto de la viscosidad del líquido al calcular el coeficiente C_v. Para líquidos con la viscosidad cercana a la del agua y de hidrocarburos ligeros, los efectos viscosos en la capacidad de la válvula son despreciables. Sin embargo, para líquidos muy viscosos, los efectos viscosos pueden producir errores de dimensionamiento.

Masoneilan (referencia bibliográfica 15) propone que se calcule un C_v turbulento y un C_v laminar y que se utilice el valor mayor como el C_v requerido:

Flujo turbulento

$$C_v = f\sqrt{\frac{G_f}{\Delta p}} \qquad \textbf{(C-10.1)}$$

Flujo laminar

$$C_v = 0.072\left(\frac{\mu f}{\Delta p}\right)^{2/3} \qquad \textbf{(C-10.2)}$$

donde:

μ = viscosidad, en centipoises.

C-10.2 Vaporización instantánea y cavitación

El hecho de que en la válvula de control exista vaporización instantánea o cavitación, puede tener efectos significativos sobre la operación de la válvula y su dimensionamiento. Es importante comprender el significado e importancia de estos dos fenómenos. En la figura C-10.2 se

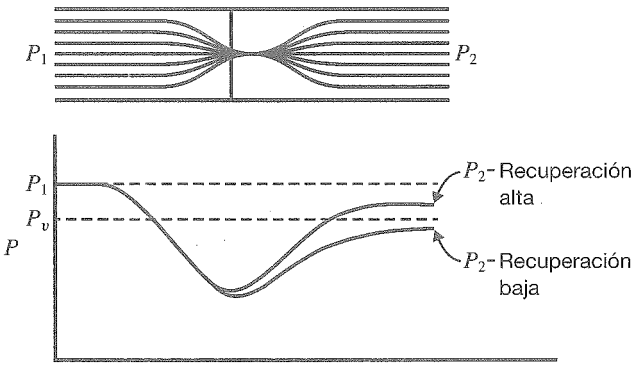


Figura C-10.2 Perfil de la presión de un líquido que pasa a través de un elemento de restricción.

muestra el perfil de presión de un líquido que fluye a través de un elemento restrictivo (posiblemente una válvula de control).

Para mantener el flujo másico en estado estacionario, la velocidad del líquido se debe incrementar conforme disminuye el área de la sección transversal para el flujo. La velocidad máxima del líquido se alcanza en un punto inmediatamente posterior a la sección transversal con menor área (el área de la puerta para la válvula de control). El punto de máxima velocidad se conoce como *vena contracta*. En este punto se tiene también la presión más baja en el líquido. Lo que ocurre es que el incremento de velocidad (energía cinética) se acompaña por una disminución en la "energía de presión". La energía se transforma de una forma a otra.

Cuando el líquido pasa por la vena contracta, el área de flujo se incrementa y la velocidad del flujo disminuye, y entonces se recupera parte de la presión. Las válvulas tales como las de mariposa, de esfera o la mayoría de las válvulas rotatorias tienen una característica de recuperación de presión alta. En cambio, en las válvulas de vástago recíproco esta característica es baja. En las válvulas de vástago recíproco la trayectoria del flujo es más tortuosa que en las válvulas rotatorias.

Ahora, considerando la figura C-10.2 se supone que la presión de vapor del líquido a la temperatura de flujo es P_v. Cuando la presión del líquido cae por abajo de la presión de vapor, parte del líquido empieza a cambiar de la fase líquida a la de vapor. Es decir, el líquido se evapora instantáneamente (flashea); con la vaporización instantánea se pueden producir serios daños por erosión en el oclusor de la válvula y en el asiento.

Además del daño físico que se ocasiona a la válvula, la vaporización instantánea tiende a disminuir la capacidad de flujo en la válvula. Conforme se empiezan a formar burbujas, esto tiende a causar una "condición de obstrucción" en la válvula, con lo cual se limita el flujo. Además, esta condición de obstrucción puede agravarse al grado de ocasionar "bloqueo" del flujo a través de la válvula. Es decir, más allá de esta condición de bloqueo, el incremento en la caída de presión en la válvula no dará por resultado un incremento en el flujo. Es importante reconocer que con la ecuación de dimensionamiento de la válvula, ecuación del capítulo 5, no se describe esta condición. Conforme se incrementa la caída de presión, con la ecuación se predicen tasas de flujo más altas. Esta relación se muestra gráficamente en la figura C-10.3, junto con la condición de bloqueo de flujo.

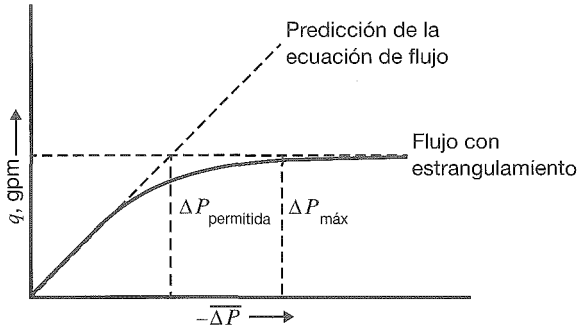


Figura C-10.3 Condiciones de flujo con estrangulamiento.

Por lo que se observa en esta figura, para el ingeniero es importante conocer la caída máxima de presión, $\Delta P_{máx}$, la cual es efectiva para producir el flujo. En vez de proveer una ecuación para $\Delta P_{máx}$, los fabricantes han elegido proveer una ecuación para $\Delta P_{permitida}$ y utilizar este término para indicar cuándo ocurre un bloqueo de flujo. A mayores caídas de presión que $\Delta P_{permitida}$, resulta un bloqueo del flujo. $\Delta P_{permitida}$ no es únicamente una función del flujo sino también del tipo de válvula. Masoneilan (referencia bibliográfica 15) propone la siguiente ecuación:

$$\Delta P_{permitida} = C_f^2 \Delta P_s \qquad \textbf{(C-10.3)}$$

y

$$\Delta P_s = P_1 - \left(0.96 - 0.28\sqrt{\frac{P_v}{P_c}}\right)P_v \qquad \textbf{(C-10.4)}$$

o, si $P_v < 0.5\, P_1$,

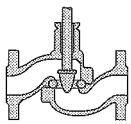
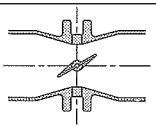
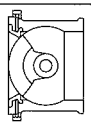
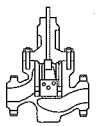
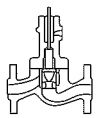
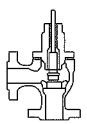
$$\Delta P_s = P_1 - P_v \qquad \textbf{(C-10.5)}$$

donde:

P_v = presión de vapor del líquido, en psia
C_f = factor de flujo crítico (referencia bibliográfica 15)
P_c = presión crítica del líquido, en psia.

El factor de flujo crítico, C_f, se muestra en la figura C-10.4 para diferentes tipos de válvulas. Estos valores son el resultado de pruebas de flujo sobre las válvulas.

Si la recuperación de presión que experimenta el líquido es suficiente como para elevar la presión por arriba de la presión de vapor del líquido, entonces las burbujas de vapor empezarán a colapsar o a implosionar. Esta implosión se conoce como *cavitación*. La energía que se libera durante la cavitación produce ruido, como si fluyera grava a través de la válvula (referencia bibliográfica 14) y lágrimas por fuera del material de la válvula. Ciertamente, en las válvulas de vástago rotatorio, cuya recuperación de presión es alta, se tiende a experimentar cavitación más frecuentemente que en las válvulas de vástago recíproco, las cuales poseen recuperación de presión baja.

Tipo de válvula	Tamaño del ajuste	Flujo hacia	C_f (F_L)	K_c*	C_{fr} ($F_{L,P}$) D/d = 1.5 o mayor	X_T
 Válvulas de globo con cuerpo dividido	A	→ Cerrado	.80	.51	.77	.54
		Abierto ←	.75	.46	.72	.47
	B	→ Cerrado	.80	.52	.80	.54
		Abierto ←	.90	.65	.89	.68
 Serie 37000	A	Flujo en cualquier dirección	.65	.32	.60	.35
 Válvula de control de esfera	A	← Abierto	.60	.24	.55	.30
 Serie balanceada 40000	1½″ – 4″	→ Cerrado	.94	.71	.87	.74
	6″ – 16″	Cerrado →	.92	.68	.89	.71
 Serie no balanceada 40000	A	← Abierto	.90	.65	.79	.68
	B	← Abierto	.90	.65	.86	.68
 Serie 70000	A	→ Cerrado	.81	.53	.78	.55
		Abierto ←	.89	.64	.85	.67
	B	→ Cerrado	.80†	.52†	.80	.54
		Abierto ←	.90	.65	.90	.68

A) Ajuste con capacidad completa, diám. de orificio = .8 del tamaño de la válvula.
B) Ajuste con capacidad reducida a 50% de (A) y menor.
† Con forro de Venturi $C_f = 0.50$, $K_c = 0.19$
Nota: $X_T = 0.84\ C_f^2$

Figura C-10.4 Factor de flujo crítico, C_f, con apertura completa. (Cortesía de Masoneilan Division, McGraw-Edison Co.)

Con las pruebas se ha demostrado que en las válvulas con recuperación de presión baja, como las rotatorias, el bloqueo de flujo y la cavitación se presentan aproximadamente a la misma ΔP y, en consecuencia, las ecuaciones C-10.3 y C-10.6 también se pueden utilizar para calcular la caída de presión a la cual comienza la cavitación. En las válvulas con alta recuperación de presión, la cavitación puede ocurrir a caídas de presión por abajo de $\Delta P_{\text{permitida}}$. Para estos tipos de válvulas, Masoneilan (referencia 15) propone la siguiente ecuación:

$$\Delta P_{\text{cavitación}} = K_c(P_1 - P_v) \qquad \textbf{(C-10.6)}$$

donde:

K_c = coeficiente de cavitación incipiente, el cual se muestra en la figura C-10.4.

Los fabricantes de válvulas producen dispositivos especiales anticavitación con los que se tiende a incrementar el K_c de la válvula y, por lo tanto, la caída de presión a la cual ocurre la cavitación.

C-11 RESUMEN

El objetivo de este breve apéndice es familiarizar al lector con algunos de los instrumentos que se utilizan comúnmente en el control de procesos. Entre la instrumentación que se expone se incluye parte de los instrumentos que se necesitan para medir las variables del proceso (elementos primarios) tales como flujo, temperatura y presión. Se presentaron dos tipos de transmisores y se expusieron sus principios de funcionamiento. Por último, también se presentaron algunos tipos muy comunes de válvulas (elementos finales de control) que se utilizan para ejecutar la acción, junto con sus características de flujo.

En este libro es imposible presentar y abordar todos los detalles que se relacionan con los diferentes tipos de instrumentos; sin embargo, existen manuales muy completos y grandes colecciones de artículos especializados que cumplen este fin. Se remite al lector a la bibliografía que aparece al final de este apéndice. Además de los múltiples tipos de instrumentos de que se dispone en la actualidad, cada mes se introducen al mercado modelos nuevos y mejorados de los elementos primarios, transmisores y elementos finales de control. En el área de elementos primarios constantemente se desarrollan nuevos sensores con los que se pueden medir variables difíciles con más exactitud, más frecuencia y a mayor velocidad, por ejemplo, la concentración.

En el área de transmisores, la palabra clave son los *transmisores inteligentes*. Hoy día, con estos transmisores, en los que se utilizan microprocesadores, se puede llevar la información a los controladores en una forma más comprensible. El área de los elementos finales de control es otra área de investigación en la que existe mucha actividad. No sólo se mejoran continuamente las válvulas neumáticas de control, sino que se están desarrollando y mejorando los actuadores eléctricos para lograr la interconexión con los otros componentes electrónicos, como son controladores y computadoras. También se han mejorado otros elementos finales de control, como los impulsores para bombas y ventiladores de velocidad variable, cuya razón de desarrollo es la conservación de energía. Las limitaciones de espacio no nos permiten tratar a detalle la factibilidad y la justificación de utilizar estos ventiladores y bombas de velocidad variable en

la regulación del flujo, sin embargo el lector puede consultar las referencias bibliográficas 21, 22, 23 y 24 para estudiar este tema.

En los últimos párrafos, el lector se dará cuenta de que se está llevando a cabo una gran cantidad de investigación, principalmente por parte de los fabricantes del área de instrumentación, la cual con toda seguridad tendrá como resultado mejores elementos de control y medición. Ésta es una de las razones que explican por qué el control de procesos es un campo muy dinámico.

REFERENCIAS

1. Ryan, J. B., "Pressure Control," *Chemical Engineering.*
2. Liptak, Bela G., ed., *Instrument Engineers' Handbook, Volume 1, Process Measurement,* Nueva York: Chilton.
3. Perry, R., y D. W. Green, *Perry's Chemical Engineering Handbook,* sexta edición, Nueva York: McGraw-Hill.
4. Considine, D. M., ed., *Handbook of Instrumentation and Controls.* Nueva York: McGraw-Hill.
5. Smith, C. L., "Liquid Measurement Technology." *Chemical Engineering.*
6. Zientara, Dennis E., "Measuring Process Variables." *Chemical Engineering.*
7. Kern, R., "How to Size Flowmeters," *Chemical Engineering.*
8. *Handbook Flowmeter Orifice Sizing,* Handbook No. 10B9000, Warminster, PA: Fischer Porter Co.
9. Spink, L. K., *Principles and Practice of Flow Meter Engineering.* Foxboro, MA: The Foxboro Co.
10. Kern, R., "Measuring Flow in Pipes with Orifices and Nozzles." *Chemical Engineering.*
11. Wallace, L. M., "Sighting in on Level Instruments." *Chemical Engineering.*
12. Process Control Instrumentation, Foxboro, MA: The Foxboro Co. Publication 105A-15M-4/71.
13. Taylor Instrument Co., *Differential Pressure Transmitter Manual, 1B-12B215.*
14. *Control Valve Handbook,* Marshalltown, Iowa: Fisher Controls Co.
15. *Masoneilan Handbook for Control Valve Sizing* Norwood, MA: Masoneilan International, Inc.
16. *Fisher Catalog 10,* Marshalltown, Iowa: Fisher Controls Co.
17. Casey, J. A., y D. Hammitt, "How to Select Liquid Flow Control Valves", *Chemical Engineering.*
18. Chalfin, S., "Specifying Control Valves," *Chemical Engineering.*
19. Kern, R., "Control Valves in Process Plants," *Chemical Engineering.*
20. Hutchison, J. W., ed., *ISA Handbook of Control Valves*, Research Triangle Park, NC: Instrument Society of America.
21. Fischer, K. A., y D. J. Leigh, "Using Pumps for Flow Control." *Instruments and Control Systems.*
22. Jarc, D. A., y J. D. Robechek, "Control Pumps with Adjustable Speed Motors Save Energy." *Instruments and Control Systems.*
23. Pritchett, D. H., "Energy-Efficient Pump Drive," *Chemical Engineering Progress.*

24. Baumann, H. D., "Control Valve vs. Variable-Speed Pump." *Chemical Engineering.*
25. Utterback, V. C., "Online Process Analyzers," *Chemical Engineering.*
26. Foster, R. "Guideline for Selecting Outline Process Analyzers." *Chemical Engineering.*
27. Ottmers, D. M., *et al.,* "Instruments for Environment Monitoring." *Chemical Engineering.*
28. Creason, S. C., "Selection and Care of pH Electrodes." *Chemical Engineering.*
29. Young, A. M., "Coriolis-Based Mass Flow Measurement." *Sensors.*
30. Dahlin, E., y A. Franci, *Practical Applications of a New Coriolis Mass Flowmeter. Presented at Control Expo* '85, Control and Engineering Conference and Exposition, Rosemont, IL.

Apéndice D

Sintonización: estudios de caso

Este apéndice describe siete procesos que se presentan en el sitio web del libro como ejercicios de práctica. El proceso 1, Regenerador-Control por retroalimentación, se usa para practicar la sintonización de controladores por retroalimentación (capítulo 7); el proceso 2, Regenerador-Control en cascada, es el mismo que el proceso del Regenerador, pero ahora se utiliza para practicar la sintonización de un esquema de control en cascada de dos niveles (capítulo 9); el proceso 3, Proceso de secado de papel, también se utiliza para practicar la sintonización de un esquema de control en cascada de dos niveles (capítulo 9); el proceso 4, Absorbedor de HCL, se utiliza para practicar la sintonización de controladores por retroalimentación (capítulo 7) y diseñar controladores feedforward (capítulo 11); el proceso 5, Proceso de mezclado, se utiliza para sintonizar un controlador por retroalimentación (capítulo 7); el proceso 6, Reactor, se utiliza para practicar la selección de la mejor pareja en dos variables controladas, con dos variables manipuladas de proceso (capítulo 12); y el proceso 7, Proceso de destilación, se utiliza para practicar la sintonización de controladores y diseñar un desacoplador para procesos MIMO interactivos (capítulo 12).

Como se señaló en el cuerpo del texto, es necesario obtener información de los procesos para sintonizar controladores, diseñar controladores feedforward y decidir sobre la mejor forma de parear las variables controladas. La información necesaria se encuentra en forma de respuesta del proceso ante un cambio escalón de una señal de entrada desde el controlador, y ésta se utiliza para modelar el proceso como un modelo de primer orden más tiempo muerto; todo esto se presenta con más detalle en el capítulo 7. Desafortunadamente, no existe una grabadora que permita registrar las variables de proceso en los procesos presentados en este apéndice. Por lo tanto, el lector debe generar una tabla con la información del tiempo *versus* la variable de proceso y graficar estos datos. Se recomienda hacer el registro de la variable de proceso cada cinco segundos. Debe observarse la variable hasta que ésta alcance el valor de estado estacionario nuevamente. Para generar el cambio escalón en la salida del controlador, se hace doble clic sobre el número que indica la salida, se escribe el nuevo valor deseado y luego se presiona *enter* en el teclado. Las gráficas presentadas en cada proceso pueden reordenarse fácilmente haciendo doble clic sobre los valores numéricos bajo y alto de la escala en el eje y, y escribiendo sobre éstos los nuevos valores.

El programa empleado para desarrollar los procesos es Labview, un producto de National Instruments. Los autores están en deuda con el Dr. Marco E. Sanjuan y el Dr. Daniel Palomares (q.e.p.d) por su trabajo en el desarrollo de este apéndice.

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

PROCESO 1. REGENERADOR—CONTROL POR RETROALIMENTACIÓN

En una reacción de hidrocarburos se utiliza un catalizador. A medida que la reacción avanza, algo de carbono se deposita sobre el catalizador, degradándolo. Cuando se ha depositado suficiente cantidad de carbono el catalizador se degrada completamente. En este momento se hace necesario detener la reacción para regenerar el catalizador. Esta regeneración consiste en soplar aire caliente sobre el catalizador para que el oxígeno presente en el aire reaccione con el carbono para formar dióxido de carbono, y de esta manera quema el carbono. La figura D-1 muestra el proceso de regeneración. El aire tomado del ambiente se calienta primero en un horno pequeño y luego fluye hacia el regenerador, el cual se encuentra lleno de catalizador. Manipulando el flujo de combustible que calienta al aire se controla la temperatura en el lecho del catalizador.

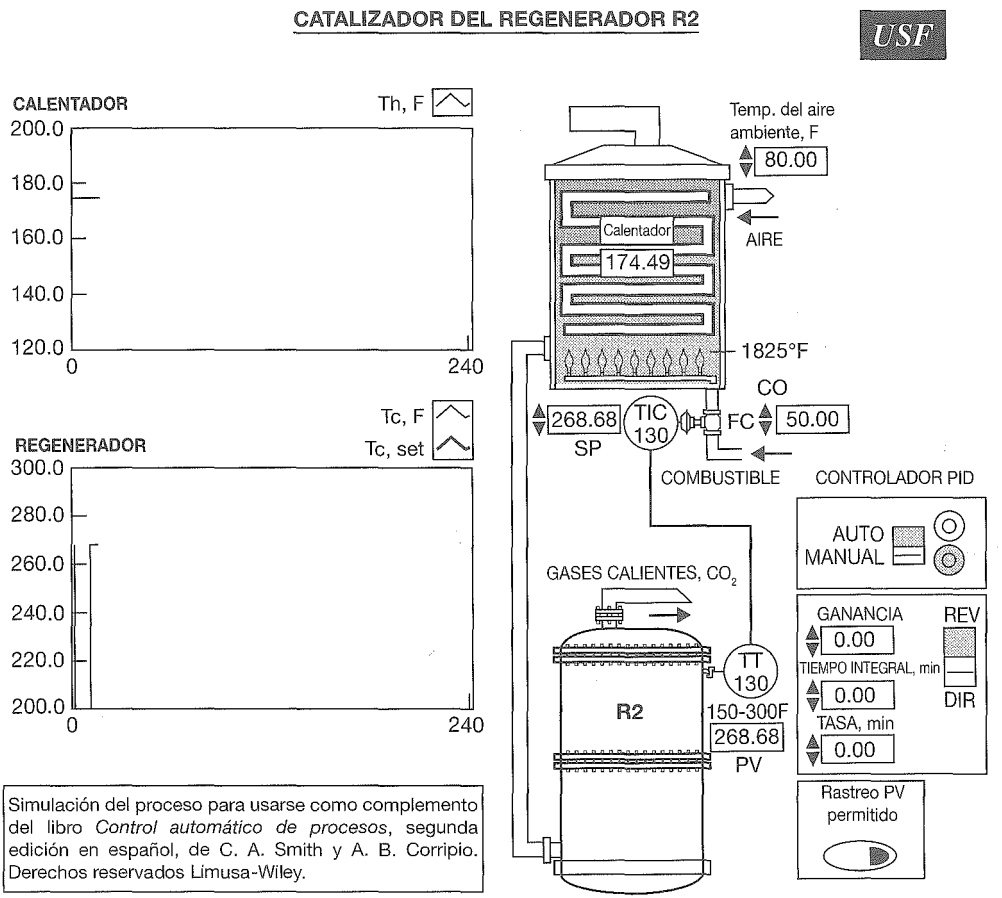


Figura D-1 Catalizador del regenerador—control por retroalimentación.

Para sintonizar el controlador por retroalimentación, esto es, para hallar los valores de K_C, τ_I y τ_D, primero se debe encontrar las características del proceso, o sea, la ganancia del proceso (K), la constante de tiempo (τ) y el tiempo muerto (t_0). El capítulo 7 explica que para obtener las características del proceso es necesaria una curva de reacción del proceso. Para obtener esta curva, se debe introducir primero un cambio escalón en la salida del controlador y registrar la temperatura en el regenerador. Desafortunadamente, no existe un dispositivo que permita registrar esta temperatura. Por tanto, debe generarse una tabla con la información del tiempo contra temperatura y graficar estos datos. Se recomienda hacer el registro de la temperatura cada cinco segundos. Se debe observar la temperatura hasta que alcance el valor de estado estacionario nuevamente. Para generar el cambio escalón en la salida del controlador, se hace doble clic sobre el número que indica la salida, se escribe el nuevo valor deseado y luego se presiona *enter* en el teclado. Tal vez el lector necesite leer de nuevo el capítulo 7 para revisar la prueba del proceso.

Una vez que se obtengan las características del proceso y se sintonice el controlador utilizando las fórmulas del capítulo 7, entonces puede probarse la sintonización cambiando la referencia, o introduciendo una perturbación. La temperatura del aire que entra al horno puede modificarse para introducir una perturbación. Se recomienda cambiar esta temperatura de entrada y registrar la desviación más grande de la referencia. El proceso 2 se usa para implementar un esquema de control en cascada en el mismo regenerador, y entonces pueden compararse los rendimientos del control dados por los controles en cascada y por retroalimentación.

PROCESO 2. REGENERADOR—CONTROL EN CASCADA

Se implementa ahora un sistema de control en cascada en el mismo regenerador. La variable primaria sigue siendo la temperatura en el regenerador y la variable secundaria es la temperatura del aire que sale del horno; el controlador secundario manipula la válvula de combustible. La figura D-2 ilustra el proceso.

En el capítulo 9 se explica cómo sintonizar controladores en cascada. El primer paso consiste en obtener una curva de reacción del proceso para la variable secundaria y para la variable primaria. Ambas curvas son generadas por el mismo cambio escalón en la salida del controlador secundario; éste es el controlador conectado a la válvula. En este momento será necesario generar dos tablas: la temperatura en el generador (variable primaria controlada) contra el tiempo, y la temperatura que sale del horno (variable secundaria controlada) contra el tiempo. Recuérdese que al tomar los datos se deben leer las variables cada 5 segundos después de cambiar la salida del controlador. De la gráfica de temperatura del regenerador contra el tiempo se obtiene K_1, τ_1 y t_{01}, y de la gráfica de la temperatura que sale del horno contra el tiempo se obtiene K_2, τ_2 y t_{02}. Utilizando el segundo conjunto de términos, el controlador secundario puede sintonizarse como un controlador por retroalimentación simple. Usando todos los términos y la sintonización del controlador secundario, el controlador primario se sintoniza empleando las fórmulas obtenidas en el capítulo 9. Una vez sintonizados ambos controladores, debe probarse primero el controlador secundario para asegurarse de que funciona correctamente; es posible ajustar el controlador en modo automático (no en cascada) para probarlo. Una vez que se ha hecho esto, se ajusta el controlador secundario en cascada (referencia remota) y el controlador primario en modo automático. Nótense los modos de los controladores. A TIC 130 no se le permite estar en modo automático a menos que TIC 100 se encuentre en cascada; éste es el modo de operación correcto porque el controlador primario no

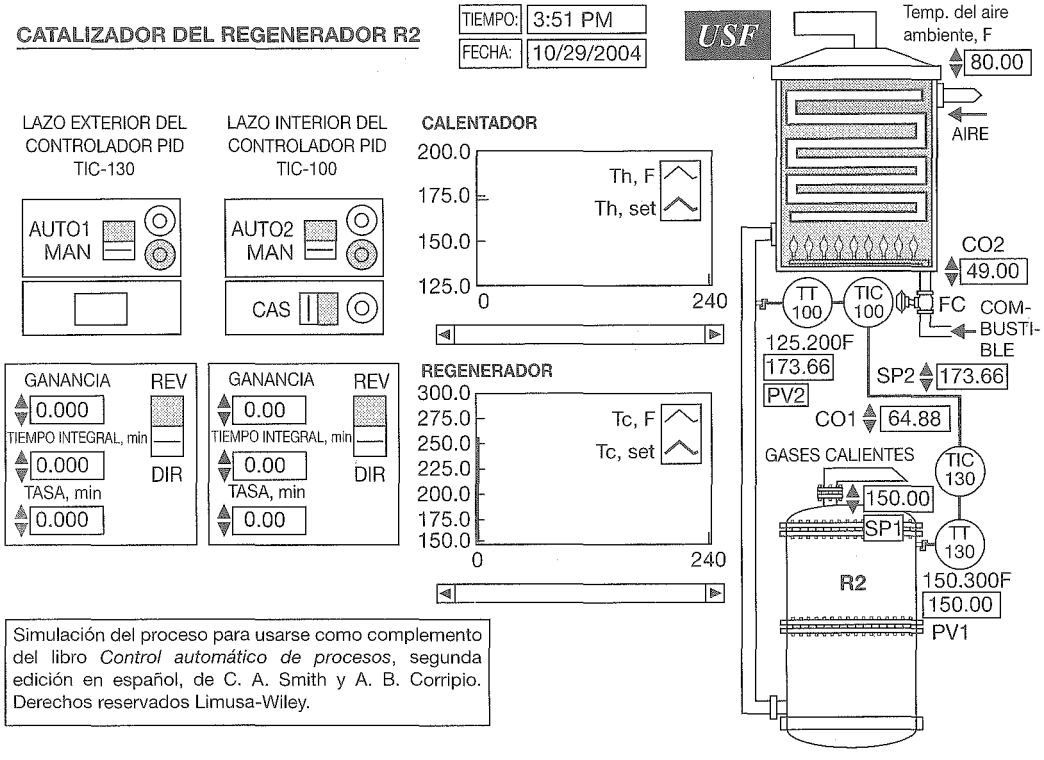


Figura D-2 Catalizador del regenerador—control en cascada.

debe estar en modo automático a menos que el controlador secundario se encuentre listo para recibir y seguir la señal. Nótese también que cuando TIC 100 se encuentra en modo automático y en cascada el TIC 130 es forzado a estar en modo automático. Finalmente, nótese que (a) cuando TIC 100 está en modo automático (no en cascada) y su referencia cambia, la salida de TIC 130 es forzada a cambiar para seguir la nueva referencia (seguimiento de salida), y (b) cuando TIC 130 está en modo manual su referencia sigue la variable de proceso (seguimiento de la referencia). Como se presentó en el capítulo 9, estas opciones de seguimiento permiten una transferencia de modo manual a automático completamente sin sobresaltos.

Una buena prueba consiste en realizar un cambio en la temperatura de aire de entrada al horno y registrar la desviación más grande de la referencia. Se puede entonces comparar esta desviación con la obtenida bajo el controlador por retroalimentación simple.

PROCESO 3. PROCESO DE SECADO DE PAPEL

La figura D-3 ilustra el esquema de un proceso para secar papel. El papel húmedo entra a la unidad de secado donde se seca haciéndole pasar aire caliente. El aire del ambiente se calienta en un horno

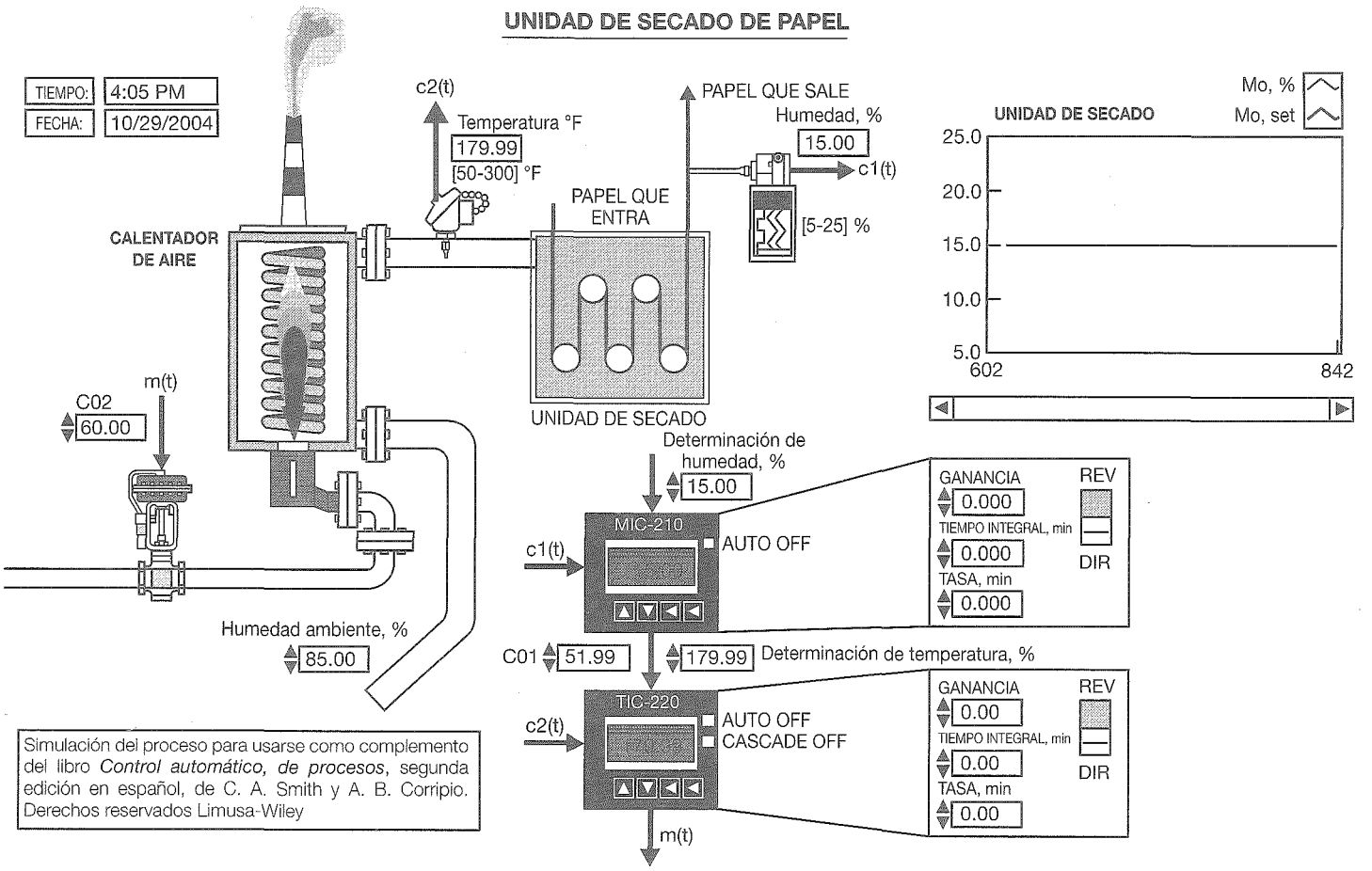


Figura D-3 Proceso de secado de papel.

donde el combustible y el aire se queman para obtener energía; desde el horno el aire entra al secador. La humedad de salida del papel es la variable controlada; un esquema de control en cascada controla esta humedad. La variable secundaria es la temperatura del aire secante que sale del horno. El controlador de humedad, MIC 210, manipula la referencia del controlador de temperatura, TIC 220, el cual se encarga de manipular la válvula de combustible en falla abierta. La perturbación principal en la operación es la humedad del aire ambiente que entra al horno.

En el capítulo 9 se describe cómo sintonizar los controladores en cascada. El primer paso es obtener una curva de reacción de proceso para la variable secundaria y una curva de reacción de proceso para la variable primaria. Ambas curvas son generadas por el mismo cambio escalón en la salida del controlador secundario; éste es el controlador conectado a la válvula. En este momento se generarán dos tablas, la humedad del papel que sale (variable primaria controlada) contra tiempo, y la temperatura que sale del horno (variable secundaria controlada) contra tiempo. Recuérdese que al tomar los datos se deben leer las variables cada 5 segundos después de hacer el cambio en la salida del controlador. De la gráfica de humedad del papel saliente contra el tiempo se obtiene K_1, τ_1 y t_{01}, y de la gráfica de temperatura que sale del horno contra el tiempo se obtiene K_2, τ_2 y t_{02}, Usando el segundo conjunto de términos, el controlador secundario puede sintonizarse como un controlador por retroalimentación simple. Utilizando todos los términos y la sintonización del controlador secundario, el controlador primario se sintoniza empleando las fórmulas obtenidas en el capítulo 9. Una vez que se han sintonizado ambos controladores, debe probarse primero el controlador secundario sólo para asegurarse de que funciona correctamente; se puede ajustar este controlador en "AUTO ON" y "CASCADE OFF" para probarlo. Una vez que se ha hecho esto, se puede ajustar el controlador secundario en "CASCADE ON". Nótense los modos de los controladores. Al MIC 210 no se le permite pasar a modo automático hasta que TIC 220 se encuentre en cascada; ésta es la operación correcta debido a que, como se señala en el capítulo 9, el controlador primario debe estar en modo automático únicamente cuando el controlador secundario esté listo para recibir y seguir la señal. Nótese también que cuando TIC 220 esté en "AUTO ON" y "CASCADE ON" el MIC 210 es forzado a estar en modo automático (AUTO ON). Finalmente, nótese que (a) cuando el TIC 220 está en modo automático (no en cascada) y su referencia cambia, la salida del MIC 210 es forzada a cambiar para seguir la nueva referencia (seguimiento de salida), y (b) cuando el MIC 210 está en modo manual (AUTO OFF) su referencia sigue la variable de proceso (seguimiento de la referencia). Como se establece en el capítulo 9, estas opciones de seguimiento de pasar del modo manual a automático permiten una transferencia completamente sin sobresaltos.

PROCESO 4. ABSORBEDOR DE HCl

El proceso ilustrado en la figura D-4 se usa para practicar la sintonización de un controlador por retroalimentación y el diseño de un controlador feedforward. El proceso consiste en una torre para absorber ácido clorhídrico (HCl) del aire utilizando una solución de NaOH. El analizador-transmisor en la corriente de gases que sale del absorbedor tiene un rango de 25 a 150 ppm. La mezcla de aire-HCl es alimentada hacia el absorbedor mediante tres ventiladores. El ventilador 1 entrega 50 cfm y los ventiladores 2 y 3 entregan 25 cfm cada uno. Estos ventiladores se encienden/apagan simplemente haciendo clic sobre el interruptor de cada uno.

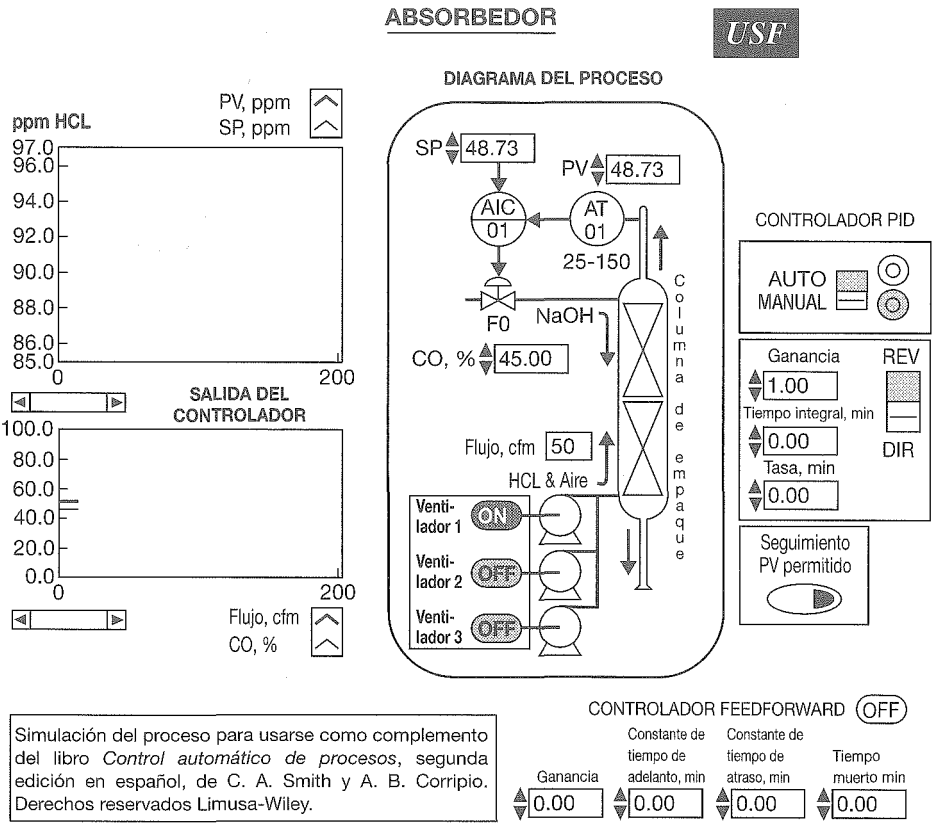


Figura D-4 Absorbedor.

La gráfica superior muestra la referencia (SP) y las ppm de los gases de salida (PV). La gráfica inferior muestra la salida del controlador y el flujo de alimentación al absorbedor.

Cómo sintonizar el controlador por retroalimentación

Para sintonizar el controlador por retroalimentación, esto es, para encontrar los valores de K_C, τ_I y τ_D, primero se deben encontrar las características del proceso, es decir, la ganancia del proceso (K), la constante de tiempo (τ) y el tiempo muerto (t_0). En el capítulo 7 se explica que para obtener las características del proceso se necesita una curva de reacción del proceso. Como se explica en ese capítulo, para obtener esta curva se debe introducir primero un cambio escalón en la salida del controlador y registrar las ppm de HCl que salen del absorbedor. Desafortunadamente, no existe un dispositivo que permita registrar las ppm. Por tanto, se debe generar una tabla con la información del tiempo contra ppm y graficar estos datos. Se recomienda hacer el registro de ppm cada cinco segundos. Se debe observar esta variable hasta que alcance el valor de estado estacionario nuevamente. Para generar el cambio escalón en la salida del controlador, se hace doble clic sobre el

número que indica la salida, se escribe el nuevo valor deseado y luego se presiona la tecla *enter*. Tal vez sea necesario leer de nuevo el capítulo 7 para revisar la prueba del proceso.

Una vez que se obtienen las características del proceso y se sintoniza el controlador, utilizando las fórmulas del capítulo 7, entonces puede aprobarse la sintonización cambiando la referencia, o bien, introduciendo una perturbación mediante el encendido o apagado de algún ventilador.

Diseño del controlador feedforward

Se sabe bien que en este absorbedor el flujo de entrada puede variar bastante y muy seguido. Es decir, es muy común tener un ventilador encendido, por ejemplo, el ventilador 2, con un flujo de 25 cfm, y repentinamente los otros dos ventiladores se encienden para obtener un flujo de entrada total de 100 cfm. Cuando esto ocurre, la salida de HCl se incrementará hasta que el controlador por retroalimentación pueda compensarlo agregando más NaOH para que el contenido de HCl vuelva al valor de referencia. Hay que asegurarse de que las ppm de HCl no violen las regulaciones de calidad ambiental. Por lo tanto, en su operación normal, la referencia del controlador debe ajustarse lo suficientemente baja para estar seguros que permanecemos dentro de los parámetros de la regulación en la peor condición de operación. Si bien es cierto que un valor bajo de la referencia garantiza que no se viole la regularización durante cualquier condición de operación adversa, también significa costos extra durante la operación normal debido a que se requiere un flujo extra de NaOH. Si pudiera contarse con un control más estricto y una menor desviación de la referencia durante condiciones adversas, entonces se podría elevar el valor de la referencia y, así, economizar una porción del NaOH adicional.

El control feedforward puede proveer ese control más estricto. La idea es medir el flujo que entra a la torre de lavado, y si este flujo cambia, se manipula la válvula de NaOH. Esto es, no esperar a que se produzca una desviación del HCl para ejercer una acción. Existe un sensor-transmisor de flujo con un rango de 0-100 cfm que mide el flujo de entrada al absorbedor.

En el capítulo 11 se explica que una forma de diseñar un controlador feedforward es usar una función de transferencia de primer orden más tiempo muerto (K, τ y t_0) que describa cómo afecta la perturbación (la alimentación hacia el absorbedor, en este caso) la variable controlada (las ppm de HCl de salida, en este caso), y otra función de transferencia de primer orden más tiempo muerto que describa cómo afecta la variable manipulada (la salida del controlador por retroalimentación) la variable controlada. La primera función de transferencia se obtiene con hacer clic en el botón de encendido/apagado de alguno de los ventiladores para generar un cambio en el flujo de entrada, registrar (cada 5 s) las ppm de HCl, graficar la curva de respuesta y utilizar el método de ajuste 3 descrito en el capítulo 7. La segunda función de transferencia se obtuvo para sintonizar el controlador por retroalimentación. Una vez que se obtienen las dos funciones de transferencia se utiliza la ecuación 11-2.5 para sintonizar el controlador feedforward.

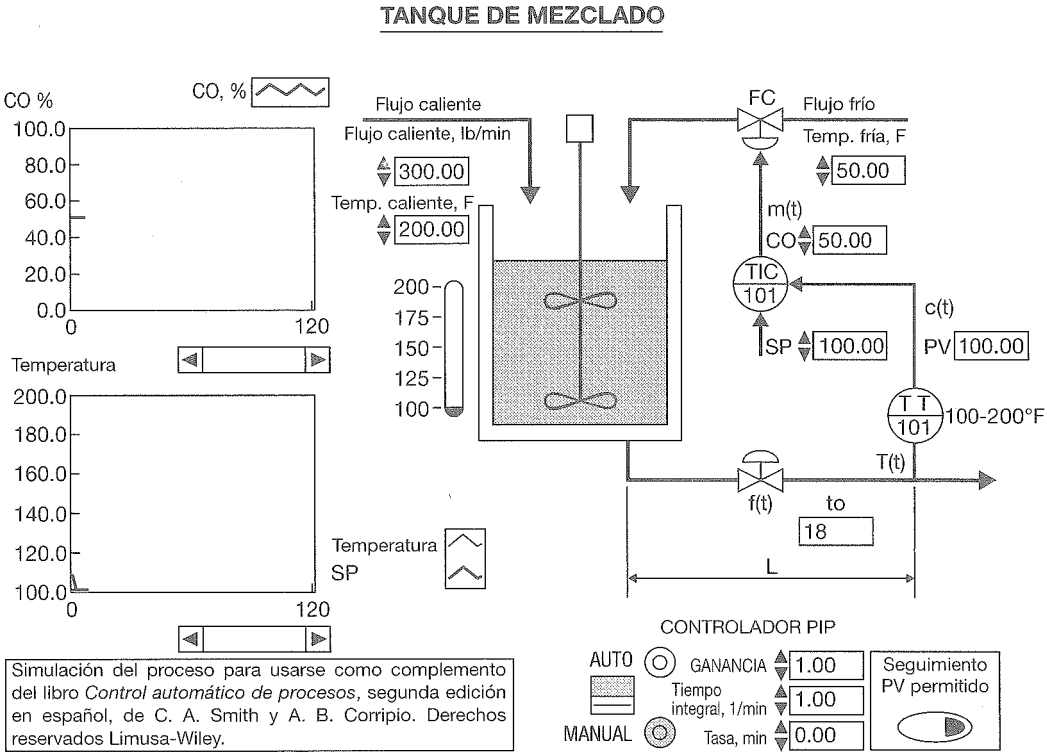
Una vez que se ha diseñado el controlador feedforward se procede a ponerlo a prueba. Se recomienda que la prueba se realice de la siguiente manera. Primero, utilizando únicamente el control por retroalimentación, se enciende o apaga uno de los ventiladores y se usa el desempeño del controlador como base de comparación para evaluar el desempeño del control feedforward. Entonces, usando únicamente la compensación de estado estacionario del controlador feedforward con compensación de retroalimentación, se genera la misma perturbación y se compara contra los resultados obtenidos con el controlador por retroalimentación. Repítase, pero esta vez agregando

la unidad de adelanto-atraso. Finalmente, se hace lo mismo agregando el compensador de tiempo muerto si es necesario.

PROCESO 5. PROCESO DE MEZCLADO

La figura D-5 presenta el esquema de un tanque donde se mezcla agua fría con agua caliente. La válvula instalada en la tubería de agua fría se manipula para controlar la temperatura del agua que pasa por el tubo de salida. Asúmase que un controlador de nivel (no se muestra) mantiene un control de nivel perfecto. El flujo y la temperatura del agua caliente y la temperatura del agua fría actúan como perturbaciones del proceso.

Sintonizar un controlador por retroalimentación con el método presentado en el capítulo 7 y utilizarlo en los otros procesos. No ignorar las unidades de tiempo integral. Una perturbación importante es el flujo de agua caliente. Una vez que el controlador de temperatura se sintoniza, empezar a disminuir el flujo de agua caliente a 25 lbm/min y observar el rendimiento del controlador.



Simulación del proceso para usarse como complemento del libro *Control automático de procesos*, segunda edición en español, de C. A. Smith y A. B. Corripio. Derechos reservados Limusa-Wiley.

Figura D-5 Proceso de mezclado.

PROCESO 6. PROCESO DEL REACTOR

La figura D-6 ilustra un reactor donde tiene lugar la reacción endotérmica R + agua → B. La concentración y la temperatura de salida del producto B deben controlarse; la figura muestra los transmisores y sus rangos. Las variables manipuladas son la válvula de vapor y la válvula de agua. Supóngase que el nivel en el reactor está bien controlado. Siguiendo el análisis del capítulo 12, hay que elegir la mejor forma de parear las variables controlada-manipulada para este proceso.

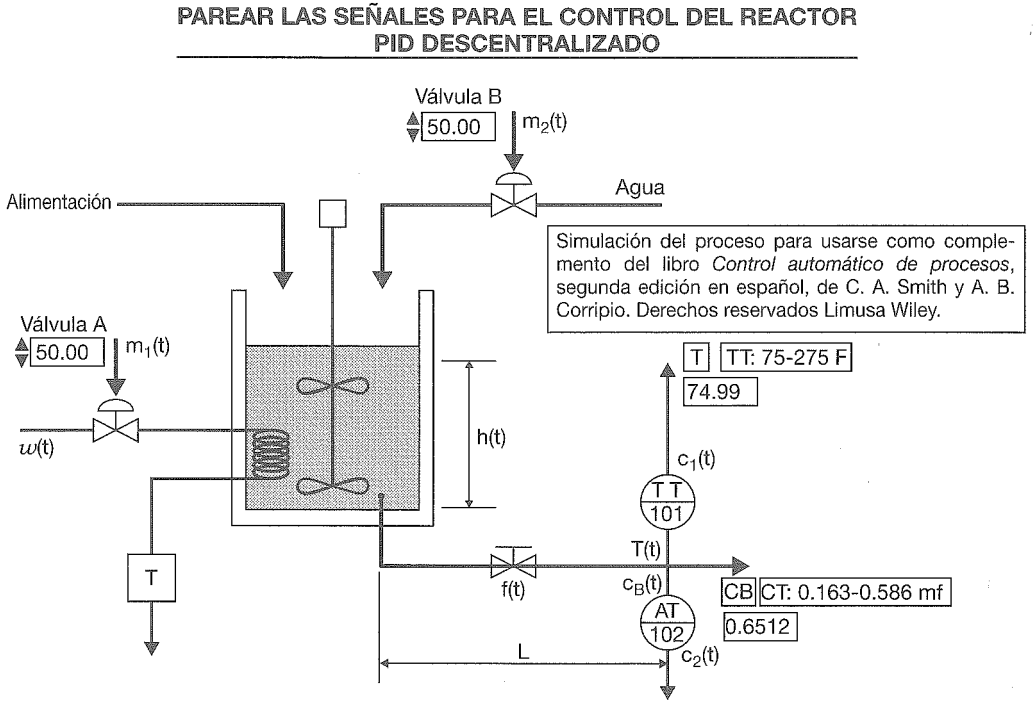
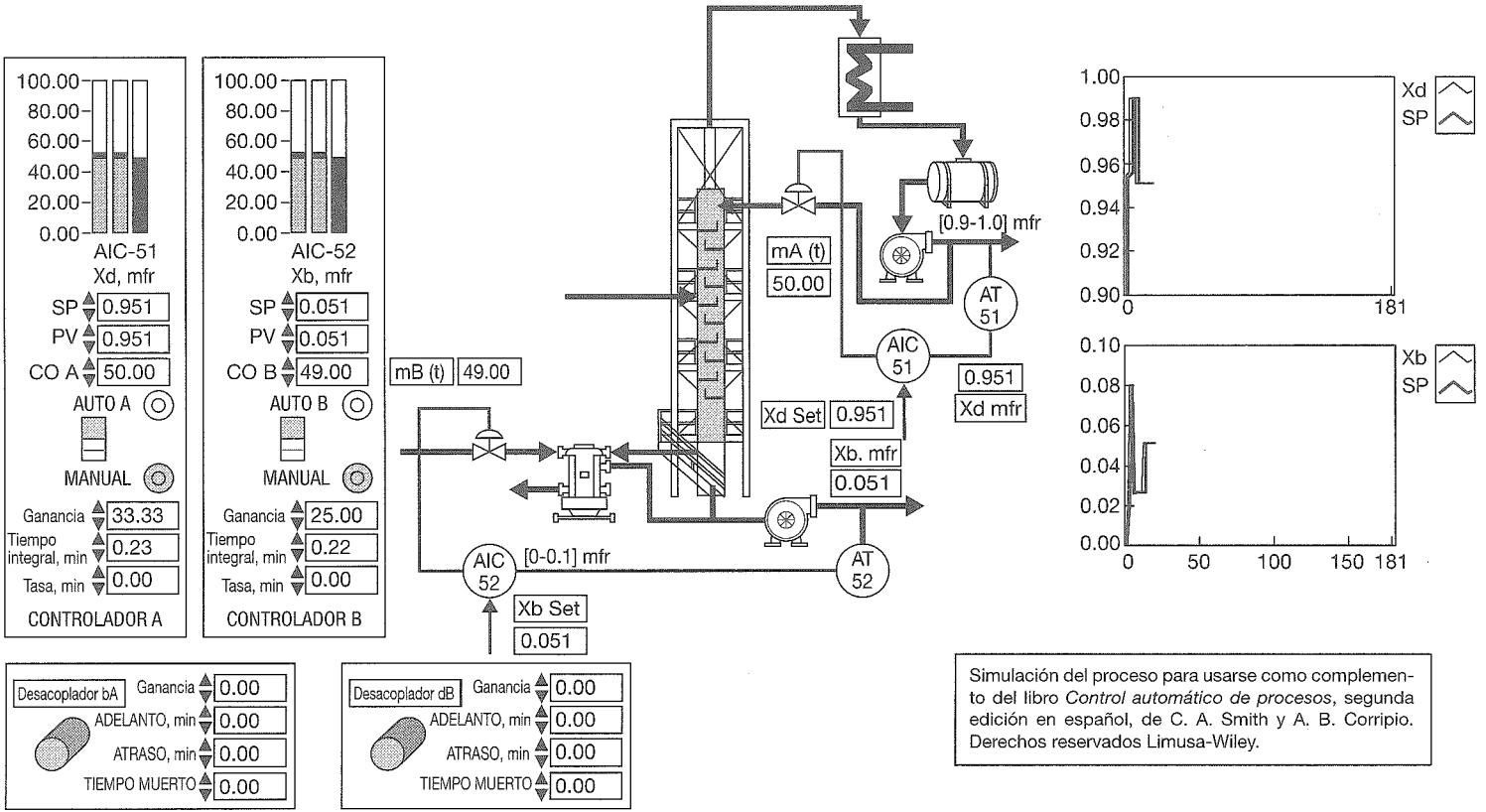


Figura D-6 Proceso del reactor.

PROCESO 7. PROCESO DE DESTILACIÓN

La figura D-7 ilustra una columna de destilación en donde se desea controlar la concentración del componente ligero en el destilado, Xd en fracción másica, y en el fondo, Xb también como fracción másica. Como se ilustra en la figura, al manipular la válvula de reflujo se controla Xd, y al manipular el flujo de vapor que va hacia el recalentador se controla Xb. Con base en el capítulo 12, sintonizar ambos controladores y diseñar e implementar un sistema desacoplador. Como prueba, cambiar el valor de referencia de uno de los controladores y probar la respuesta con y sin el desacoplador.



Simulación del proceso para usarse como complemento del libro *Control automático de procesos*, segunda edición en español, de C. A. Smith y A. B. Corripio. Derechos reservados Limusa-Wiley.

Figura D-7 Proceso de destilación.

Apéndice E

Estudio de casos operativos

En este apéndice se presentan cinco casos que integran los contenidos presentados en los capítulos 5, 6 y 7. Éstos fueron escritos para recrear posibles situaciones industriales que un ingeniero novato puede enfrentar. Estos casos son una contribución del Dr. Marco E. Sanjuan, de la Universidad del Norte en Barranquilla, Colombia.

ESTUDIO DE CASO OPERATIVO 1: ABSORBEDOR DE HCl

Usted ha sido contratado como consultor para mejorar el sistema de control de una unidad de tratamiento de aire. La unidad es una torre absorbedora donde debe reducirse la concentración de HCl en el aire antes de arrojar el aire hacia el ambiente. La figura E-1 ilustra este absorbedor. Se emplea una solución de NaOH como medio absorbente. La perturbación principal del proceso es el flujo de aire que entra al absorbedor; tres ventiladores proporcionan este flujo. Cuando el flujo de aire se incrementa, también se incrementa la concentración de HCl en la corriente de salida. El sistema de control debe responder ante esta perturbación y a los cambios en la referencia. Usualmente el valor de referencia es de 95 ppm. Por encima de este valor se violan las regulaciones federales (de hecho, el valor máximo permitido es de 98 ppm); por abajo de este valor se estará desperdiciando NaOH.

El transmisor usado (AT46) tiene un rango de 25 a 150 ppm y una constante de tiempo de 0.4 min. El sensor tiene un comportamiento lineal inverso; esto es, cuando la concentración se incrementa la señal decrece, o 0 %TO = 150 ppm. La válvula de control es lineal abierta en falla. El flujo aportado por el ventilador 1 es 50 cfm, y los ventiladores 2 y 3 proporcionan 25 cfm cada uno; habitualmente el ventilador 1 es el que se encuentra encendido.

En la planta usted conoce al ingeniero de control, Richard; a la ingeniera de la planta, Karen, y al operador, Chris. Karen le dice que el controlador ha estado en modo manual desde la última semana debido a que los parámetros de sintonización que calculó Richard no funcionan para nada; estos valores son $K_c = 2.8$, $\tau_I = 4.8$ min, *acción inversa* (sintonización 1).

Chris señala que ha estado intentando cambiar un poco los valores pero sin suerte. Karen sugirió eliminar el modo integral, utilizando únicamente $K_c = 2.8$, pero esto tampoco funcionó. Los valores actuales son $K_c = 2.5$, *acción directa* (sintonización 2).

Smith, C. A., y Corripio, A. B., *Control automático de procesos. Teoría y práctica*, segunda edición en español, Copyright. Limusa-Wiley, México.

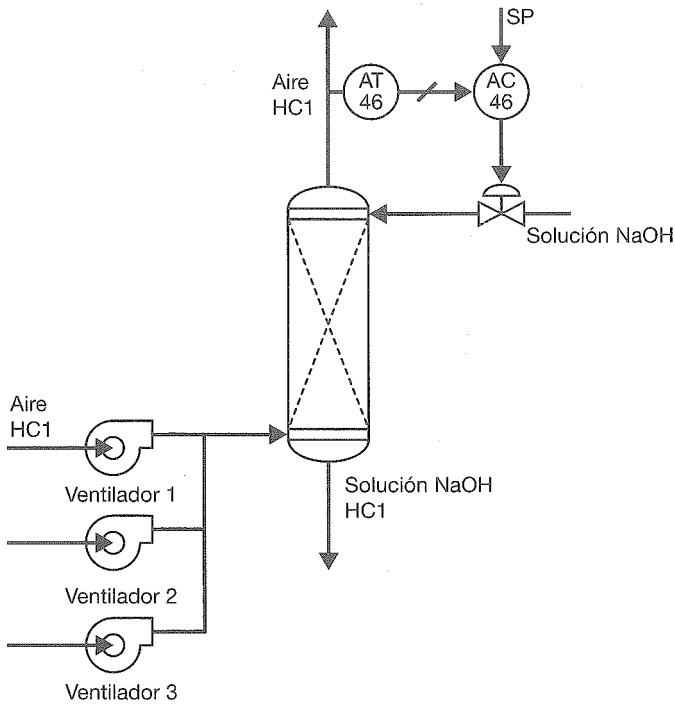


Figura E-1 Proceso del estudio del caso operativo 1.

Richard parece tranquilo y no dice una sola palabra. Luego de un rato él le solicita conversar en privado. Una vez solos, él le dice, *"Estoy muy seguro de los cálculos que hice. Yo creo que Chris no quiere que los controladores funcionen porque tiene miedo de perder su empleo"*. Y continúa, *"Por otra parte, Karen es una ingeniera de la vieja escuela quien piensa que los seres humanos son más confiables que las máquinas, así que si no funciona es porque el controlador no es el apropiado para esta tarea"*.

(a) Usted percibe una atmósfera tensa y no es exactamente porque hay un exceso de ppm de HCl. Algo o alguien está equivocado. Pero usted necesita más información. Si nadie está saboteando el sistema y el controlador está en buen estado, puede especular ¿por qué los diferentes parámetros de sintonización no han funcionado?

Usted decide citar a Karen, a Chris y a Richard para una reunión. En ese momento decide poner a prueba una estrategia. Cuando todos se encuentran presentes usted empieza a hacer las preguntas. *"Voy a necesitar la ayuda de todos para poder resolver el problema. Antes que nada, ¿por qué se necesita un controlador? ¿Por qué no simplemente establecen un valor fijo de flujo de aire para la solución de lavado de NaOH?"*

"Yo puedo ayudar", dice Karen. *"Inicialmente, nosotros acostumbrábamos cambiar el valor de la referencia cada vez que se contrataba un nuevo encargado. Ya sabe, a algunos les preocupaba el ambiente, otros simplemente lo ignoraban. Ahora, con las nuevas regulaciones*

ambientales, yo no creo que esto vaya a cambiar por un largo rato. Sin embargo, algunas veces debemos evacuar más aire (con HCl) de la planta y es en ese momento cuando empiezan a funcionar los ventiladores (2 y 3). De hecho, nosotros no controlamos su encendido, alguien en las otras unidades lo hace. En esos casos las ppm pueden aumentar demasiado, así que tenemos que abrir la válvula".

"¿Tienen alguna información acerca de cuánto es el cambio cuando se encienden los ventiladores?", les pregunta.

"Yo soy el experto en cuanto a los ventiladores que perturban nuestro proceso". Señala Chris. *"Ayer, alguien encendió el ventilador 2 a las 2:35 P.M. La concentración empezó a cambiar enseguida. Antes de que el ventilador arrancara, la concentración era de 92.5 ppm y el flujo de NaOH era de 55 gpm (45 %CO). A las 2:39 P.M. la concentración era de 98.8 ppm y seguía incrementándose. Luego de un rato se estabilizó en 102.5 ppm. Entonces decidí empezar a abrir la válvula".*

"¿Y qué pasó?", le pregunta.

"Richard se encontraba cerca", dice Chris, *"él me pidió que registrara el comportamiento de la torre de lavado desde el momento de la apertura de la válvula y eso fue lo que hice".*

"Aquí tengo los resultados", dice Richard. *"Pensé que tal vez usted querría echarles un vistazo".* Richard le hace entrega de los resultados. Los datos registrados se muestran en la tabla E-1.

Tabla E-1 Información de la prueba escalón para el estudio del caso operativo 1

Tiempo	Concentración	Tiempo	Concentración
3:02 PM	102.5	3:13 PM	96.2
3:03 PM	102.5	3:14 PM	95.8
3:04 PM	102.3	3:15 PM	95.4
3:05 PM	101.6	3:16 PM	95.1
3:06 PM	101.1	3:17 PM	94.8
3:07 PM	100.2	3:18 PM	94.6
3:08 PM	99.4	3:19 PM	94.5
3:09 PM	98.5	3:20 PM	94.5
3:10 PM	97.7	3:21 PM	94.4
3:11 PM	97.0	3:22 PM	94.4
3:12 PM	96.5	3:23 PM	94.4

Señal inicial de la válvula en 45 %CO, señal final de la válvula en 35 %CO.

Ahora usted piensa que tiene todo lo necesario. Sin embargo, antes de irse, le pregunta a Karen qué quiso decir con que la sintonización del controlador no funciona para nada. Ella le dice que el primer conjunto de parámetros hacía que la válvula estuviese completamente abierta o completamente cerrada en cuestión de minutos. El último conjunto de parámetros no era tan malo. Sin embargo, cuando cualquiera de los ventiladores, el 2 o el 3, se encendía, el proceso nunca alcanzaba el valor de la referencia y se desviaba cerca de 5.5 ppm de éste. *"Eso",* dice ella, *"no es aceptable. Nuestra referencia es 95 ppm y las regulaciones federales son 98 ppm, puedo tolerar una desviación de 2 ppm pero no mayor. Además",* continuó ella, *"yo quisiera tener una respuesta donde la amplitud de la oscilación decaiga rápido. Por ejemplo, si el primer sobresalto es de 2 ppm, el siguiente debería ser de 0.5 ppm".*

Ahora sí tiene todo lo que necesita.

(b) Dibuje un diagrama completo de lazo cerrado que ilustre cómo funciona el sistema. Utilice los valores reales (no letras) dentro de los bloques.
(c) ¿Cuál es el flujo máximo de la válvula?
(d) Señale las razones por las que la sintonización 1 no funcionó. Demuestre sus razones.
(e) Indique las razones por las que la sintonización 2 no funcionó. Demuestre sus razones.
(f) ¿Cuál sintonización (controlador P) sugeriría usted? ¿Por qué?
(g) ¿Qué podría decirle a Chris para quitarle la idea de que podría perder su trabajo si el controlador funciona?
(h) ¿Estaba en lo cierto Richard cuando decía que Chris saboteaba la operación del controlador?

ESTUDIO DE CASO OPERATIVO 2: UNIDAD DE TRATAMIENTO DE AGUAS

Es un día frío de diciembre. Luego de una larga noche de estudio para el examen final de control automático, conduce de vuelta a casa. No puede olvidar que necesita una calificación mínima para aprobar. Cuando llega a casa, come cualquier cosa y se va a dormir. Unos pocos minutos después de quedarse dormido, un sueño extraño empieza a tomar forma en su cabeza.

De repente, ya se ha graduado de la universidad y es consultor para Ingeniería de Control, S.A. Le solicitan revisar algunos problemas en una unidad de tratamiento de agua como la de la figura E-2. Una corriente de agua entra a la unidad (flujo de alimentación) que usualmente tiene un pH por abajo de 7. Antes de que esta corriente pueda ser vertida en un lago cerca de la planta, el valor del pH debe regresarse a 7. El valor mínimo aceptado es 6.8. Sin embargo, por razones de seguridad, el valor de la referencia del controlador es 7. El lazo de control del pH instalado

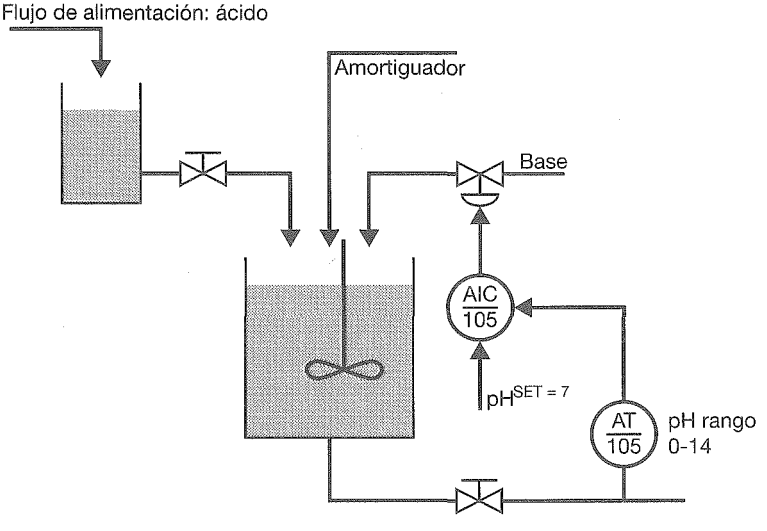


Figura E-2 Proceso del estudio del caso operativo 2.

Tabla E-2 Identificación del proceso para la sintonización del controlador de pH

Señal inicial de la válvula	pH inicial	Ganancia del proceso	Ganancia del controlador
52 %CO	7.025	0.74 %TO/%CO	2.64 %CO/%TO
Señal final de la válvula	pH final	Constante de tiempo	Tiempo integral
42 %CO	5.885	7.5 min	7.5 min
		Tiempo muerto	Tasa de integración
		3.2 min	1.6 min

manipula una solución básica para mantener el pH de salida en el valor deseado. El sensor-transmisor utilizado en el lazo tiene un rango de 0 a 14, y su señal toma 1.5 min para alcanzar su estado estacionario.

Roberto, el jefe de planta, le dice que han estado teniendo problemas con la sintonización de su controlador. *"Algunas veces"*, le dice, *"funciona bien. Sin embargo, otras veces simplemente se vuelve loco y produce un comportamiento altamente oscilatorio. Esto está costando mucho dinero porque daña las válvulas. Este año ya hemos comprado cuatro válvulas de control nuevas"*.

Cuando usted investiga cómo obtuvieron la sintonización, ellos le dicen que hicieron una prueba escalón para identificar la función de transferencia del proceso. *"Suena bien"*, dice usted, *"pero díganme, ¿qué fue lo que obtuvieron?"*

Ellos le entregan la tabla E-2.

"Hasta hicimos una identificación del proceso para la perturbación producida por el flujo de alimentación, pero como nos dimos cuenta de que ni siquiera la necesitábamos para propósitos de sintonización, simplemente la ignoramos", dice Roberto. *"Los resultados se encuentran aquí* (tabla E-3)*"*.

"¿Qué más hicieron?" pregunta usted sabiamente.

"Bueno", dice Roberto, *"yo compré un software para identificación de procesos con un valor de $10,000 dólares. Lo corrimos en nuestra computadora y obtuvimos algo así como ganancia, constante de tiempo y tiempo muerto contra la señal de la válvula"*.

Tabla E-3 Resultados para un cambio en el flujo de alimentación de 166 a 206 gpm

Tiempo, s	pH	Tiempo, s	pH	Tiempo, s	pH	Tiempo, s	pH
0	7.0250	130	6.1745	260	5.7501	390	5.6078
10	7.0250	140	6.1237	270	5.7325	400	5.6023
20	7.0132	150	6.0770	280	5.7163	410	5.5974
30	6.9629	160	6.0340	290	5.7015	420	5.5929
40	6.8821	170	5.9943	300	5.6879	430	5.5888
50	6.7872	180	5.9577	310	5.6755	440	5.5850
60	6.6899	190	5.9239	320	5.6641	450	5.5816
70	6.5965	200	5.8927	330	5.6537	460	5.5786
80	6.5094	210	5.8639	340	5.6441	470	5.5758
90	6.4296	220	5.8373	350	5.6355	480	5.5732
100	6.3568	230	5.8127	360	5.6276	490	5.5709
110	6.2904	240	5.7901	370	5.6203	500	5.5688
120	6.2298	250	5.7693	380	5.6138		

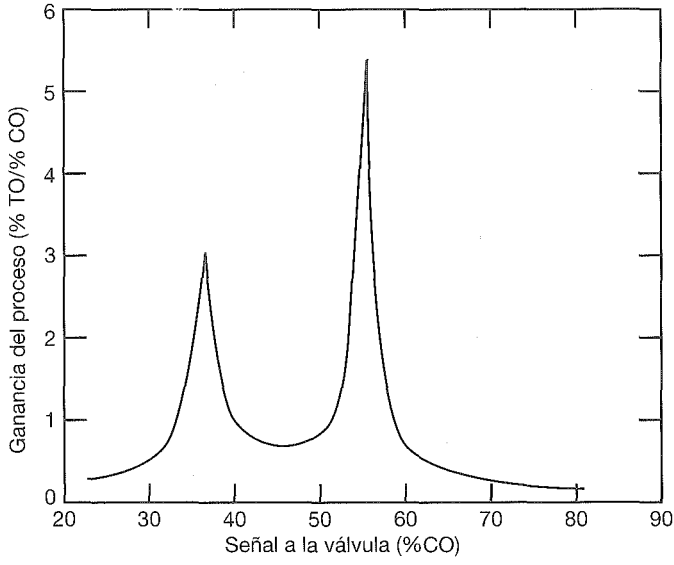


Figura E-3 Ganancia del proceso contra salida del controlador (%CO).

"Caramba", exclama usted, *"¿tienen los resultados?"*

"Seguro", contesta Roberto. *"La constante de tiempo y el tiempo muerto eran más o menos constantes (no cambiaban con la señal de la válvula). Sin embargo, el comportamiento de la ganancia de proceso era algo rara"*, Y le muestra la figura E-3.

"Ahora sí", dice usted, *"tengo todo lo que necesito"*.

(a) Dibuje un diagrama de bloques de lazo cerrado indicando las entradas, salidas y funciones de transferencia (utilizando valores, no letras). Indique las señales y sus unidades.
(b) ¿Por qué su sintonización no está funcionando?
(c) ¿Cuál es la posición de falla segura de la válvula y la acción apropiada del controlador?
(d) ¿Cuál es la ganancia proporcional máxima que puede utilizarse antes de llegar a un comportamiento inestable?
(e) ¿Cuál debe ser la sintonización apropiada para un controlador PID si se utiliza una relación de asentamiento de un cuarto basada en la ganancia última y el periodo último, si se tiene como base la identificación del proceso que ellos llevaron a cabo?
(f) ¿Cuáles deberían ser los parámetros de sintonización para el controlador PID, de tal modo que el proceso nunca más presente comportamientos oscilatorios no deseados? (Aun si esto significa que será algo lento.)

ESTUDIO DE CASO OPERATIVO 3: REGENERADOR CATALÍTICO

El proceso mostrado en la figura E-4 es una unidad regeneradora catalítica donde el aire caliente remueve carbono del catalizador sólido. La variable manipulada es el flujo de combustible y la variable controlada es la temperatura de regeneración. Hay una válvula de control lineal con

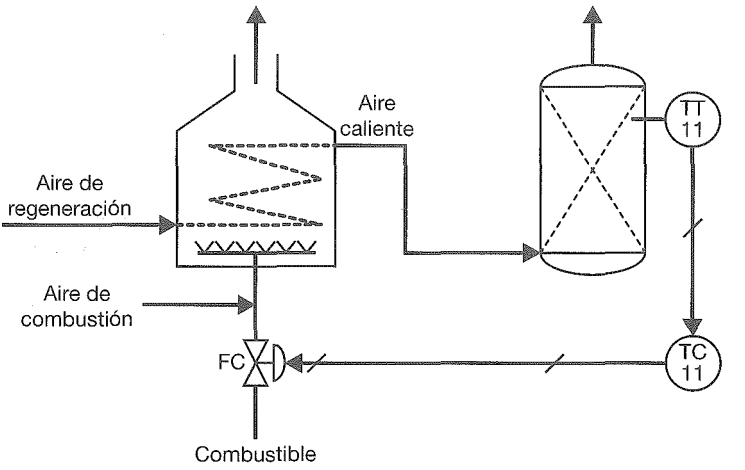


Figura E-4 Proceso del estudio del caso operativo 3.

un flujo máximo de 120 gpm. El flujo de estado estacionario es de 50 gpm. El sensor de temperatura tiene un rango de 50° a 275°F. La perturbación principal en el sistema es la temperatura del aire del ambiente; tal temperatura es ahora de 80°F.

Usted decide identificar la función de transferencia del proceso. Para hacer eso, le solicita a alguien que haga un cambio escalón de 10 %CO a la válvula de combustible (ahora es de 60%) y solicita que le hagan llegar estos valores a su oficina. Los resultados se presentan en la tabla E-4. Una vez que recibe la información, se da cuenta de que no especificó el signo del cambio escalón. Lo único que sabe es que la válvula de control de combustible es cerrada en falla. Por lo tanto puede usted deducir el signo que tenía el cambio escalón, ¿cierto?

(a) Su primer objetivo es dibujar un diagrama de bloques completo del proceso. Leyendo los registros de los ingenieros anteriores encuentra la nota que se da al inicio de la página siguiente.

Tabla E-4 Información de la prueba escalón para el estudio del caso operativo 3

Tiempo, min	Temperatura, °F	Tiempo, min	Temperatura, °F	Tiempo, min	Temperatura, °F	Tiempo, min	Temperatura, °F
0.0	159.6	11.0	167.5	22.0	172.7	33.0	174.3
1.0	159.6	12.0	168.3	23.0	172.6	34.0	174.0
2.0	160.2	13.0	168.8	24.0	173.1	35.0	174.6
3.0	160.5	14.0	169.5	25.0	173.4	36.0	174.1
4.0	162.0	15.0	170.1	26.0	173.8	37.0	174.8
5.0	162.2	16.0	170.8	27.0	173.4	38.0	174.2
6.0	163.5	17.0	171.2	28.0	173.8	39.0	174.2
7.0	164.5	18.0	171.3	29.0	173.9	40.0	174.7
8.0	165.1	19.0	172.3	30.0	173.8		
9.0	166.2	20.0	171.8	31,0	173.7		
10.0	167.2	21.0	172.0	32.0	174.0		

Como conclusión, la función de transferencia entre la temperatura del aire del ambiente y del sensor de temperatura del regenerador es

$$G_D(s) = \frac{0.44e^{-2s}}{4s+1}$$

Por supuesto, inmediatamente se da cuenta de que las unidades de la ganancia están en %TO/°F y las unidades de tiempo se encuentran en minutos. ¡Esto es genial! Ahora, para probarle a todos que usted entiende cómo funciona el sistema, dibuja un diagrama de bloques completo.

(b) Ahora recuerda que la compañía de instrumentos y equipos desea instalar el controlador utilizando las configuraciones de fábrica: $K_c = 2.5$, $\tau_I = \infty$, $\tau_D = 0$, *acción inversa.* Por supuesto, usted no quiere permitirles que lo hagan sin realizar primero unos cálculos. Entonces, usted se hace las siguientes preguntas:

- ¿Es la acción inversa la acción apropiada del controlador? ¿Por qué? (Usted sabe que ellos se lo preguntarán.)
- Aun si la acción del controlador se ajusta correctamente, ¿podrá el proceso de lazo cerrado ser inestable con la ganancia predeterminada del controlador (2.5)?
- ¿Puede usted calcular una ganancia de controlador que minimice el IAE para cambios en la perturbación?

(c) ¡Ahora se siente el rey de la planta! Repentinamente, recuerda que el jefe de la planta, el que conoció hace apenas dos días cuando solicitó un aumento de $8000 dólares, va a estar presente hoy cuando se ponga a funcionar el nuevo controlador. Desde luego que desea impresionar a todos. Pero, ¿cómo puede hacerlo?

Para relajarse, enciende su TV y empieza a cambiar canales con su control remoto. Entonces, se detiene en el canal del clima y escucha, "Esta noche vamos a tener una noche con un calor inusual y mañana la temperatura estará en 95°F... bla, bla, bla, alta presión, bla, bla, baja presión..." Esa empresa de energía eléctrica va a hacer dinero hoy con todos los acondicionadores de aire trabajando a máxima velocidad, ¡eh! Pero, ¡esperen! La temperatura va a aumentar de 80°F hoy a 95°F mañana! Debido a que la compañía quiere instalar un controlador P, habrá una desviación. *"Apuesto a que puedo predecir esa desviación"*, se dice a sí mismo, *"éste es el momento de conseguir ese aumento!"* Utilice en sus cálculos la ganancia del controlador calculada en (b).

ESTUDIO DE CASO OPERATIVO 4: COSTILLITAS

El semestre está a punto de terminar y ha decidido buscar un trabajo para la época de vacaciones. *"Éste es el último trabajo mal pagado que tomaré"*, dice usted, *"Una vez que termine con diseño de plantas el próximo semestre, llegará el momento de los grandes sueldos"*.

Va al restaurante de Charlie y lo contratan como asistente de jefe (usted sabe, el encargado de ayudar al jefe con el funcionamiento del lugar). Una vez contratado, usted se asegura de que la cocina opere en buenas condiciones, el dinero se encuentre seguro y de que los clientes estén contentos. ¡Ah! Los clientes deben estar contentos. ¿Cierto? ¡No! Ha habido quejas hace poco

acerca del sabor de las costillitas. Algunas personas dicen que están muy cocidas, y otras dicen que están crudas. Como usted sólo estará por un mes, intenta ignorar la situación.

Un día el jefe le llama. *"La chica de allá enfrente dice que usted tomó un curso en control de procesos. Dice que sacó una buena calificación, ¿eso es cierto?"*, le pregunta.

Usted asiente.

"Bueno", dice el jefe, *"le tengo un problema"*.

Él le dice que los clientes se han estado quejando de la calidad de las costillas.

Usted se muestra poco sorprendido.

"El cocinero dice que deberían cocinarlas por 3 horas a 290°F. Un cambio de 4°F no le afecta a nadie, pero una desviación mayor provocará quejas. Él dice que cuando se piden las especiales (ya sabe, las costosas), éstas necesitan cocinarse a 310°F. Nosotros siempre mantenemos el horno funcionando, con el suficiente gas para obtener los 290°F por default. Usualmente ajustamos la válvula para que aporte 1.5 scfm. Pero ¿sabe qué?" le dice, *"es una válvula rara. Se debe programar como porcentaje o algo por el estilo. Pasamos tres horas tratando de que la pantalla mostrara 1.5 scfm. Tuvimos que introducir un valor de 40%"*.

"El cocinero se ha dado cuenta de que en los días fríos", continúa, *"cuando la temperatura exterior desciende de 90° a 70°F, la temperatura en el horno cae a 275°F en 12 minutos aproximadamente. Uno puede darse cuenta cómo la temperatura del horno empieza a descender cuando la temperatura exterior también lo hace. Eso pasó ayer. El cocinero tuvo que ajustar la válvula en 80% (3 scfm) para obtener una temperatura de 290°F. También tienen problemas cuando colocan bandejas adicionales. Usualmente colocamos 10 bandejas dentro"*, dice él. *"Pero cuando colocan dos bandejas adicionales, la temperatura desciende a 285°F. El cambio no es tan rápido como el otro. Primero* –señala– *ni siquiera se nota que la temperatura cambia. Pero luego de dos minutos, el cambio empieza. Probablemente le toma 6 minutos para alcanzar los 285°F"*.

"Tengo una pregunta", dice usted. *"¿Sabe algo acerca del sensor?"*

"Seguro", dice él, *"el ... puede medir cualquier temperatura que vaya de 200° a 400°F"*.

"Caramba, estoy impresionado," dice usted, *"¿Calculó la función de transferencia?"*

"No," dice él con sorpresa. *"Yo simplemente leí la placa que se encuentra detrás"*.

"Bueno", dice usted, *"sólo necesito hacer una prueba y le diseñaré un controlador para mantener la temperatura constante"*.

"¡Qué bueno!" comenta él. *"Adelante"*.

Usted va hacia la cocina e incrementa la señal de la válvula hasta 48% (desde 40%). Obtiene los resultados mostrados en la tabla E-5. Antes de dejar la cocina el cocinero le grita, *"Hey, gracias por quemar las costillas"*.

Usted le promete al jefe tener el diseño en dos horas. Antes de irse el jefe le susurra al oído, *"Por cierto, ¿qué... es una función de transferencia?"*

(a) Dibuje diagramas de bloque de lazo abierto y lazo cerrado con funciones de transferencia incluidas.
(b) Identifique la válvula (tipo, acción de falla, parámetros) y el sensor (rango).
(c) Sintonice un controlador P.
(d) ¿Podrá el controlador manejar el cambio de la referencia (a 310°F) y la perturbación del aire del ambiente?
(e) Sintonice un controlador PI de acuerdo con las ecuaciones de Ziegler-Nichols.

Tabla E-5 Información de la prueba escalón para el estudio del caso operativo 4

Tiempo, min	Temperatura, °F	Tiempo, min	Temperatura, °F
0.0	290.00	11.0	297.62
1.0	290.00	12.0	297.74
2.0	290.72	13.0	297.82
3.0	292.09	14.0	297.88
4.0	293.49	15.0	297.92
5.0	294.68	16.0	297.95
6.0	295.62	17.0	297.96
7.0	296.32	18.0	297.98
8.0	296.83	19.0	297.98
9.0	297.19	20.0	297.99
10.0	297.44		

ESTUDIO DE CASO OPERATIVO 5: UNIDAD DE SECADO DE PAPEL

Una empresa procesadora de papel en Irlanda le ha contratado recientemente para mejorar e implementar estrategias de control en sus equipos de 10 años de antigüedad. Una vez que se integra al trabajo se le asigna a la unidad secadora de papel. Ésta consta de dos partes, las cuales consisten en un horno donde se calienta el aire y una estación de secado donde circula el aire por ambos lados del papel para remover la humedad. Si usted cierra los ojos podrá imaginar la planta, pero no podrá ver lo que muestra la figura E-5, que es la configuración de la planta.

El jefe de planta le ha dicho que su primera tarea consiste en analizar y mejorar el sistema de control para esta unidad. El problema principal se debe a cambios inesperados en la temperatura del aire atmosférico y a la entrada de humedad del papel. Ellos quisieran obtener una humedad de salida de 3.5% con no más de 0.2% de desviación de la referencia (de 3.3 a 3.7%).

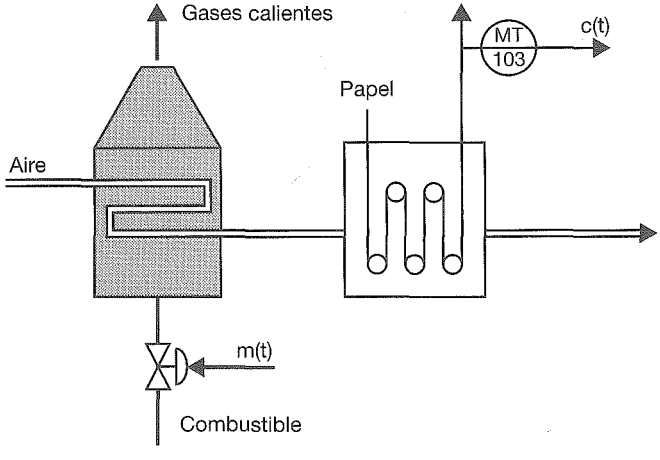


Figura E-5 Proceso del estudio del caso operativo 5.

Su primera tarea es recopilar tanta información como sea posible del sistema. Entonces va hacia el cuarto de control principal y habla con el operador con el objetivo de que le entregue la información que necesita. Primero, él le dice que actualmente se utilizan 120 scfm de combustible para el sistema. Usted lee en la pantalla que la señal a la válvula es de 34.13 %CO. También observa que la humedad de salida real es de 3.6% y el valor no escalado es de 52%. El operador le dice que la humedad mínima que el sensor puede medir es 1%, pero no recuerda el valor máximo. Esto no le afecta a usted, ya que sabe cómo obtenerlo.

Entonces usted le pide que incremente la señal a la válvula un 10 %CO y empiece a registrar la humedad de salida. Usted sale a buscar una taza de café y cuando regresa encuentra los resultados que se muestran en la tabla E-6.

Luego de guardar la información, usted empieza a hablar con el operador acerca de lo que ocurre cuando cambia el clima. Él le dice que cuando empieza a soplar una brisa fría, de repente la temperatura exterior puede descender a 8°C aproximadamente. La unidad sigue funcionando de manera normal por 3 minutos, pero después la humedad de salida cambia de 3.5% a 3.9% en los siguientes 10 minutos. Cuando usted le pregunta acerca de la humedad de entrada, el operador le dice que hay varios registros anotados, pero él no sabe realmente lo que indican.

Revisando un poco usted encuentra la siguiente información:

"Cuando mantenemos el flujo de combustible constante y tenemos la suerte de tener una temperatura ambiente constante, un incremento de 2% en la humedad de entrada (usualmente 23%) lleva a un incremento de 0.25% en la humedad de salida. Tal cambio representa un comportamiento dinámico FOPDT con tiempo para 28.3% del cambio en 4 minutos, y para 63.2% del cambio en 8 minutos".

Ahora, con toda la información que ha recopilado, está listo para preparar su primer análisis para su empresa siguiendo el formato presentado a continuación.

(a) Dibuje un diagrama de bloques de lazo abierto, indicando el nombre de cada elemento.
(b) Describa la válvula (posición de falla segura) y el sensor (rango).

Tabla E-6 Cambio escalón en la señal a la válvula

Tiempo	Humedad	Tiempo	Humedad
13:05:00	3.60	13:15:00	3.33
13:06:00	3.60	13:16:00	3.32
13:07:00	3.57	13:17:00	3.32
13:08:00	3.54	13:18:00	3.31
13:09:00	3.50	13:19:00	3.31
13:10:00	3.46	13:20:00	3.31
13:11:00	3.43	13:21:00	3.30
13:12:00	3.40	13:22:00	3.30
13:13:00	3.37	13:23:00	3.30
13:14:00	3.35	13:24:00	3.30

Nota: el flujo final es 87 scfm.

(c) Dibuje un diagrama de bloques de lazo cerrado, indicando las funciones de transferencia dentro de cada bloque (con números), el nombre de la señal y sus unidades.
(d) Encuentre la sintonización de un controlador P basado en 70% de la ganancia última.
(e) ¿Podrán los cambios de temperatura (8°C) y de humedad de entrada (2%) descritos compensarse con el sistema de control dentro de los límites requeridos?

Índice

Abierta/cerrada en falla, 219
Absorbedor de HCl, control, 740-741
Acción, operación básica, 4
Acción de válvula, 218
Acción del controlador, 241-242, 275, 295
Acción directa, 241, 244
Acción inversa, 241, 245
Acetona, proceso de producción, 615-616
Ácidos grasos, proceso de, 699-701
Ácido sulfúrico, proceso, 702-704
Actuador de válvula de control, 218-221, 724
Acumulación de moles, 86
Adelanto de primer orden, 185, 408, 413, 417
Adelanto-atraso, 51, 255, 531, 534-535
Aire para cerrar/abrir, 219
Algoritmo de cálculo, 459, 466
Amortiguamiento, razón de, 53
Análisis de riesgos (HazAn), 221
Análisis dinámico de sistemas multivariable, 607
Analógico, 6
Ángulo de fase, 59, 404, 406
Antoine, ecuación de, 65
Apareamiento de variables, 575, 577, 596
Arrhenius, ecuación de, 65
Asentamiento, razón de, 39, 41, 60
Autosintonización, 126

Balance de estado no estacionario, 85, 89
Balance de masa de estado no estacionario, 84
Balance de masa dinámica, 84
Banda muerta, controlador gap o de, 259
Banda proporcional (PB), 247-248
Biorreactor, simulación, 639-641
Bloque de simulación de la función S, 661
Bloque limitador, 461
Bloque selector, 461, 462
Bloques de cálculo, 461-463
Bode, gráficas de, 411
Bourdon, tubo de,707, 708

Caída de presión constante, válvula, 236, 238
Caída de presión variable, válvula, 237, 239
Capacidad de válvula, 221
Capacitancia, 128
Características de abertura rápida, 228
Características de la respuesta, 33
Características de válvulas, 221, 228, 230
Características de válvulas instaladas, 230
Características inherentes, 228
Características isoporcentuales, 230
Características lineales, 124, 228
Caracterización de lazo abierto, 328
Caracterización de procesos, 328
Cavitación de válvulas, 728-730
Cero del transmisor, 216
Ceros, como raíces del numerador, 394
Coeficiente C_v, 221
Coeficiente de capacidad de válvula (C_v), 221
Coeficiente de fricción, 231
Columna de destilación, control, 675-676
Columna de destilación, simulación, 661
Compensación de tiempo muerto, 365
Compensación por retroalimentación, 537
Componente clave, tasa de reacción del, 119
Conductancia, 128
Constante de tiempo, 44, 129
Constante de tiempo del filtro, 435
Constante de tiempo efectiva, 55, 165, 166, 167
Control, estrategias, 6-10
Control a nivel de planta, 613
Control automático, 2, 488
Control automático de procesos, 2
Control basado en computadora, 349
Control de aceite caliente, 483
Control de calderas, 471
Control de calentador, 454, 480
Control de combustión, 471
Control de compensación de oxígeno, 476
Control de una compresora, 618
Controles de computadora, 349, 451
Control de evaporador, 385, 597
Control de filtro de vacío, 379
Control de flujo, simulación de lazos, 645

Control de la composición de reactores isotérmicos en serie, 311
Control de lazo cerrado, 4
Control de lazos cruzados, 473
Control de medición completa, 472
Control de mezclas, 467, 501, 581, 593, 609
Control de modelo interno (IMC), 370-371
Control de nivel de calderas, 553
Control de nivel de líquido, 351
Control de nivel promedio, 351, 357-359
Control de nivel riguroso, 351
Control de posicionamiento paralelo, 471
Control de procesos multivariable, 569
Control de reactor, 482, 494, 497
Control de reactor, sintonización, 744
Control de reactor con camisa de enfriamiento, 456
Control de reflujo interno, 502-503
Control de relación, 459, 467
Control de restricción, 459, 476
Control del horno de costillitas, 754-756
Control del producto de destilación, 583
Control del secador, 387, 452
Control distribuido (DCS), 240, 461
Control en cascada, 437
  controlador esclavo, 440
  controlador maestro, 440
  de dos niveles, 444
  de tres niveles, 447
  estabilidad, 441
  rastreo, operación de, 452
  simulación, 674-675
  sintonización, 443, 735
  sistema de dos niveles, 444-447
Control feedforward, 8, 521-568
  adelanto-atraso, 534
  diseño, 742-743
  lineal, 524
  no lineal, 542, 548
  simulación, 657
Control manual, 2, 4, 487
Control multivariable, 569
Control override, 459, 476
Control perfecto, 361
Control por muestreo de datos, 349
Control por retroalimentación, 3, 6, 273
Control por retroalimentación de reactores en serie, 310
Control proporcional de nivel, 354
Control regulatorio, 5
Control selectivo, 459, 481
Controlador, 3
  acción, 241, 244, 295
  de banda proporcional (PB), 247
  fórmula de síntesis, 360-361
  función de transferencia, 248-249, 254, 255
  ganancia del, 244
  integral por retroalimentación, 263
  señal de salida, 241, 244
  síntesis, 360
Controlador de error al cuadrado, 258-259
Controlador de nivel promedio, 357
Controlador de nivel proporcional, 354-355
Controlador en serie, 255
Controlador gap o de banda muerta, 259
Controlador integral, 286
Controlador integral puro, 363
Controlador irrealizable, 384
Controlador PID en serie, 254-255
Controlador por retroalimentación (*veáse* Controlador)
Controlador proporcional (P), 244-245, 248
Controlador proporcional derivativo (PD), 256
Controlador proporcional integral (PI), 249-252
Controlador proporcional integral derivativo (PID), 252-253
Controladores, sintonización de, 83, 321, 349
Convertidor, 6
Convertidor (*veáse* Transductor)
Corrección de viscosidad de válvulas, 728
Corrimiento (*offset*), 245, 246, 247, 286, 287, 291
Curva de reacción del proceso, 331

Dahlin, parámetro de sintonización, 361
Decisión, operación básica, 3
Densidad de un gas ideal, 69
Derivada, en la variable, del proceso, 258
Desacoplador no lineal, 604
Desacopladores en diagramas de bloques, diseño, 290
Desacopladores para sistemas $n \times n$, diseño, 599
Desacoplamiento, 590, 596, 600
Desacoplamiento de lazos interactivos, 590
Desacoplamiento estático, 599
Desacoplamiento parcial, 596
Detector de temperatura resistivo (RTD), 715
Diafragma, sensor de, 707

Diagrama de bloques, 104-105
control de modelo interno, 371
control en cascada, 442
lazo de control de flujo, 289
lazo de control de nivel, 353
lazo de retroalimentación, 276, 328
lazo de retroalimentación unitaria, 278, 329
síntesis del controlador, 360
sistema de control 2 × 2, 591, 607
sistema del control 2 × 2 con desacoplador, 591
Digital, 5
Dirac, función delta de, 16
Dimensionamiento de válvulas, 221, 224
Diseño de lazo de control de flujo para gas, 267-268, 308
Diseño de sistemas de control, 485

Ecuación característica del lazo, 284
Efecto de compresibilidad de válvulas, 222
Elemento final de control, 3
Entrada múltiple, salida múltiple, 569
Error, 243, 274
Error al cuadrado, controlador de, 258-259
Escala de transmisor, 216
Escalamientos, 466
Esquemas de control, 685-686
Esquemas de sistemas de control, 685-686
Estabilidad, 43, 295-296, 421
Estabilización, tiempo de, 39, 40
Estado estacionario:
balance de, 84
error (*véase* Corrimiento)
ganancia (*véase* Ganancia)
valor final, 40
Estimación de la constante de tiempo, 332
Estimación de parámetros, 332
Estudio de casos operativos, 747-758
Estudios de caso, 747
Estudios de caso, sintonización, 735
Expansión en fracciones parciales, 25-26

Factor de flujo crítico, 223
Factor de sobrecapacidad, 225
Factores de seguridad, 5, 196
Factorización de polinomios, 25
Filtro derivativo, 254
Flujo compresible, 222-223
Flujo crítico, 223
Flujo crítico (estrangulado), válvulas, 210
Flujo nominal, 225
Flujo sin control, 467
FOPDT (*véase* Primer orden más tiempo muerto)
Fórmula cuadrática, 25
Frecuencia, 39, 59
Frecuencia de esquina, 414
Frecuencia de resonancia, 62
Frecuencia de ruptura, 414
Frecuencia natural, 53
Frecuencia última, 297, 424, 427
Fuelles, 707
Función de forzamiento, 23, 90
Función de impulso, 16
Función de impulso unitario, 15, 16
Función de transferencia, 13, 24, 93, 102-104
ceros, 394
de controlador, 248, 252, 254, 255
de lazo cerrado, 276-278
de transmisor, 216
de válvula, 239-240
polos, 394
simulación, 630
Función de transferencia de lazo abierto, 394
Función de transferencia de lazo cerrado, 276-278
Función de transferencia de primer orden, 93
Función de transferencia de primer orden más tiempo muerto (FOPDT), 49
Función de transferencia de segundo orden, 153
Función de transferencia de válvulas, 239-240
Función escalón, 14-15
Función escalón unitario, 14
Funciones de transferencia de tercer orden, 156

Ganancia, 98
ajuste, 375
de controlador, 244
de lazo abierto, 291, 573, 575
de lazo cerrado, 290
de transmisor, 216
de válvula de control, 235
elemento de, 411
estimación, 331
margen, 429
relativa, 576, 579, 586
última, 295, 297, 298, 427
Ganancia de estado estacionario, 44, 53, 97
Ganancia de lazo abierto, 573, 575

Ganancia de lazo cerrado, 572, 573
Ganancia de válvulas, 235
Ganancia relativa, 576, 579, 586
Ganancia última, 295, 297, 323
Gráfica de Bode para sistemas complejos, 418
Gas ideal, densidad, 69

Heaviside, Oliver, 25
Hélice, 707
Hertz (Hz), 39, 59
Hipoclorito de sodio, proceso, 689

I/P (*véase* Transductor)
Instrumentación, simulación, 642
Integrador, 409, 417
Integral, saturación, 260-263
Integral del error absoluto (IAE), 342
Integral por retroalimentación, 263
Interacción, 569
Interacción, positiva/negativa, 574
Interacción negativa, 574
Interacción positiva, 574
Inversa de la transformada de Laplace, 24
ISA, símbolos estándar, 681, 682

Lazo, ecuación característica, 284
Lazo, estabilidad, 295
Lazo, ganancia, 301
Lazo, interacción, 569
Lazo de control, 274
Lazo de control, estabilidad, 295
Lazo de control de flujo, 289
Lazo de control de flujo de vapor, 308
Lazo de control por retroalimentación (*veáse* Lazo)
Lazo de retroalimentación, 6, 273
Lazo de retroalimentación unitario, 278
Leyes de plomería, de Luyben, 615
Limitador de ganancia dinámica, 648
Linealización, 64-66
Linealización, ecuaciones diferenciales, 70-71
Linealización, funciones de dos o más variables, 68
Linealización, funciones de una variable, 66-67
López, A. M., 344
Lugar de las raíces, 395
  graficación de diagramas, 399
Luyben, W. L., 615

Margen de fase, 429
Medición, operación básica, 3
Medición de flujo, efecto Coriolis, 712
Medición de interacción, 576, 586
Medidor de flujo, 708
  de orificio, 708, 710
  efecto Coriolis, 712
  tipos, 709
Medidor de flujo de orificio, 708, 710
Medidor de flujo de turbina, 712
Medidor magnético de flujo, 711
Método de presión diferencial, 712
Mezclado de gasolina, 587, 601
MIMO, 569
Modelaje, 10, 81
Modelo de calentador, 279
Modelo de nivel de tanque, 149, 161, 186
Modelo de péndulo, 41-42
Modelo de plato, de columna de destilación, 137
Modelo de proceso de gas, 112
Modelo de proceso térmico, 88
Modelo de reactor isotérmico, 119
Modelo de reactor no isotérmico, 171
Modelo de sensor de temperatura, 133-134
Modelo de tanque calentador con agitación continua, 279
Modelo de tanque térmico, 157
Modelo dinámico, 86, 88
Modo integral, efecto del, 292-293
Muestreo de datos, control por, 349

Nitrato de amonio, proceso, 704-705
Nivel interactivo, proceso, 161
Nivel no interactivo, proceso, 149
Nomenclatura, instrumentación, 681

Onda sinusoidal, 16
Operación de tratamiento de aguas, 750
Optimización, 476, 481

Padé, aproximación de, 304, 306
Parámetro de rangeabilidad, 229
Parámetro de sintonización, 361, 362
Periodo de oscilación, 39, 59
Periodo último, 297, 322, 323
Perturbación, 4
Plano complejo, 296
Plano *s*, 296
Polinomios, factorización, 25

Polinomios, raíces, 26, 35
Polos, 394
Posición de válvulas, 219
Posición en falla de válvulas, 219
Posicionador, 726
Predictor, 365
Presión diferencial, 217, 708
Primer orden, adelanto de, 406, 407
Primer orden más tiempo muerto (FOPDT), 304, 329, 332
Principio de superposición, 107
Proceso:
  autorregulado, 128-129, 186
  características, 81
  caracterización, 328
  control, 1-4
  de primer orden más tiempo muerto, 130
  ganancia, 97, 98
  inestable de lazo abierto, 191
  integrante, 186-187
  no autorregulado, 129, 186, 191, 197
  no linealidad, 125
  prueba de lazo abierto, 330
  simulación, 634
Proceso autorregulado, 128-129, 186
Proceso de gas, ejemplo, 112
Proceso de gas natural, 705
Proceso de hidrocarburo, 698-699
Proceso de hidrocarburos ligeros, 699
Proceso de metanol, 696
Proceso inestable, 191, 196
Proceso integrante, 351
Proceso lineal, 124
Proceso no autorregulado, 129, 186, 197, 351
Procesos, modelaje matemático, 84-88
Programación en bloques, 461
Programación en código, 463
Propiedad de linealidad, 17
Prueba de lazo abierto, 330
Prueba dinámica (*veáse* Prueba)
Prueba escalón, 330
Prueba sinusoidal, 401
Pulso de magnitud y duración, 15

Raíces, lugar de las, 395
Raíces conjugadas complejas, par de, 29, 37
Raíz:
  de la ecuación característica, 284
  de polinomios, 26, 35
  real, 36
  repetida, 26, 28
Raíz compleja, 37
Raíz dominante, 36
Raíz real no repetida, 27
Rangeabilidad de válvulas, 229-230
Rango del transmisor, 215-216
Raoult, ley de, 79
Rastreo de la variable del proceso (PV), 259
Razón de amortiguamiento, 53
Razón de asentamiento, 39, 41, 60
Razón de asentamiento de un cuarto, 324, 339
Reacción química no isotérmica, 170
Reactor *semibatch*, simulación, 678
Reactores químicos, 118-124
Referencia, 4, 240, 243
Referencia local, 440
Referencia remota, 440
Refinación de azúcar, proceso, 701-702
Regenerador catalítico, 736, 752-754
Reglas de diagramas de bloques, 106
Reglas de sintonización IMC, 370
Regulador, 343
Relación de amplitud (AR), 403, 406
Relación de magnitud (MR), 404
Resonancia, 62
Respuesta:
  de sistemas de orden superior, 63, 183-186
  inestable, 36
  monótona, 33
  oscilatoria, 33, 38
  sinusoidal, 401
  sobreamortiguada, 55
Respuesta a una entrada sinusoidal, 62
Respuesta con retardo, 49-50
Respuesta críticamente amortiguada, 54
Respuesta de frecuencia, 401, 404
Respuesta de la salida, 35
Respuesta de lazo cerrado de estado estacionario, 291-293
Respuesta escalón, 25, 27, 49, 51
Respuesta escalón de primer orden, 45
Respuesta escalón de segundo orden, 55-56
Respuesta escalón subamortiguada, 58-59
Respuesta estable, 33
Respuesta inestable, 36
Respuesta inestable de lazo abierto, 194
Respuesta inversa, 198
Respuesta monótona, 33
Respuesta no amortiguada, 54
Respuesta oscilatoria, 38
Respuesta rampa, de primer orden, 46-47, 49

Respuesta rampa, de segundo orden, 56-57
Respuesta rampa, subamortiguada, 61
Respuesta sinusoidal, 401
Respuesta sinusoidal, de primer orden, 47-48
Respuesta sinusoidal, de segundo orden, 57-58
Respuesta sinusoidal, subamortiguada, 62-63
Respuesta sobreamortiguada, 55
Respuesta subamortiguada, 54, 55, 58
Respuestas de orden superior, 62-63, 183
Retardo de primer orden, 47, 93, 185, 412, 413-414
Retardo de segundo orden, 153, 407, 415
Retardo de transportación (*véase* Tiempo muerto)
Retardos de tercer orden, 156
Retardos en serie, 184, 185
Retardos interactivos, 164
Retraso de tiempo (*véase* Tiempo muerto)
Retroalimentación, 274
Retroalimentación negativa, 276
Rigidez de ecuaciones diferenciales, 660
Robustez del control por retroalimentación, 373
Rovira, A. A., 345

Salto proporcional, 258
Saturación, 260
Saturación de la integral, 260-263
Secado de papel, 738, 756
Seebeck, T. J., 717
Segundo orden más tiempo muerto (SOPDT), 329
Seguridad, 5, 220, 476
Sensor, 2, 3, 215-216
Sensor de composición, 717
Sensor de flujo, 708
Sensor de nivel, 712
Sensor de presión, 707
Sensor de presión de fuelle, 707
Sensor de temperatura, 714-717
Sensores de nivel, 712-714
Señal digital, 5
Señal eléctrica, 5
Señal maestra de la caldera, 471
Señal neumática, 5
Serie de Taylor, 66, 68
Servo-regulador, 343
Servocontrol, 5
Shinskey, F. G., 604, 611
Símbolos, de bloques de cálculo, 685
Símbolos, de instrumentos, 685-686
Símbolos, de líneas de instrumentación, 681
Símbolos de bloques de cálculo, 685
Símbolos de instrumentación, 686
Simulación, 11, 627
  de biorreactor por lotes, 639
  de columna de destilación, 661
  de controlador por retroalimentación, 646
  de lazo de retroalimentación, 630, 654-655
  de válvula de control, 643
  herramientas, 628-630
Simulación de arranque de bomba, 676
Simulación de control de calentador, 654
Simulación de control feedforward, 657
Simulación de controlador PD, 648
Simulación de controlador PI, 646
Simulación de controlador PID en paralelo, 650
Simulación de controlador PID en serie, 649-650
Simulación de evaporador, 675
Simulación de funciones de transferencia lineales, 630
Simulación de instrumentación, 642-643
Simulación de lazos de control de flujo, 645
Simulación de mezclado de gasolina, 676
Simulación de péndulo, 670
Simulación de proceso de gas, 635
Simulación de procesos, 634
Simulación de reactor, 670, 671
Simulación de sensor-transmisor, 651-653
Simulación de tanque de separación instantánea, 671
Simulación de tiempo muerto, 654
Simulación de un derrame de cloro, 677
Simulación de unidad de adelanto-atraso, 653
Simulación de válvulas, 643-645
Simulación del secador, 673
Simulación dinámica, de sistemas de control, 627
Simulación de un sensor-transmisor, 651-653
Síntesis de controlador por retroalimentación, 360
Síntesis de metanol, proceso, 696-697
Sintonización:
  de controlador en cascada, 444
  de controlador por retroalimentación, 321
  de procesos integrantes, 351
  de Ziegler-Nichols, 322-323

estudios de caso, 735
integral mínima de error, 344
lazo cerrado, 322
método de, en línea, 322-323
para sistemas interactivos, 611
para un cambio de referencia, 344
para una perturbación, 343-344
para una respuesta con razón de asentamiento de un cuarto, 322-325, 339
por IMC, 370-372
por síntesis, 367
sugerencias, 372
Sintonización adaptiva, 126
Sintonización de integral mínima del error, 342
Sintonización de lazo cerrado, 322-323
Sintonización del control de destilación, 744
Sintonización en línea, 321
Sintonización en línea o de lazo cerrado, de Ziegler-Nichols, 322-323
Sintonización por síntesis, 367
Sistema de fase mínima, 419
Sistema de fase no mínima, 419
Sistema huésped-parásito, simulación, 677
Sistema no lineal, 64, 124, 177
Sistemas de control a nivel de planta, 613-615
Sistemas de control, 2
Sistemas de primer orden, 43, 93
Sistemas de segundo orden, 52
Sistemas inestables de lazo abierto, 197
Sistemas interactivos, 160-166
Sistemas no interactivos, 149-153
Smith, Cecil L., 333
Sobrecarga, condición inestable, 615
Sobrepaso, 60
SOPDT, 329
Sustitución directa, 297

Tanque calentador de agitación continua, simulación, 630, 637-638
Tanques térmicos con reciclado, 167
Tasa de integración (*véase* Tiempo derivativo)
Tasa de integración, 252. (*Véase* Tiempo integral)
Tasa de integración, 252
Teorema de diferenciación real, 18-19
Teorema de integración real, 19
Teorema de la diferenciación compleja, 21
Teorema de la traslación compleja, 21
Teorema de traslación real, 19
Teorema del valor final, 20
Teorema del valor inicial, 21
Termistor, 715
Termómetro de sistema lleno, 715
Termopar, 717
Tiempo característico, 53
Tiempo de estabilización, 39, 40, 60
Tiempo de elevación, 60
Tiempo de muestreo, 349
Tiempo derivativo, 249
Tiempo derivativo, estimación, 373
Tiempo muerto, 19, 30-31, 99-102, 304, 409, 417
compensador, 531
efecto del, 304
estimación, 332-335
respuesta, 49
simulación, 654
Tipos de válvulas de control, 720-724
Transductor (I/P), 6, 219
Transductor de corriente a presión, 219
Transferencia sin sobresaltos, 259, 451
Transformada de Laplace:
definición, 14
derivadas, 18
integrales, 19
inversa, 24
propiedades, 17-21
tabla, 17
variable, 14
Transmisor, 2, 3, 215, 717
Transmisor de presión diferencial, 717
Transmisor electrónico, 719-720
Transmisor de presión diferencial, 717
Transmisores inteligentes, 732
Transmisores neumáticos, 717-719

Unidad proporcional-derivativa (PD), 648-649

Valor base, 244
Valor final, 40
Valor de referencia, 243
Válvula de control (*veáse* Válvulas)
Válvula de control, accesorios, 726-727
Válvula de control, acción de, 219
Válvula de diafragma, 722
Válvula de globo, 720
Válvula de mariposa, 724
Válvulas, 218-221
Válvulas, características, 221, 228, 230

Vaporización instantánea de válvulas, 728
Variable controlada, 4, 81, 88, 240, 274
Variable de estado, simulación de procesos, 635
Variables de respuesta, 90
Variable del proceso (PV), 4
Variable dependiente, 23
Variable manipulada, 4, 33, 88, 274
Variable manipulada de rendimiento (TPM), 613
Variables, apareamiento de, 575, 577, 596
Variables de desviación, 33-35, 64, 92
Variables de perturbación, 64
Vena contracta, punto de máxima velocidad, 729
Viscosidad, correcciones de, 728
Volatilidad relativa, 65

Watt, James, 23